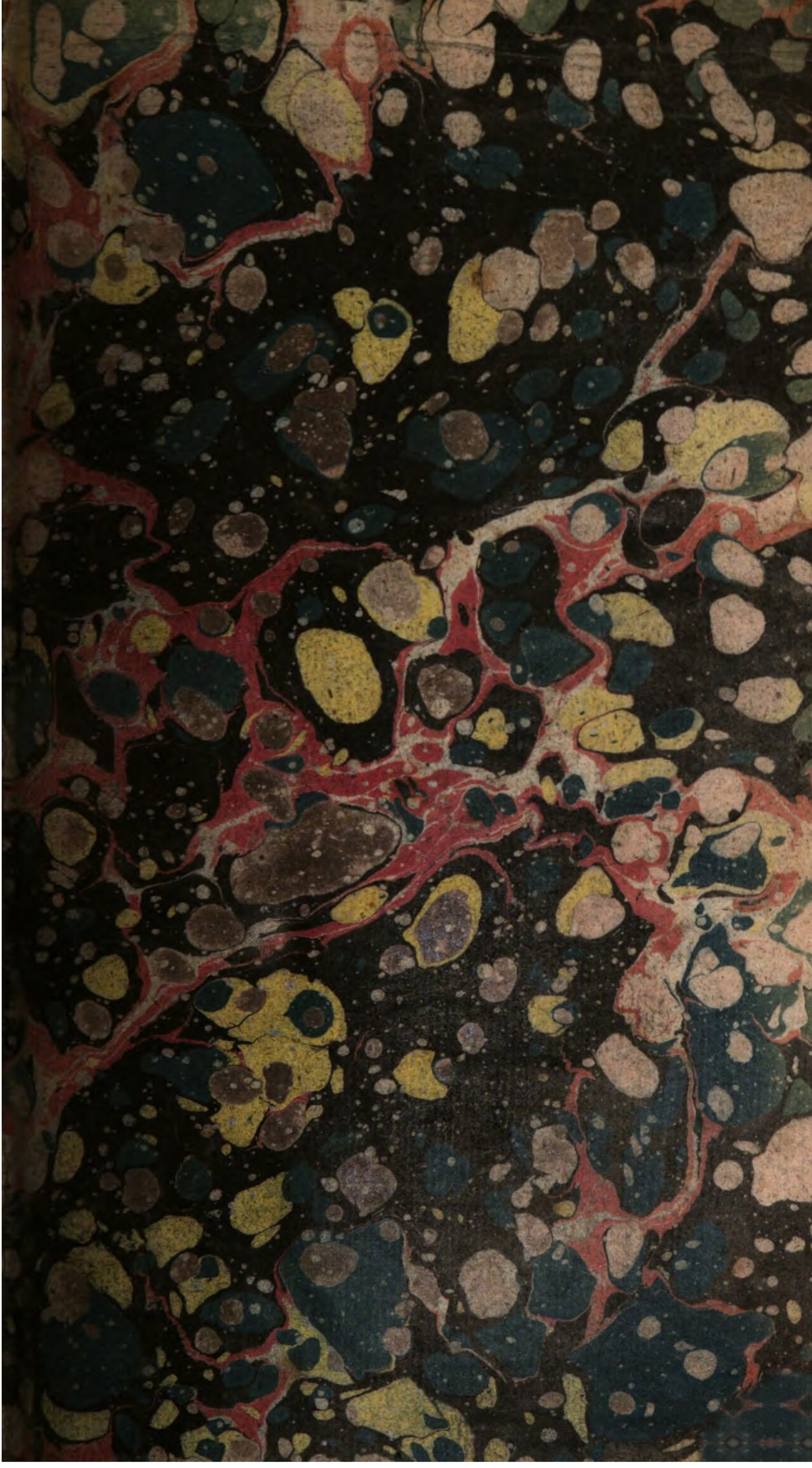


Math. f. 60 R-1
Biirja

Matheseos Geometria Specialis

270.

R

Matuex sc.

Der

selbstlernende

Geometer,

oder

deutliche Anweisung

zur

Meßkunst,

worin

sowohl die euklidische Geometrie, als auch die geradlinichte und sphärische Trigonometrie, nebst einer Anleitung zum Nivelliren und Landmessen enthalten ist:

von

Abel Bürja,

Prediger bey der französischen Friedrichstädtschen Gemeine in Berlin, und Professor der Mathemathik bey der Königlichen Ritter-Akademie daselbst.

Erster Theil.

Berlin und Libau,

bey Lagarde und Friedrich.

1787.

Vorrede.

Jede Wissenschaft oder Kunst hat ihre eignen Vorzüge, und nichts ist abgeschmackter und pedantischer, als wenn ein Gelehrter oder ein Künstler sein Fach über alle andere erheben will. Doch kann man nicht leugnen, daß einige unter den so mannigfaltigen Gegenständen, womit sich der menschliche Verstand beschäftiget, die übrigen an Vollkommenheit und Nutzbarkeit übertreffen. Die Geometrie ist von jeher, ohne Widerspruch, unter den vornehmsten Wissenschaften gezählet worden. Sie bildet den Verstand, indem sie ihn lehret aus sicheren Grundsätzen richtige Folgerungen zu ziehen. Sie gewöhnt den Geist zu einer anhaltenden Anstrengung seiner Kräfte. Sie stärket das Gedächtniß, indem sie dasselbe in beständiger Thätigkeit erhält; da kein Satz bewiesen, keine Aufgabe aufgelöset werden kann, wenn man sich nicht beständig der vorhergehenden Sätze erinnert. Sie giebt uns deutliche Begriffe von der Größe und den Verhältnissen der Körper und Gestalten die wir alle Augenblicke in der

Welt antreffen. Ein Baumeister, ein Landmesser, ein Befehlshaber der Kriegesleute, muß wenigstens die gemeine Geometrie verstehen. Sogar dem Handwerker können die Anfangsgründe dieser Wissenschaft nützlich seyn. Will sich aber jemand auf die Kenntniß der Natur und hauptsächlich des Weltgebäudes legen, so ist die bloße euklidische Geometrie für ihn nicht zulänglich, sondern er muß sich bemühen, in die tiefsten Geheimnisse der höheren Meßkunst einzudringen.

Eine so nützliche, und für viele Menschen so unentbehrliche Wissenschaft, ist von jeher geschätzet und bearbeitet worden. Sie entstand, wie die meisten Zweige der menschlichen Kenntnisse, aus Bedürfniß und Gelegenheit. So bald die Menschen das Mein und Dein gekannt haben, so bald sie ihre Aecker unter sich zu theilen angefangen haben, so haben sie auch vermuthlich Versuche angestellet, um ihre Ländereyen so wohl der Länge nach, als am Flächen-Inhalte zu messen und zu berechnen. Das Feldmessen, welches heutiges Tages nur einen geringen Theil der Geometrie, oder vielmehr eine einzelne Anwendung derselben ausmachet, war anfänglich die Hauptsache. Derjenige, der sich am ersten einfallen ließ, sein Feld in der Länge und Breite aus-

auszumessen, um zu erkennen, ob er mehr oder weniger als sein Nachbar besäße, oder ob seine Saat zur Befruchtung seines Ackers zulänglich seyn würde, vermuthete gewiß nicht, daß er den Grund zu einer erhabenen Wissenschaft legte, wodurch seine Nachfolger einst Himmel und Erde ausmessen, und die Gesetze ergründen würden, nach welchen der Schöpfer die Körperwelt regieret. So klein ist oft der Anfang der größten Dinge.

Eine alte Sage eignet den Aegyptern die Ehre der ersten Entdeckungen in der Geometrie zu. Die jährlichen Ueberschwemmungeu ihres Landes gaben ihnen häufige Gelegenheit die Eintheilungen ihrer Felder zu erneuern und zu berichtigen, und folglich deren Gestalt und Größe zu bemerken und zu bestimmen. Thales, saget die alte Geschichte, brachte die Geometrie aus Aegypten nach Griechenland, und bereicherte sie mit neuen Lehrsätzen und Aufgaben. Nach ihm kam Pythagoras, dem man die schöne Erfindung des Lehrsatzes vom Quadrate der Hypotenuse zuschreibet; eine Erfindung, worüber er sich so sehr gefreuet haben soll, daß er sein eignes Verbot, lebendige Geschöpfe zu tödten, vergaß, und im Musen-Tempel hundert Ochsen opferte. Die Geometrie wurde in Griechenland immer mehr

und mehr beliebet und zu einer grösseren Vollkommenheit gebracht. Anaxagoras von Klazomene, beschäftigte sich schon in seinem Gefängnisse mit der Quadratur des Zirkels, worüber er eine Abhandlung geschrieben haben soll. Die nemliche Aufgabe war es vermuthlich, die den Hippokrates von Chio auf seine geometrische Mondscheiben führte. Es hat wohl kaum ein Philosoph mehr Achtung für die Geometrie geheget, als Plato: an der Thüre seines Lehrsaales hatte er geschrieben: Hier darf keiner herein, der in der Meßkunst unwissend ist. Er nannte Gott den ewigen Geometer. Er war nicht nur ein Verehrer der Geometrie, sondern auch selbst ein geschickter Meßkünstler, und erfand eine sehr leichte mechanische Auflösung der berühmten Aufgabe von der Verdoppelung des Würfels. Ohngefähr ein halbes Jahrhundert nach Plato lebte Euklides, den man nicht mit seinen Zeitgenossen Euklides von Magara verwechseln muß. Euklides sammlete in seinen bekannten Elementen, was seine Vorgänger von der geraden Linie, dem Zirkel und den daraus entstehenden Flächen und Körpern erfunden hatten. Er war ein großer Meister in der Dialektik, und führte glüklich das Vorhaben aus, die Sätze der Geometrie nach der strengsten Logik

zu ordnen, und auf die wenigsten Grundsätze zurück zu führen. Er schmiedete eine Kette wo kaum ein Ring anzutreffen ist, der nicht aufs festeste mit den vorhergehenden und folgenden verbunden sey: auch haben ihm seine Nachfolger die meisten Beweise der Elementar-Geometrie zu verdanken.

Schon zu Euklides Zeiten hatte die Geometrie angefangen sich mit anderen krummen Linien als dem Zirkel zu beschäftigen. Nach und nach wurden die Eigenschaften derselben entwickelt, und 250 Jahr ohngefähr vor Christi Geburt sammlete Appollonius der Pergier die Lehren von den Kegelschnitten in acht Büchern, und gab diesen Linien die Namen Parabel, Ellipse, Hyperbel, die sie noch jetzt führen. Zu gleicher Zeit lebte Archimedes, der in der Geometrie, sowohl als in der Mechanik, viele Entdeckungen machte, und durch schöne Abhandlungen über die Kugel und den Zylinder, über die Konoiden, über die Quadratur des Zirkels und der Parabel, über die Spiral-Linie, die Meßkunst erweiterte.

Wir übergehen viele andere griechische Geometer die zu ihrer Zeit berühmt gewesen sind, deren Werke aber die alles zerstörende Zeit vernichtet hat, so daß uns nichts als ihre Namen übrig bleiben.

Auch unter dem Römischen Joche hörten die Griechen nicht auf sich mit Wissenschaften und besonders mit der Geometrie zu beschäftigen. Unterdessen daß die Römer, ihre Beherrscher, alle Mathematiker als Zauberer und Wahrsager verachteten, hatten die Griechen einen Ptolemäus, der ein großer Astronom und folglich ein geschickter Geometer war, einen Pappus von Alexandria, einen Eutocius, einen Proklus, einen Diokles, und andere mehr, welche den alten Ruhm der Griechen in der Geometrie aufrecht erhielten.

Hierauf aber folgeten die dunklen Zeiten der Unwissenheit, welche sowohl Griechenland als das übrige Europa bedeckten. Die verscheuchten Wissenschaften flüchteten zu den Arabern, wo sie aufgenommen wurden, und vom 9ten bis zum 14ten Jahrhunderte blüheten. Diesem Volke haben wir vermuthlich so wohl die heutige Arithmetik als auch die ersten Anfangsgründe der Algebra zu verdanken, zwey Theile der Mathematik, woraus die Geometrie einen so großen Nutzen ziehet. Die Geometrie selbst wurde unter den Arabern nicht vernachlässiget. Abalphat übersetzte gegen das Ende des zehnten Jahrhunderts den Apollonius. Alhazen machte sich im zwölften Jahrhunderte durch seine mathema-

tische Kenntnisse berühmt; viele zu geschweigen, deren Werke nicht bis auf uns gekommen sind, oder nur in Handschriften vorhanden sind.

Nachdem in Europa die Wissenschaften wieder aufzublühen angefangen hatten, so machte doch die Geometrie wenig Fortschritte, bis sie unter den Händen des **Kartesius** (Descartes) fast eine neue Gestalt bekam. Er erleichterte die Meßkunst in vielen Stücken, indem er die Algebra auf dieselbe anwandte, und die Linien wie Zahlen zu berechnen lehrete. Unterdessen daß dieser große Mann in der Geometrie eine neue Bahn eröfnete, so bereitete sich schon allmählig die wichtige Entdeckung der Infinitesimal-Rechnung, woraus die Meßkunst in der Folge einen so großen Nutzen gezogen hat. **Bonaventura Cavalerius**, Gregorius von St. Vincent, Pascal, fiengen an die krummen Linien als Vielecke von unendlich viel Seiten, die Flächen und Körper als Zusammensetzungen von unendlich viel Linien und Flächen zu betrachten. **Fermat** kam auf den Einfall die Tangenten der krummen Linien durch die Differenzen zu berechnen. **Barrow** ersann das kleine Differenzial-Dreyeck. **Wallis**, **Mercator**, **Brounker**, **Jacob Gregori**, **Huygens** und andere, machten glückliche Versuche um verschiedene

unendliche Reihen zu summiren. Endlich erschienen zu gleicher Zeit Leibnitz und Newton, welche die eigentliche Infinitesimal-Rechnung erfanden, und die glücklichsten Anwendungen davon auf die Geometrie machten. Die berühmten Brüder Bernoulli fanden die Beweise der Regeln die Leibnitz gegeben hatte, und Johann Bernoulli machte, einige Jahre später, noch einen neuen Schritt in dieser Rechnungsart, indem er die Exponenzial-Größen zu differenziren lehrete.

Seitdem die Infinitesimal-Rechnung erfunden worden, hat die Lehre von den krummen Linien ganz außerordentliche Vermehrungen bekommen; und seit der Zeit haben sich die größten Männer bemühet eine so fruchtbare Methode je mehr und mehr zu verbessern, und mit neuen Zusätzen zu bereichern. Jedoch muß man gestehen, daß der erste Grund, worauf die Infinitesimal-Rechnung beruhet, nemlich die Mögligkeit unendlich kleiner Größen, vielen Mathematikern etwas wankend und ungewiß scheinet. Deswegen haben sich verschiedene Mathematiker bemühet, ihm mehr Festigkeit zu geben. Schon Mac-Laurin in England, schrieb in dieser Absicht seine Abhandlung von den Fluxionen (denn so nennt man in England, was bey uns ein Differenzial,

renztal, oder ein unendlich kleiner Zuwachs der veränderlichen Grösse heißt). In diesem Werke suchet er die Regeln der Fluxions-Rechnung aus mechanischen Gründen herzuleiten. Heutiges Tages ist man auf einen besseren Weg gerathen, indem man meistens nur den Namen des unendlich Kleinen beybehält, und übrigens die Regeln der Differenzial- und Integral-Rechnung aus der Betrachtung der Gränzen veränderlicher Grösen herleitet.

Diese kurze Geschichte der Geometrie, wobey wir den Artikel Geometrie in der Encyklopedie zum Leitfaden genommen haben, mag für einen Anfänger hinlänglich seyn, um ihm vom Ursprunge, Zuwachse und jetzigem Zustande der Kunst einige Begriffe zu geben.

Die Kenntniß der Verhältnisse geometrischer Grösen, würde in der Anwendung wenigen Nutzen schaffen, wenn man solche Verhältnisse nicht in bestimmten Zahlen ausdrücken könnte; und da solche Zahlen oft sehr mühsam zu berechnen sind, so ist es ein eingeführter Gebrauch, daß man dieselben in Tafeln sammlet, woraus man sie nur jedesmal abzuschreiben brauchet, wenn man sie nöthig hat. Auf solche Art sind die trigonometrischen Tafeln entstanden, die bey mathematischen Rechnungen fast unentbehrlich

behrlich geworden sind. Da das Dreyeck die einfacheste unter allen Figuren ist, und zur Berechnung und Ausmessung aller übrigen gebrauchet wird, so ist man schon früh darauf bedacht gewesen, die Größe der Winkel desselben auf eine bequeme Art zu bestimmen. Hipparchus von Rhodus, ein berühmter Astronom, schrieb schon eine Abhandlung über die Sehnen oder Subtensen der Zirkelbogen, wodurch die Winkel bestimmet werden: sein Werk ist aber verloren gegangen. Ptolemäus in seinem Almagest, bediente sich der Lehrsätze des Hipparchus, und berechnete die Sehnen der Bogen für jeden halben Grad: er theilete den Halbmesser des Zirkels in 60 Theile, jedem wiederum in 60, und dann jeden kleinern Theil noch in 60. Da die Araber oder Sarazenen sich auf die Meßkunst legten, fanden sie es für bequemer anstatt der Sehnen die Hälften derselben, oder die Sinusse zu gebrauchen, wodurch die Zahlen kleiner und brauchbarer wurden; übrigens behielten sie die sechszigtheilige Rechnung. Im funfzehnten Jahrhunderte machte Johannes Regiomontanus Sinustafeln für jede Minute des Zirkelumkreises, und gerieth auf den glücklichen Einfall, die sechszigtheilige Rechnung zu verlassen, und dem Halbmesser lieber 10000000 Theile zu geben. Ihm

folgten

folgten verschiedene andere, die noch die Tangenten, Sekanten, Sinusverse hinzuthaten, und die Tafeln von 10 zu 10 Minuten berechneten. Einen wichtigen Schritt that Johann Neper, ein Schottländischer Baron, indem er die Logarithmen erfand, und solche sogleich auf die Trigonometrie anwendete. Heinrich Brig's, Adrianus Blaq und andere, benutzten Nepers Erfindung, und berechneten sehr vollständige Tafeln, sowohl für die Logarithmen der natürlichen Zahlen, als auch für die Logarithmen der Zahlen, welche die trigonometrischen Linien ausdrükken. Da aber solche weitläuftige Tafeln sehr kostbar und im Gebrauche etwas unbehülflich waren, so sind seit der Zeit verschiedene Auszüge aus denselben erschienen. Dergleichen sind Wolfs und Ozanams Tafeln. Vollständiger sind diejenigen welche Gardiner in England herausgegeben hat, und wovon wiederum Auszüge gemacht worden.

Der gewöhnlichste Gebrauch solcher Tafeln findet beym Feldmessen statt. Jedoch sind sie in der sphärischen Trigonometrie noch unentbehrlicher. Dieser Theil der Geometrie ist fast so alt als die Astronomie, die ihn veranlasset hat. Denn da sich der Himmel wie eine hohle Kugel zeiget, so ist jede Linie, die man in Gedanken auf der Oberfläche dieser Kugel von einem

Stern

Stern zum andern ziehet ein Zirkelbogen, und drey solche Bogen machen ein sphärisches Dreyeck. Solche Bogen haben nun ihre Sinusse, und diese ihre Logarithmen, woraus man schon einigermaßen erachten kann, wie die nemlichen Rechnungen, wodurch die Entfernungen auf der Erde gefunden werden, auch am Himmel angebracht werden können.

Schon aus der Trigonometrie kann man sehen, wie groß der Vortheil ist, den die Rechenkunst verschaffet, wenn sie mit der Geometrie verbunden wird. Es ist also ein bloßer Eigensinn, wenn einige Mathematiker darauf bestehen, man müsse so viel als möglich alle Aufgaben der Meßkunst bloß graphisch, das ist, durch Linien und ohne Rechnung auflösen. Schon die ältesten Mathematiker kannten den Nutzen der Zahlen in der Geometrie, und Euklides hat sein 7tes, 8tes und 9tes Buch der Lehre von den Zahlen gewidmet. Will man in der Geometrie so weit kommen, daß man dieselbe auf brauchbare Gegenstände anzuwenden wisse, so muß nothwendig die Rechenkunst mit der Geometrie verbunden werden. Die Geometrie muß freylich die Eigenschaften der Figuren, und die Grundsätze zur Ausmessung des Raumes hergeben; die Ausmessung selbst kann aber ohne Rechnung nicht geschehen.

Denn

Denn, wenn man einen Raum ausmessen will, so suchet man zu erforschen wie vielmal ein gewisses Maaß darin enthalten sey. Das Maaß ist alsdann die Einheit, die Menge der Wiederholungen des Maaßes ist eine Zahl. Wie man aber mit Zahlen umgehet, lehret die Rechenkunst. Im Grunde bestehet die Mathematik oder Wissenschaft der Grösen eigentlich in der Rechenkunst, und die erste Anwendung derselben hat die Ausmessung des Raumes zum Gegenstande, weil die wirklichen Körper keine bekanntere Eigenschaft haben, als daß sie einen Raum einnehmen.

Wir haben in der Berechnung der Figuren, und überhaupt in der Rechenkunst, zwey Vortheile die dem Euklides und den andern alten Mathematikern unbekannt waren. Der erste ist die Dezimal-Zählung, oder die bekannte Art, wie man die größten Zahlen durch Einheiten, Zehner, Zehner von Zehnern u. s. f. ausdrücket. Vermöge dieser Einrichtung lassen sich bekanntermaaßen die verschiedenen arithmetischen Operazionen, so zu sagen, spielend verrichten. Die alten mußten in Ermanglung einer solchen oder ähnlichen Methode, die Zahlen bloß in Gedanken mit vielem Kopfbrechen sammlen, trennen, vervielfältigen, theilen. In neuern Zeiten hat man

durch die Erfindung der Logarithmen die arithmetischen Verrichtungen noch mehr erleichtert. Hätten die Griechen dergleichen Kunstgriffe gekannt, so würden sie vermuthlich die Arithmetik häufiger auf die Geometrie angewandt haben, und wären nicht beym bloßen Räsonniren über die Figuren geblieben. Der andere Vorzug den wir haben, bestehet in der Algebra. Vermittelst dieser erhabenen Kunst erhält man den Vortheil, daß man nicht bey jedem Falle die Räsonnements, welche man bey der Berechnung der Figuren gemacht hat, zu wiederholen nöthig hat. Denn da die Zahlen durch willkürliche Zeichen ausgedrücket werden, so entsteht am Ende der Rechnung eine allgemeine Formel, welche auf alle Fälle ähnlicher Art passet, und wobey weiter nichts zu thun bleibet, als daß man anstatt der willkürlichen Zeichen, die gehörigen Zahlen für jeden Fall setze, und sie so behandle, wie die unbestimmten in der Formel behandelt sind.

Die Algebra stiftet in der Geometrie noch einen andern Nutzen. Ihre Formeln können oft die Stelle eines Beweises vertreten. Dieses ist also zu verstehen. Bey den Grundsätzen zur Berechnung der Figuren trift es sich, daß gewisse algebraische Operazionen allemal mit gewissen geometrischen Operazionen

zionen übereinstimmen, oder daß die eine allemal Statt findet, wo die andere Statt findet, z. E. daß ein Produkt zweyer Zahlen als $a \times b$ allemal ein Rektangel ausdrückt, dessen eine Seite die Länge a und die andere die Länge b hat, daß folglich die zweyte Potenz einer Zahl, z. E. a^2 oder aa ein Quadrat auf der Grundlinie a vorstellet; daß $\frac{ab}{c}$ allemal die vierte Proporzional-Linie zu c, b und a ausdrücket; daß $\surd ab$ die mittlere Proporzional-Linie zwischen den Linien a und b anzeiget, u. s. f. Wenn also in dem Resultate einer Rechnung solche Ausdrücke vorkommen, so dienet die Formel nicht nur zur Berechnung der Figur, sondern sie vertritt zugleich die Stelle eines Beweises oder Räsonnements, und giebt gewisse Verhältnisse der Linien zu erkennen. Gesetzt man habe gefunden $x = \frac{ab}{c}$, so sehe ich daraus erstlich, daß ich, um die Linie x zu berechnen, die Zahl a mit b multiplizieren, und das Produkt durch c dividiren muß. Zugleich aber sehe ich auch, daß die Linie x die vierte Proporzional-Linie ist, zu den drey Linien, die durch die Zahlen a, b und c ausgedrücket worden. Diese Formel $x^2 = ab$ bedeutet nicht nur, daß das Produkt aus a und b der zweyten Potenz von x gleich

ist, sondern zugleich daß das Rektangel aus den Linien a und b dem Quadrate der Linie x gleich ist, und daß folglich x die mittlere Proporzional-Linie zwischen a und b ist, welches ebenfalls durch $x = \sqrt{ab}$ angedeutet wird. Die Gleichung $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ bedeutet im arithmetischen Verstande, die zweyte Potenz zweyer Zahlen a und b bestehe aus den Quadraten beyder Zahlen und ihrem doppelten Produkte; im geometrischen Verstande, das Quadrat einer Linie die zwey Theile hat, bestehe aus den Quadraten beyder Theile, und zweymal dem Rektangel aus beyden Theilen. Auf eine solche Art läßt sich fast jeder algebraische Ausdruck in die geometrische Sprache übersetzen. Uebersetzt man nun auf diese Weise alle Gleichungen die zu einem Resultate geführt haben, so erhält man einen vollständigen geometrischen Beweis. Und umgekehrt, wenn man ein geometrisches Räsonnement in die algebraische Sprache übersetzet, so erhält man das Fazit einer Rechnung, oder wenigstens die Formel der arithmetischen Rechnung.

Da die Arithmetik und Algebra in der Geometrie einen so großen Nutzen stiften, so habe ich bey Verfertigung dieses Werkes kein Bedenken getragen, diese beyden Zweige der Rechenkunst, so bald als

möglich

möglich auf geometrische Größen anzuwenden. Bey jeder Lehre habe ich erstlich die Lehrsätze aufs strengste und bloß geometrisch bewiesen, darauf aber sogleich gezeiget, wie die arithmetische und algebraische Berechnung der Figuren daraus entspringet. Mein Vorhaben war anfänglich, die ganze, sowohl geradlinichte als krummlinichte Geometrie auf diese Art in gegenwärtigem Werke abzuhandeln. Ich merkte aber bald, daß ein solcher Plan für ein Paar kleine Bändchen viel zu weitläuftig wäre, und muste folglich für diesmals die höhere Geometrie unberühret lassen. Was also gegenwärtiges Buch enthält, ist eine vollständige Lehre von der geraden Linie und dem Zirkel, nebst den Flächen und Körpern die daraus entstehen. Uebrigens kann diese Geometrie als eine Fortsetzung meines selbstlernenden Algebristen angesehen werden; sie kann aber auch ohne denselben gebrauchet werden, indem ich mich nie darauf beziehe. Wo es nöthig ist, setze ich voraus, daß der Leser mit den vornehmsten Lehren der Arithmetik uud Algebra bekannt ist, er mag sie übrigens von mir oder von einem anderen erlernet haben.

Da ich vor einem Jahre gedachten selbstlernenden Algebristen in die Welt schickte, hatte ich mir zwar schon vorgenommen, ihm diesen Bruder, un-

ter dem Namen des selbstlernenden Geometers zu geben; ich erwähnte aber noch nichts von meinem Vorsatze, weil ich erst sehen wollte wie das Publikum die jüngere Frucht meiner Bemühung aufnehmen würde. Die Aufnahme übertraf meine Hoffnung. Geschickte Männer stärkten meinen Muth durch ihren Beyfall, und verschiedene Jünglinge fiengen an aus meinem Buche mit Zahlen und Buchstaben rechnen zu lernen. Ich trage also weiter kein Bedenken mit meiner Geometrie ans Licht zu treten, und hoffe darin die nemliche Deutlichkeit und einfache Lehrart beobachtet zu haben, die meiner Algebra eine so gütige Nachsicht verschaffet hat. Obgleich dieses Werk nur eine kurze Zeit nach dem vorhergehenden erscheinet, so kann ich versichern, daß es nicht ohne lange Vorbereitung geschrieben worden.

Bekannte Lehren aufs deutlichste vorzutragen und begreiflich zu machen, ist keine so leichte Arbeit als mancher sich es vorstellet. Was einem geübten Mathematiker sonnenklar und so zu sagen angebohrne Wahrheit zu seyn scheinet, macht oft einem Anfänger die grösste Schwierigkeit, und verursacht ihm manche unruhige Stunde. Dieses erfahre ich täglich in meinen öffentlichen Lehrstunden, und solche Erfahrungen

rungen habe ich mir in meinem Werke zu Nutze gemacht. Auch wird der Leser verschiedene Lehrsätze darin finden, die auf eine neue und kürzere Art bewiesen sind, als sonst zu geschehen pflegt. Ganz neue Sätze wird man wohl hier nicht suchen; denn die Geometrie ist schon seit mehr als zwey tausend Jahren so bearbeitet, und von allen Seiten betrachtet worden, daß wohl kaum darin etwas neues zu erfinden ist, es müsten denn etwa einige nützliche Folgerungen und Anwendungen der alten Sätze seyn.

Weil es bey einem Elementar-Buche weder nöthig noch gebräuchlich ist, die Verfasser zu nennen, von denen man diesen oder jenen Satz entlehnet hat, so will ich hier einmal für allemal die Bücher anführen, die ich hauptsächlich zu Rathe gezogen habe. Es sind folgende: Euklids Elemente, funfzehn Bücher, von Lorenz: *Lamy, nouveaux Eléments de Géométrie:* Wolff, Anfangsgründe der Algebra: *Ozanam, Récréations Mathématiques & Physiques* (umgearbeitet durch Hrn. von C. G. F.): *De la Caille, Leçons Elémentaires de Mathématiques:* Desselben *Traité préliminaire de la Trigonométrie Sphérique,* in seinen *Leçons Elémentaires d'Astronomie: Bézout, Cours de Mathématiques à l'usage du corps Royal de l'Artillerie:*

lerie: Cagnoli, Traité de Trigonométrie rectiligne & Sphérique: Le Febvre, Oeuvres Complettes: Tacqueti Trigonometria plana nec non Trigonometria sphaerica: Wolfii Tabulae Sinuum atque Tangentium: Encyclopédie ou Dictionaire raisonné des Sciences: Ginet, nouveau Manuel de l'Arpenteur: Du Carla, Expression des Nivellements: und vielleicht noch andere Werke die mir jetzt nicht beyfallen.

Nebst diesen Hülfsmitteln habe ich, wie schon vorher gesagt, die Erfahrung zu Rathe gezogen, welche mir oft den Weg gezeigt hat, wodurch die Sätze der Geometrie sich am besten in den Verstand und das Gedächtniß der Lehrlinge einprägen lassen. Solche Beobachtungen zu sammlen werde ich nun je mehr und mehr Gelegenheit haben, da mir seit kurzer Zeit ein wichtiges Lehramt bey der hiesigen Ritter-Akademie allergnädigst anvertrauet worden, welches mir manchen Anlaß geben wird, verschiedene Bemerkungen über die kürzeste und vortheilhafteste Methode in der Mathematik zu machen.

Was den Gebrauch dieses Buches betrift, so habe ich dabey weiter nichts zu erinnern, als was ich schon in der Vorrede zu meinem selbstlernenden Algebristen gesagt habe. Man lese anfänglich ein

Haupt-

Hauptstück nur flüchtig durch, so daß man einen Begriff vom Zusammenhange der ganzen Lehre bekomme, die darin enthalten ist. Hernach aber fange man es von vorne wieder an, und überdenke jeden Satz, bis man ihn so verstehe, daß man ihn nöthigen Falls selbst beweisen, und einem anderen beybringen könne. Nachdem man nun auf solche Weise das ganze Werk gelesen hat, so muß man es noch einmal von vorne anfangen, nicht nur um die Sätze desto besser im Gedächtnisse zu behalten, sondern auch um den ganzen Zusammenhang der Wissenschaft zu übersehen. Wenn der Leser, wie ich es voraussetze, schon in der Arithmetik und Algebra ziemlich bewannert ist, so möchte bey einer täglichen Uebung ein halbes Jahr zureichend seyn, den Theil der Geometrie zu erlernen, welcher hier vorgetragen wird, worauf man dann zur höhern Geometrie schreiten kann.

Zur grösseren Bequemlichkeit des Lesers habe ich die Figuren in Holz schneiden, und zwischen dem Texte drucken lassen. Sehr gern hätte ich den Druck so eingerichtet, daß die Erklärung allemal unter der Figur stünde: weil aber dieses die Figuren weit zahlreicher und das Buch stärker, folglich auch kostbarer gemacht hätte, so muste ich diese Bequemlichkeit

an manchen Stellen aufgeben. Ein fleißiger Leser kann sich aber leicht behelfen, wenn nicht der ganze Beweis unter der Figur steht. Er darf nur die Figur auf einem Stückchen Papier ohngefähr aus freyer Hand nebst den dazu gehörigen Buchstaben nachzeichnen, so hat er sie beständig vor den Augen, und brauchet nicht beym Lesen das Blatt umzukehren. So habe ich mich oft bey den Korrekturen beholfen, wo ich den Text genau mit der Figur vergleichen mußte.

Beym Korrigiren des Druckes richtete ich hauptsächlich mein Augenmerk auf die Buchstaben die sich auf die Figuren beziehen: man wird also hier entweder niemals oder sehr selten Figuren antreffen, die nicht völlig mit dem Texte übereinstimmen, welche Genauigkeit oft genug in geometrischen Büchern vermisset wird.

Wegen der deutschen Sprache bitte ich den Leser um die nemliche Nachsicht die mir schon als einem Halbfremden vergönnet worden; um desto mehr, da ein Verfasser sehr leicht wider die Sprachlehre sündigen kann, wenn er alle seine Aufmerksamkeit auf Rechnungen und Figuren wenden muß.

Es wird wohl selten heut zu Tage eine Vorrede geendiget, ohne ein Paar Worte mit den Herren Kritikern zu reden, es sey nun um ihre Gunst zu erflehen, oder um ihnen Trotz zu bieten. Ich thue keines von beyden. Guten Rath bin ich allemal willig anzunehmen, er mag kommen woher oder von wem er will, er mag entweder mit gebieterischem Rezensenten-Tone oder mit freundschaftlicher Sanftmuth gegeben seyn. Denen die meine Algebra günstig beurtheilet haben, statte ich für ihre aufmunternde Nachsicht meinen schuldigen Dank ab. Denen die mir alle Kenntniß einer guten mathematischen Methode abgeleugnet haben, muß ich ohne Umschweif sagen, daß sie sich irren; da Männer, die in diesem Fache für die ersten gehalten werden, gerade das Gegentheil versichert haben.

Bey dieser Gelegenheit kann ich nicht umhin einige Regeln der guten Kritik anzuführen, die ein jeder bey der Beurtheilung eines Buches beobachten sollte. Man muß die Methode eines Verfassers an sich selbst und ihrem inneren Werthe nach beurtheilen, ohne sich gar zu ängstig darum zu bekümmern, ob sie neu oder alt ist, ob der Verfasser darin seinen Vorgängern gefolget ist oder nicht; auch nicht verlangen, daß einer genau auf den Fußstapfen des

andern

andern gehen solle. Wird ein neuer Weg vorgeschlagen, so kann man ihn als einen Versuch ansehen, wovon die Erfahrung erst lehren muß, ob er besser oder schlechter ist als die gewöhnliche Bahn. Hätte der Herr Rezensent in der allgemeinen Litteratur-Zeitung dieses beobachtet, so würde er mirs nicht so übel gedeutet haben, daß ich Clairauts Lehrart nicht angenommen habe; daß ich nicht in allen Stücken dem Beyspiele der Herren Segner, Kästner und Karsten gefolget bin (so sehr ich auch diese Männer hochachte, und ihre Verdienste um die Mathematik erkenne); daß ich der Kürze und Bequemlichkeit halben, einige ungewöhnliche Zeichen und Wörter gebraucht habe; daß ich einige Lehren nicht an der gewöhnlichen Stelle, sondern an einem anderen Orte vorgetragen habe, wo ich sie schicklicher anbringen konnte.

Ferner muß derjenige, welcher ein Buch beurtheilet, die Stellen die er anführet nicht außer dem Zusammenhange vortragen, wenn dieser ihnen ihr wahres Licht giebt. Dieses hat der nemliche Herr Rezensent nicht genau beobachtet. Er stellet meine Definizion von der Multiplikazion als unvollständig vor, da er doch auf der folgenden Seite eine deutliche Entwickelung derselben hätte lesen können. Er

ist mit dem Beweise nicht zufrieden, den ich bey der Division der benannten Zahlen gebraucht habe, weil es nur die Erörterung eines einzelnen Falles ist; und sagt nicht dabey, daß die Sache an sich selbst schon so klar und durch alles Vorhergehende so vorbereitet ist, daß ein weitläuftiger Beweis überflüssig wäre.

Man muß nicht einen Verfasser beschuldigen, daß er seine Gedanken von einem andern entlehne, wenn er sonst seine Quellen richtig anzugeben pfleget. Da ich also in der Vorrede zu meinem selbstlernenden Algebristen, die Bücher genau angezeigt hatte, deren ich mich bedienet habe, so muste man nicht sagen, ich wäre bey der Differenzial-Rechnung bey dem Wege des *Abbé Raymond Roux* geblieben, von dessen Werke ich noch keine Kenntniß hatte.

Endlich ist es eine Hauptregel, daß man bey der Beurtheilung eines Buches nicht mit einem entscheidenden Tone spreche, als wäre man ein untrüglicher Richter oder ein Papst in der gelehrten Welt: man muß seine Kritik für das ausgeben, was sie allemal seyn soll, die bescheidene Meynung eines einzelnen Mannes, der wie andere Sterbliche irren kann. Man muß also nicht aus einem hohen Tone lauter Fragen aufwerfen: warum dieses? warum jenes? warum hat es der Verfasser nicht so gemacht?

macht? Auch muß man keine Beurtheilung mit spöttischen Wünschen beschließen, sondern fein ehrbar und bescheiden rezensiren.

Wenn gegenwärtiges Werk nach solchen billigen Grundsätzen beurtheilet wird, so werde ich jede gegründete Erinnerung mit desto mehr Dank annehmen und bey Gelegenheit zu nutzen wissen. Unterdessen wünsche ich, daß es der lehrbegierigen Jugend und andern Liebhabern der Mathematik, ein bequemes Hülfsmittel zur Erlernung dieser so wichtigen Wissenschaft darreichen möge.

Erstes

Erstes Hauptstück.

Vorläufige Kenntnisse.

§. 1.

Die Geometrie oder Meßkunst, welche wir in diesem Werke abhandeln wollen, ist die Wissenschaft von der Größe der Körper, oder eigentlich von der Größe des Raumes den jeder Körper einnimmt.

§. 2.

Wenn wir uns einen deutlichen Begriff von der Größe eines Körpers machen wollen, so pflegen wir ihn der Länge, Breite und Tiefe nach zu betrachten, indem wir nemlich beobachten, wie weit sich der Körper vor uns gerade aus, seitwärts rechts und links, und ober- oder unterwärts ausdehnet. Diese drei Ausdehnungen werden die drei Ausmessungen oder Dimensionen eines Körpers genannt. Sonst heißt auch im gemeinen Leben die Länge eines Körpers so viel als seine größte Ausdehnung; die Dicke, seine kleinste Ausdehnung; und die Breite, seine mittlere Ausdehnung. Doch diese Benennungen sind willkürlich. Genug daß man den Raum, den ein Körper einnimmt, hauptsächlich in drei verschiedenen Richtungen betrachten kann.

Auch ist aus der Erfahrung bekannt, daß jede der drei Ausmessungen nicht allemal im ganzen Körper einerlei ist; so können zum Exempel einige Theile desselben länger, breiter, oder tiefer seyn als die übrigen. Wenn man also von den drei Ausmessungen eines Körpers spricht, so verstehet es sich, daß jede derselben in den verschiedenen Theilen des Körpers verschieden seyn kann. Und in diesem Falle kann jeder Theil wiederum als ein besonderer Körper betrachtet werden, der seine eigene Ausmessungen hat.

§. 3.

Wenn man in einem Körper oder Raume einen Ort bestimmet, um den Abstand der verschiedenen Theile des Körpers oder Raumes von diesem Orte zu betrachten, so heißt ein solcher Ort ein Punkt. Man muß ihn so klein als möglich annehmen, auf daß er nicht selbst als ein Theil des Körpers oder Raumes betrachtet werden könne. Sondert man nun in Gedanken von einem solchen Orte alle Ausdehnung oder Theilbarkeit ab, so kann man mit den Geometern sagen, ein Punkt sey, was keine Theile oder keine Ausdehnung hat.

§. 4.

Will man die Entfernung eines Ortes oder Punkts von einem anderen betrachten, so bildet man sich ein, es gehe ein Weg von dem einen zum andern. Solchen Weg muß man sich wiederum ohne merkliche Breite noch Tiefe vorstellen, weil er nur die Länge oder eine einzige Ausdehnung anzeigen soll. Er heißt eine Linie, und wenn man in Gedanken alle Breite und Tiefe davon absondert, so läßt sich sagen, eine Linie sey eine Länge ohne Breite noch Tiefe.

§. 5.

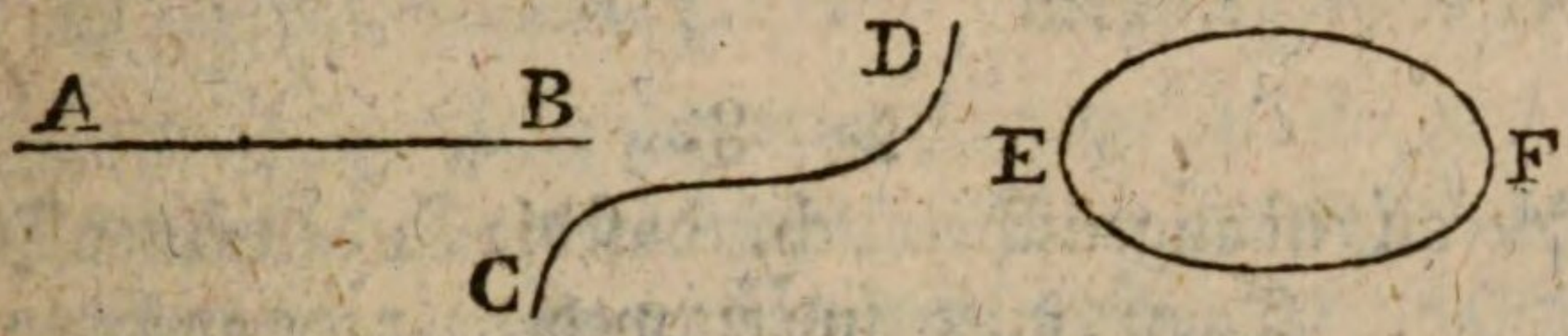
Hieraus folgt, daß die Enden einer Linie Punkte sind, und daß in einer Linie zwischen beiden Endpunkten, so viel Punkte angenommen werden können, als man will. Man kann sich sogar vorstellen, eine Linie bestehe aus lauter neben einander liegenden Punkten, oder sie sey der Weg, den ein Punkt beschreibt, wenn er von einer Stelle zur andern beweget wird.

§. 6.

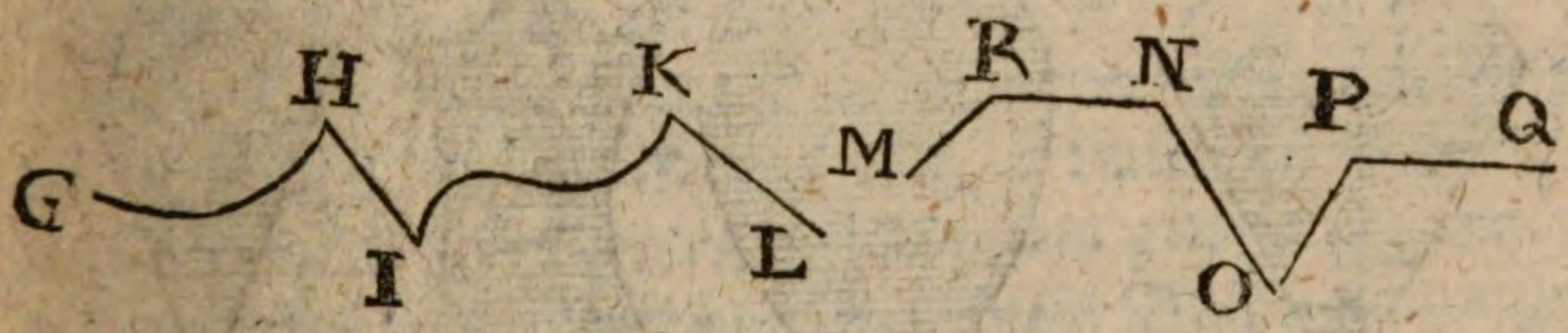
Jede Linie ist entweder gerade oder krumm, nachdem sie zwischen ihren Endpunkten entweder den kürzesten Weg bildet oder einen längeren. Z. E. Die Linie AB ist ge-

rade

rade, hingegen CD ist krumm. Auch giebt es krumme Linien wie EF, die keine Endpunkte haben, sondern in sich selbst zurücklaufen. Alsdann kann man sich vorstellen, eine solche Linie bestehe aus zwey oder mehreren krummen Stücken, auf welche sich dann die obigen Erklärungen anwenden lassen.



Gerade und krumme Linien lassen sich auf verschiedenen Arten zusammensetzen, so daß ein zusammenhängendes Ganzes daraus entstehet. Z. E. Der Zug GL bestehet aus zwei geraden Linien HI und KL, und zwei krummen GH und IK. Hingegen MQ bestehet aus lauter geraden Theilen, als QP, PO, ON, NR, RM.



Man pfleget aber nicht einen solchen zusammengesetzten Zug, da man die Punkte deutlich bemerken kann, wo die Theile anfangen und aufhören, als eine einzige Linie, sondern als verschiedene an einander gränzende Linien, zu betrachten.

§. 7.

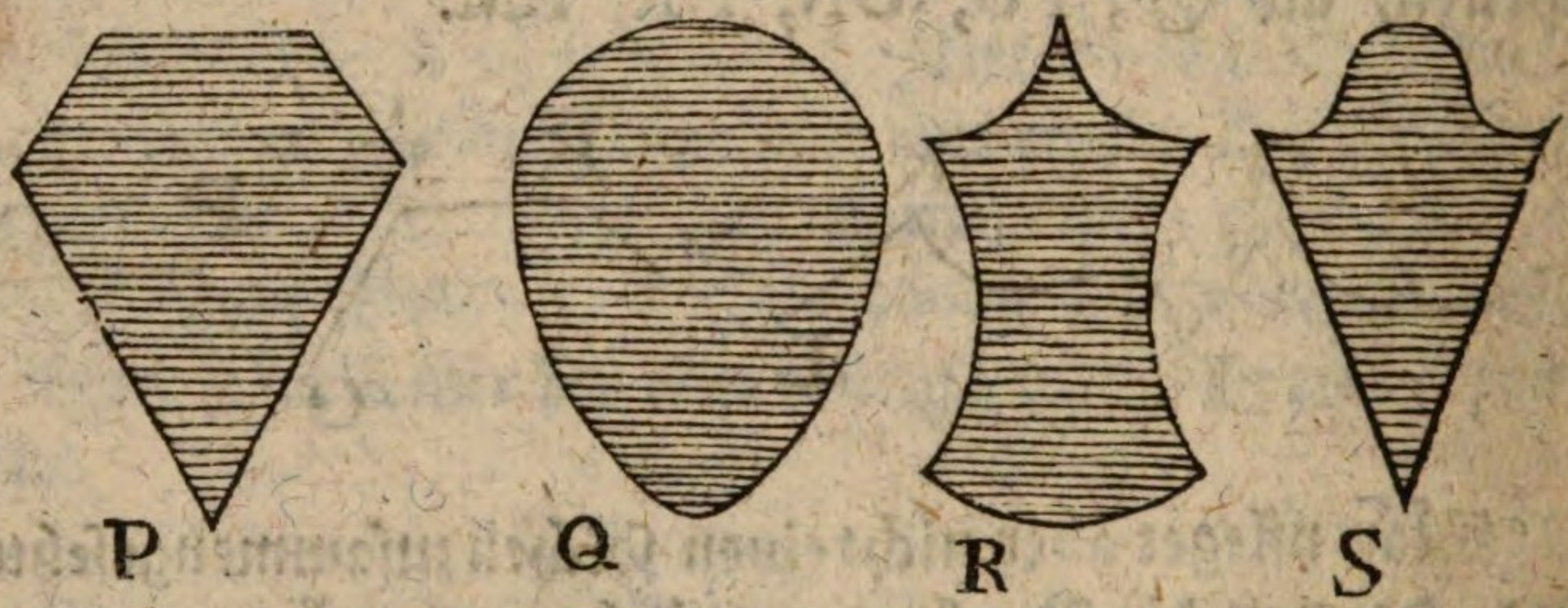
Das Aeußere eines Körpers, was nemlich von demselben, ohne ihn zu zerstücken, gesehen und gefühlet werden kann, heißt die Oberfläche desselben, und wenn man in derselben verschiedene Abtheilungen unterscheiden kann, so heißt jeder Theil eine Fläche des Körpers. Weil bei Betrachtung der Flächen die Dicke oder Tiefe gar nicht in Erwägung genommen wird, so kann man sagen, eine

Fläche sey, was eine Länge und Breite, aber keine Tiefe hat.

Wenn man die Größe eines Feldes bestimmen will, so ist solches eine Fläche, oder ein Theil von der Oberfläche der Erde, und bey der Ausmessung kömmt es bloß auf Länge und Breite an; die Tiefe oder Dicke der Erde wird ganz aus der Acht gelassen.

§. 8.

Hieraus ist augenscheinlich, daß die Enden einer Fläche Linien sind. Diese Linien sind entweder gerade oder krumm. Auch kann eine Fläche von einer einzigen krummen Linie begränzet seyn, die man aber willkürlich in mehrere eintheilen kann. Die Figuren P, Q, R und S stellen verschiedene Flächen vor. Die Fläche P ist geradlinicht, Q und R sind krummlinicht, S ist vermischtlinicht.

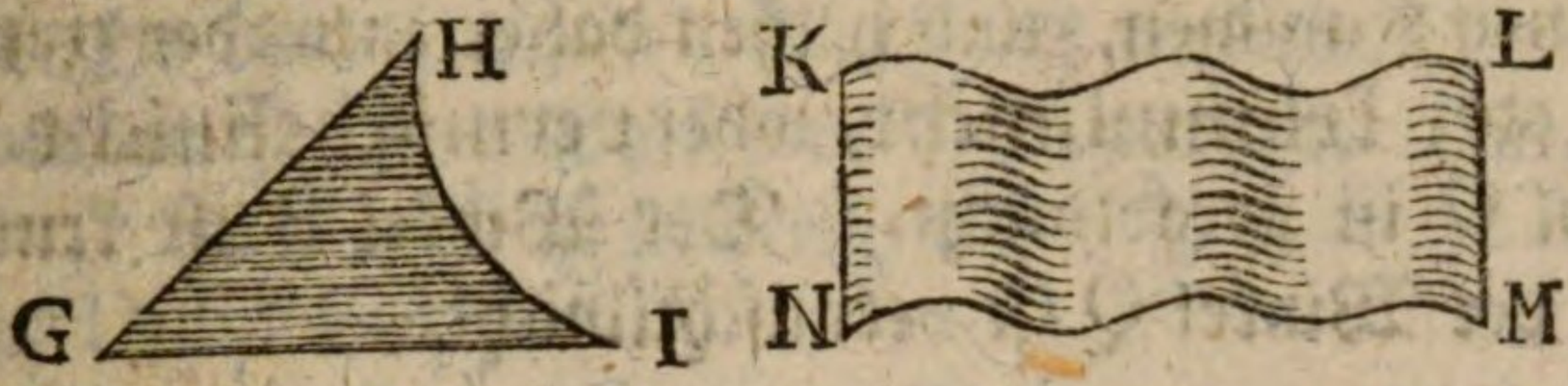


Man stellet sich manchmal eine Fläche vor, als bestünde sie aus lauter neben einander liegenden Linien. Auch kann man sagen, eine Linie beschreibe eine Fläche, wenn sie beweget wird.

§. 9.

Jede Fläche ist entweder eben oder uneben, das heißt gerade oder krumm. Eine ebene oder gerade Fläche, welche auch bloß eine Ebene genannt wird, ist eine solche, worauf eine gerade Linie nach allen möglichen Richtungen genau angeleget werden kann. Eine unebene oder krumme Fläche ist eine jede, welche diese Eigenschaft nicht hat. Die Figur GHI stellet eine ebene Fläche vor, wie auch

alle Figuren bei vorigem Absatze. Hingegen soll KLMN eine unebene oder krumme Fläche vorstellen, welches durch die Schattirung angedeutet wird.

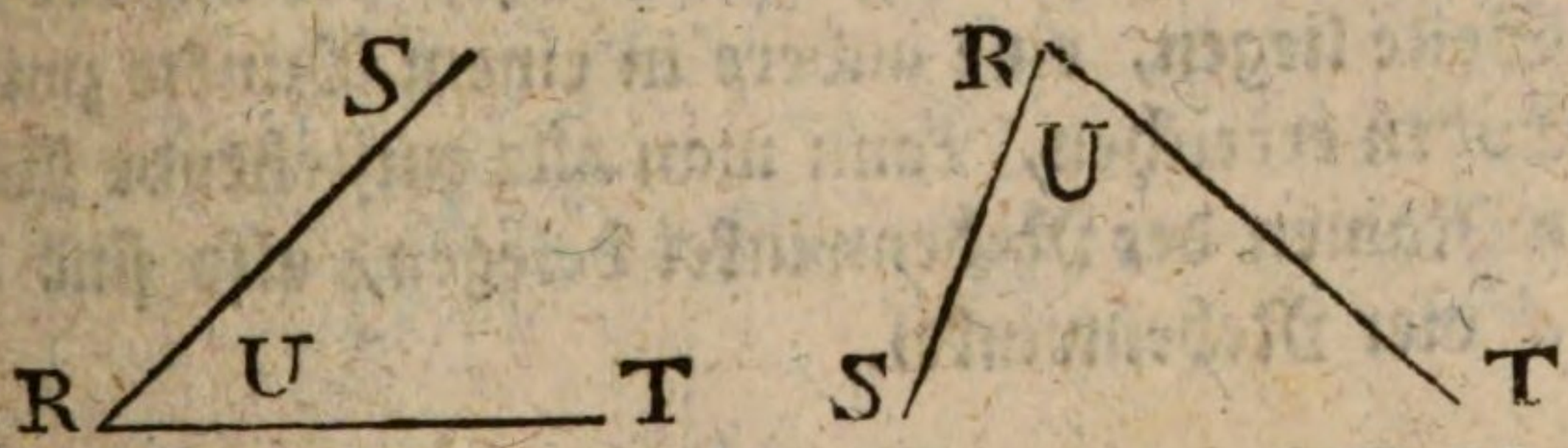


Ein Anfänger hüte sich eine krumme Fläche mit einer krummlinichten zu verwechseln. Eine Fläche kann eben und geradelinicht, eben und krummlinicht, krumm und geradlinicht, krumm und krummlinicht seyn.

§. 10.

Wenn zwey Linien, die in einer Ebne liegen, an einander gränzen, oder einander in einem Punkte begegnen, so entstehet eine Oeffnung zwischen denselben, oder eine gegenseitige Neigung derselben, welche ein ebener Winkel oder eine ebene Ecke genannt wird.

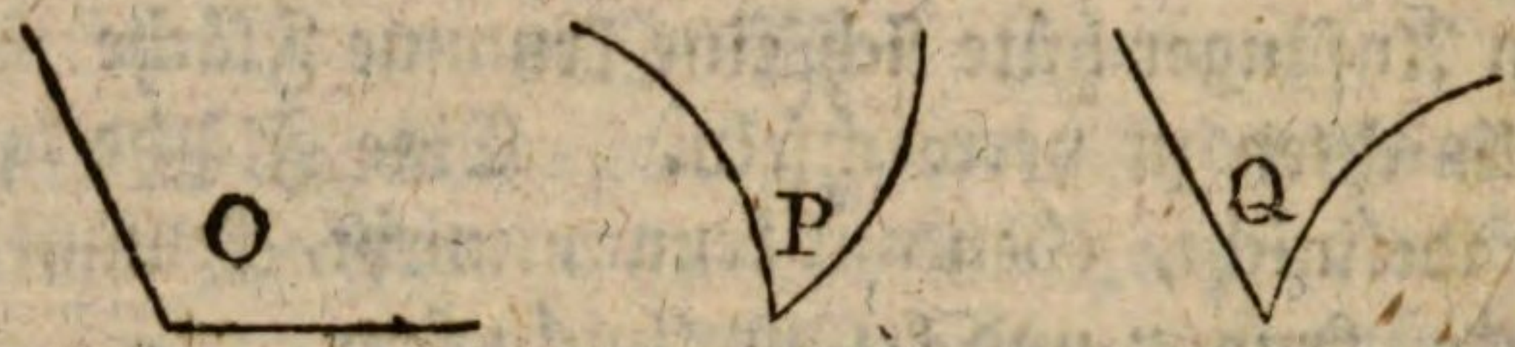
Der Punkt, wo beyde Linien einander begegnen, heißt der Scheitel des Winkels. Beyde Linien selbst werden die Schenkel oder Seiten des Winkels genannt. Einen Winkel pfleget man entweder mit einem Buchstaben anzuzeigen, der am Scheitel stehet, oder mit dreyen, wovon der mittlere am Scheitel stehet. So saget man, z. E. der Winkel U, oder der Winkel SRT.



Anmerkung. Weil man saget, Dreieck, Viereck, u. s. f., nicht Dreiwinkel, Vierwinkel, so wäre es vielleicht gut, wenn die deutschen Geometer den Sprachgebrauch so lenkten, daß Ecke allemal bey der Neigung der Linien gebrauchet, Winkel aber für die Körperlehre aufbewahret würde.

§. 11.

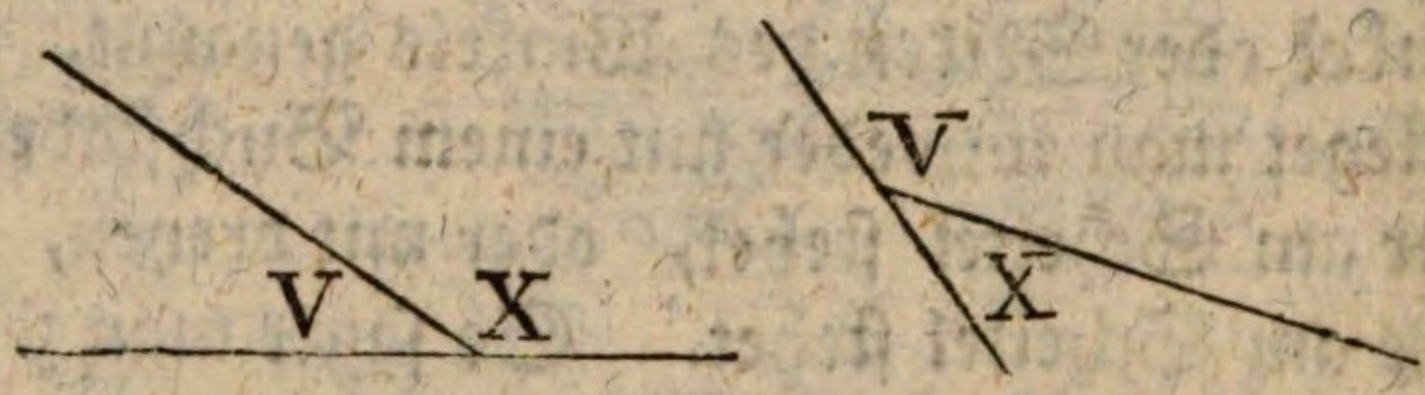
Die ebenen Winkel oder Ecken haben entweder zwey gerade Schenkel, oder zwey krumme, oder einen geraden und einen krummen, und heißen daher entweder geradlinicht, oder krummlinicht, oder vermischtlinicht. Der Winkel O ist geradlinicht. Der Winkel P ist krummlinicht, der Winkel Q ist vermischtlinicht.



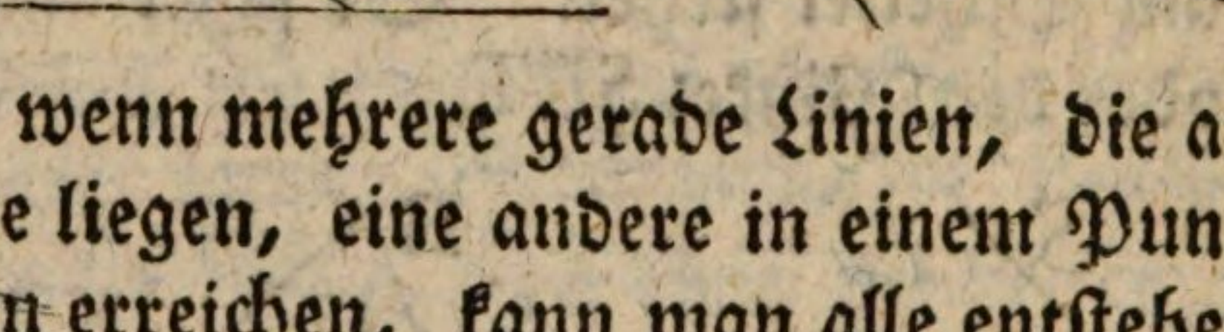
Wenn bloß von Winkeln, ohne nähere Bestimmung gesprochen wird, so verstehet man meistens ebene geradlinichte Winkel, es müste denn der Sinn der Rede ein anderes erfordern.

§. 12.

Wenn eine gerade Linie eine andere zwischen beyden Enden derselben erreichet, so entstehen zwei Winkel, die man Nebenwinkel nennet, als V und X.



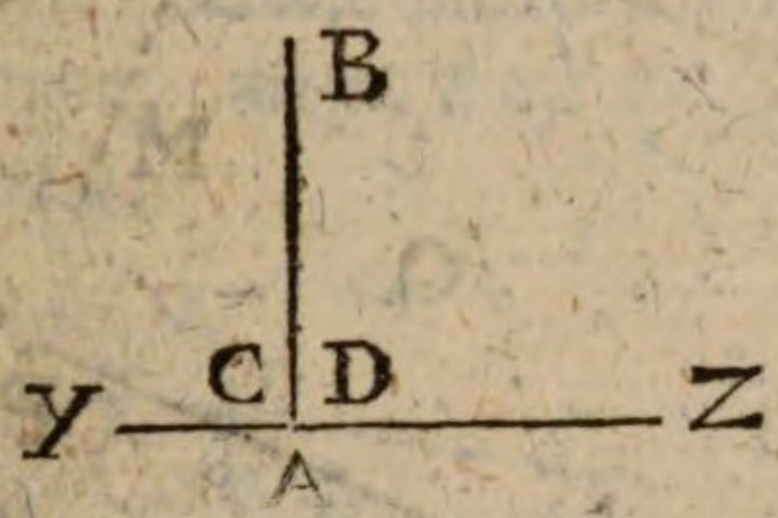
Auch, wenn mehrere gerade Linien, die auf der nemlichen Seite liegen, eine andere in einem Punkte zwischen ihren Enden erreichen, kann man alle entstehende Winkel mit den Namen der Nebenwinkel belegen, also sind *a*, *b*, *c* und *d* vier Nebenwinkel.

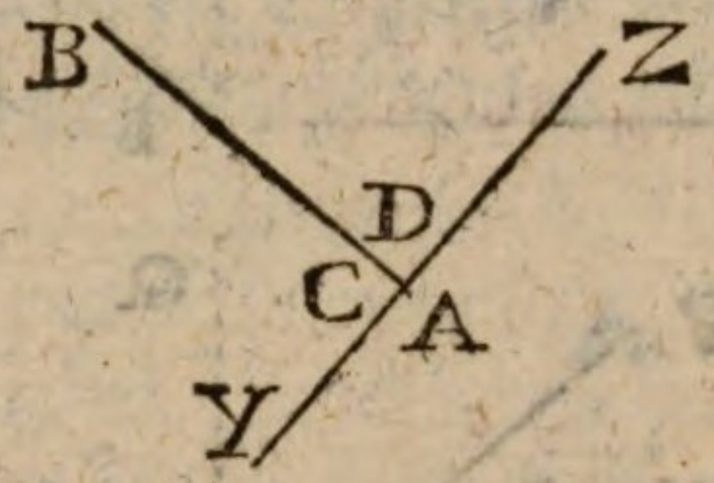


§. 13.

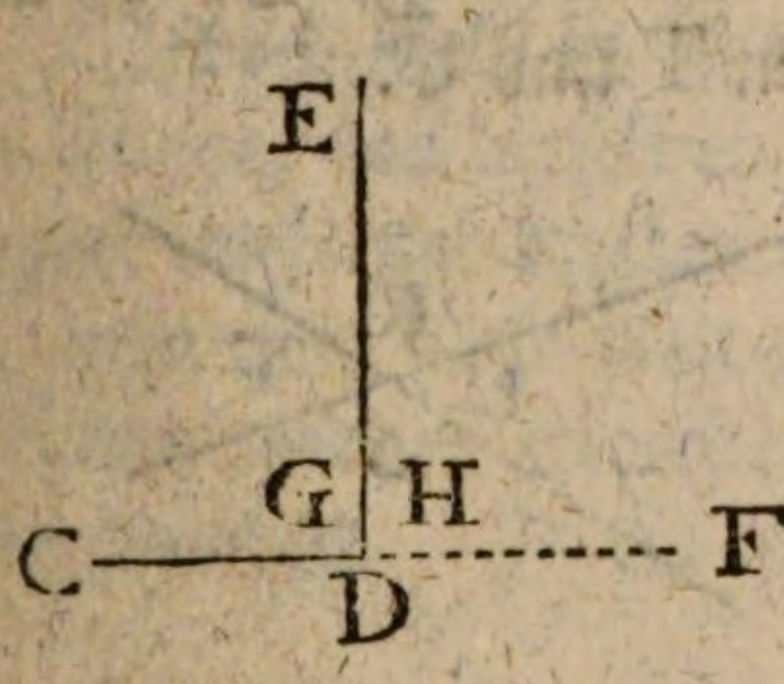
§. 13.

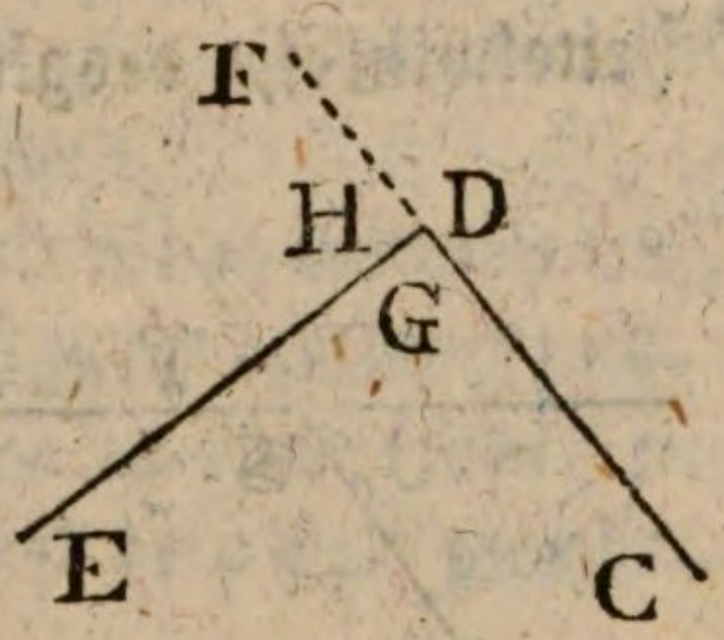
Wenn eine gerade Linie auf einer andern so stehet, daß sie mit derselben zwey gleiche Nebenwinkel bildet, so ist sie senkrecht oder perpendikular auf derselben, und jeder der beyden gleichen Winkel wird ein rechter Winkel genannt. Z. E. AB ist senkrecht auf YZ, und die Winkel C und D sind rechte.





Trift die eine Linie das Ende der andern, so darf man sich nur eine von beyden verlängert vorstellen, um zu urtheilen, ob beyde Nebenwinkel gleich werden, ob folglich die eine Linie auf der andern senkrecht stehet, und ob der Winkel ein rechter ist. Z. E. Es sey gegeben der Winkel G oder CDE. Es sey DF die Verlängerung der CD, und es werde gefunden, daß die Winkel H und G gleich sind, so ist G ein rechter Winkel, und DE senkrecht auf CD oder auf CF.



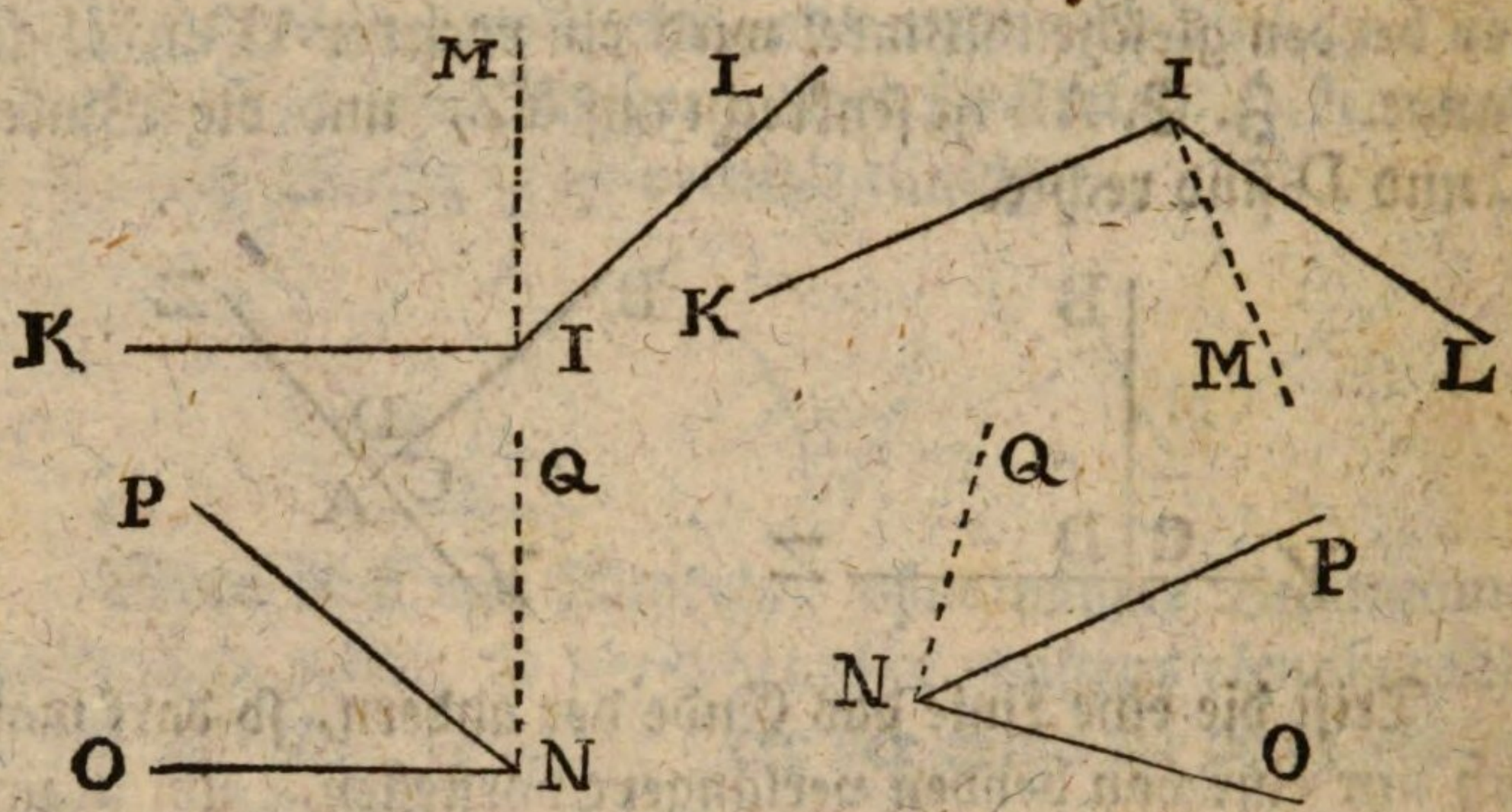


§. 14.

Jeder Winkel muß entweder ein rechter seyn oder nicht. Ist er nicht recht, so wird er ein schiefer Winkel genannt. In diesem Falle ist er nun entweder größer als ein rechter oder kleiner. Wenn er größer ist als ein rechter, so ist es ein stumpfer Winkel, wenn er kleiner ist, als ein rechter,

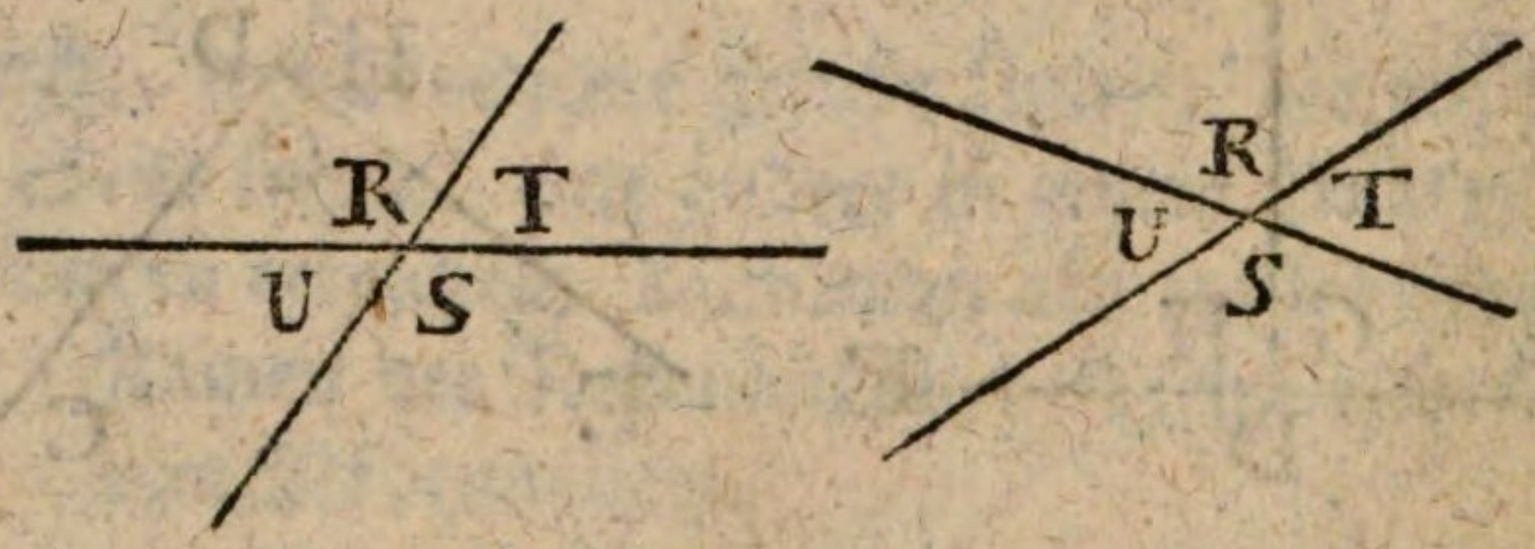
so ist es ein spitziger Winkel. und ONP sind beyde schief. größer ist als der rechte KIM. weil ONP kleiner ist als ONQ.

Z. E. Die Winkel KIL KiL ist stumpf, weil er Hingegen ist ONP spitzig,



§. 15.

Wenn zwey gerade Linien einander schneiden oder durchkreuzen, so entstehen vier Winkel, wovon zwey und zwey einander entgegen liegen und mit den Scheiteln zusammenstoßen. Zwey solche Winkel, die aus der Verlängerung der nemlichen Schenkel entstehen, werden Scheitelwinkel oder vertikale Winkel genannt. Z. E. R und S sind Scheitelwinkel, desgleichen T und U.

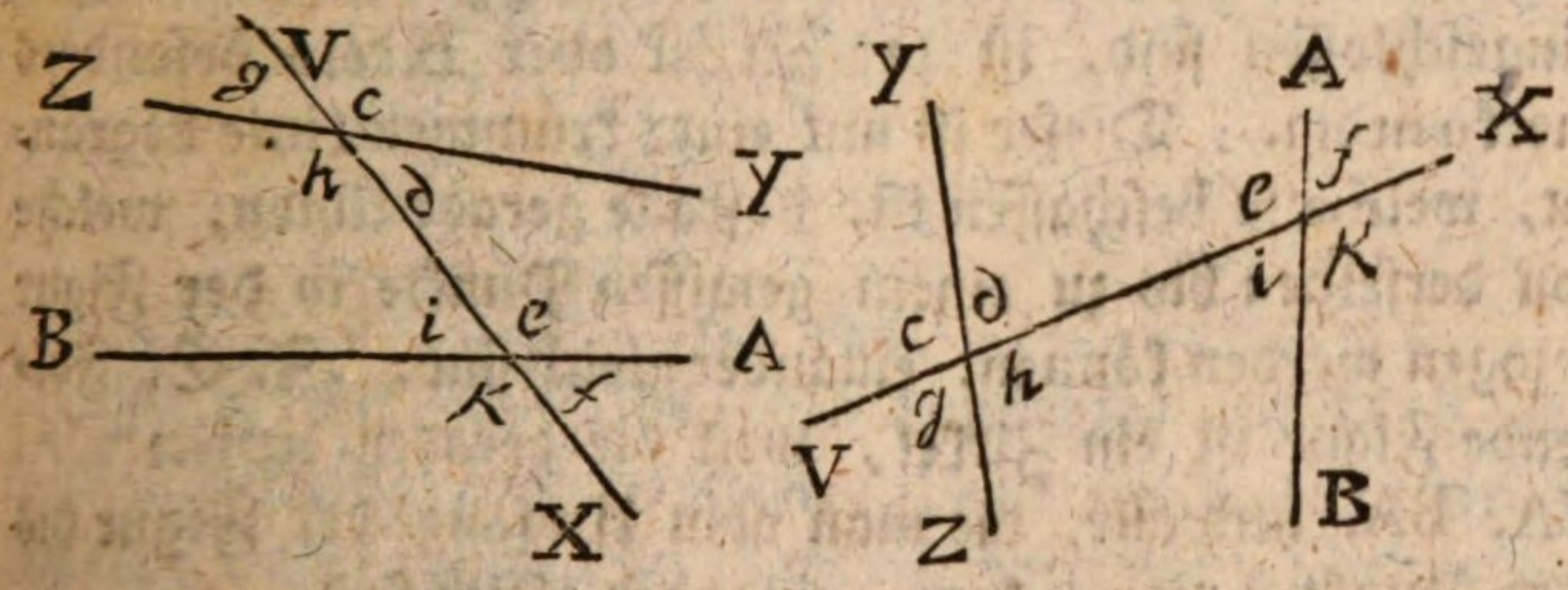


§. 16.

Wenn zwey gerade Linien als AB und YZ von einer dritten VX geschnitten werden, so entstehen 8 Winkel, nemlich 4 inwendige *h*, *d*, *i*, *e*, welche zwischen beyden geschrittenen Linien liegen, und vier auswendige, *g*, *c*, *k*, *f*, welche außerhalb des Zwischenraumes liegen.

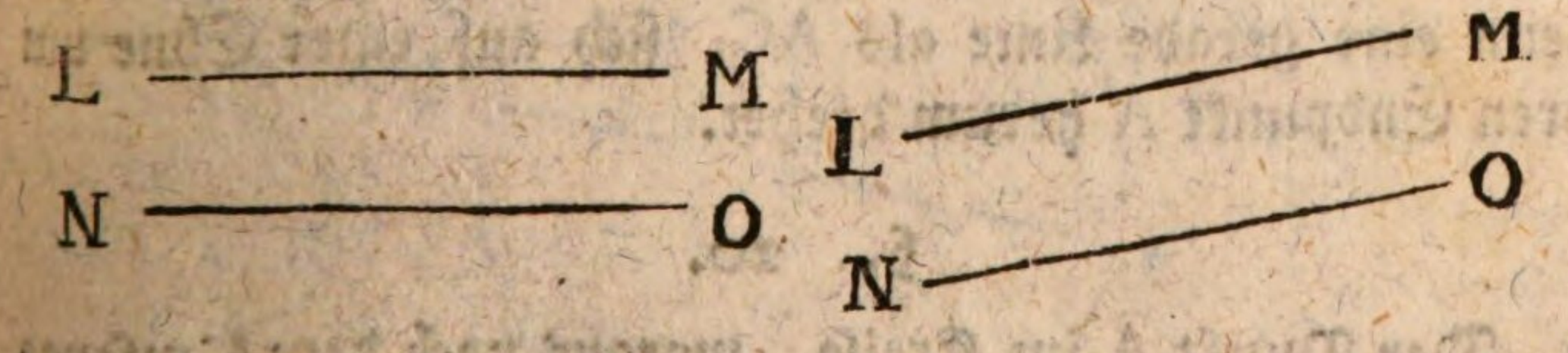
Alle diese Winkel sind ferner zwey und zwey homolog oder gleichliegend, als *c* und *e*, *d* und *f*, *g* und *i*, *h* und *k*. Dieses sind solche Winkel, die über einander zu liegen kommen würden, wenn man beyde geschnittene Linien an einander rückte.

Auch sind selbige acht Winkel zwey und zwey altern oder Wechselwinkel, nemlich *d* und i, *h* und *e*, *c* und *k*, *g* und *f*. Diese würden nur mit den Scheiteln an einander stoßen, wenn man beyde geschnittene Linien an einander rückte.



§. 17.

Wenn zwey gerade Linien auf einer Ebene liegen, so treffen sie meistens in einem Punkt zusammen, wenn sie genugsam verlängert werden, und bilden daher einen Winkel. Jedoch giebt es eine Lage zweyer gerader Linien auf einer Ebene, wo dieselben an allen Stellen gleich weit von einander entfernet bleiben, und nie zusammen treffen können, man mag sie so weit verlängern als man will. Solche Linien werden gleichlaufende Linien oder parallele Linien genannt. Z. E. ML und NO sind parallel.



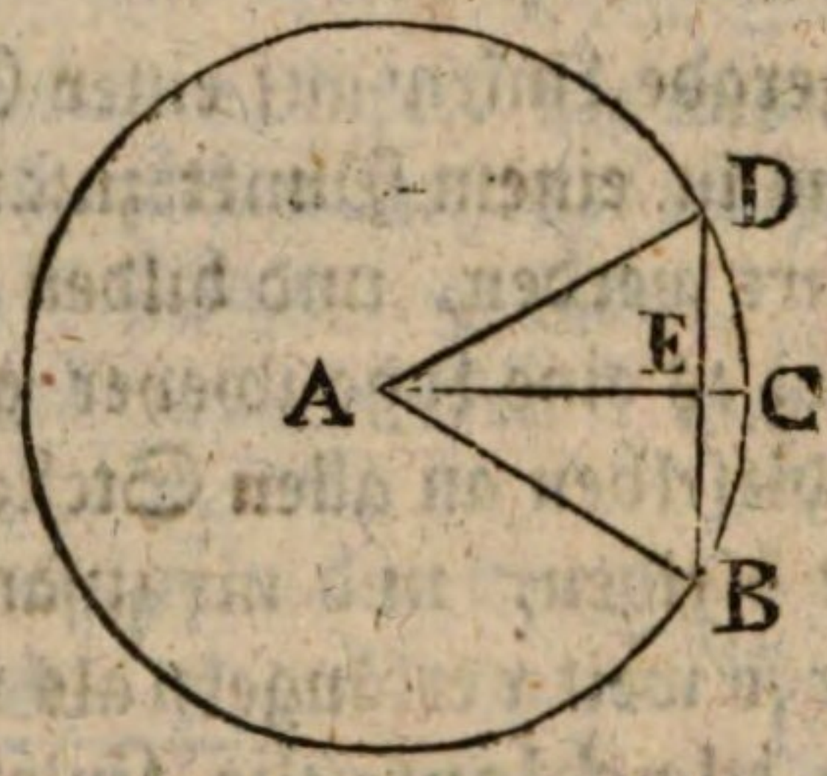
§. 18.

Die Beschaffenheit und Lage der Linien, welche die Ebenen begränzen, und die Winkel, welche von denselben

gebildet werden, bestimmen die Gestalt oder Figur solcher begränzter Ebenen. Ueberhaupt wird die Linie oder die Zusammensetzung von Linien, welche eine Ebene einschließet, der Umfang oder Perimeter derselben genannt. Solcher bestehet entweder aus einer einzigen krummen Linie, oder aus wenigstens drey geraden, oder aus geraden und krummen, wie schon im 8ten Absatze erkläret worden.

§. 19.

Unter allen Ebenen die in einer einzigen krummen Linie eingeschlossen sind, ist der Zirkel oder Kreis besonders merkwürdig. Dieser ist mit einer krummen Linie begränzet, welche so beschaffen ist, daß alle gerade Linien, welche von derselben bis zu einem gewissen Punkte in der Figur gezogen werden können, einander gleich sind. Z. E. Folgende Figur ist ein Zirkel, weil die geraden Linien DA, CA, BA, und alle, die man vom Umfange der Figur bis zum Punkt A ziehen kann, einander gleich sind.

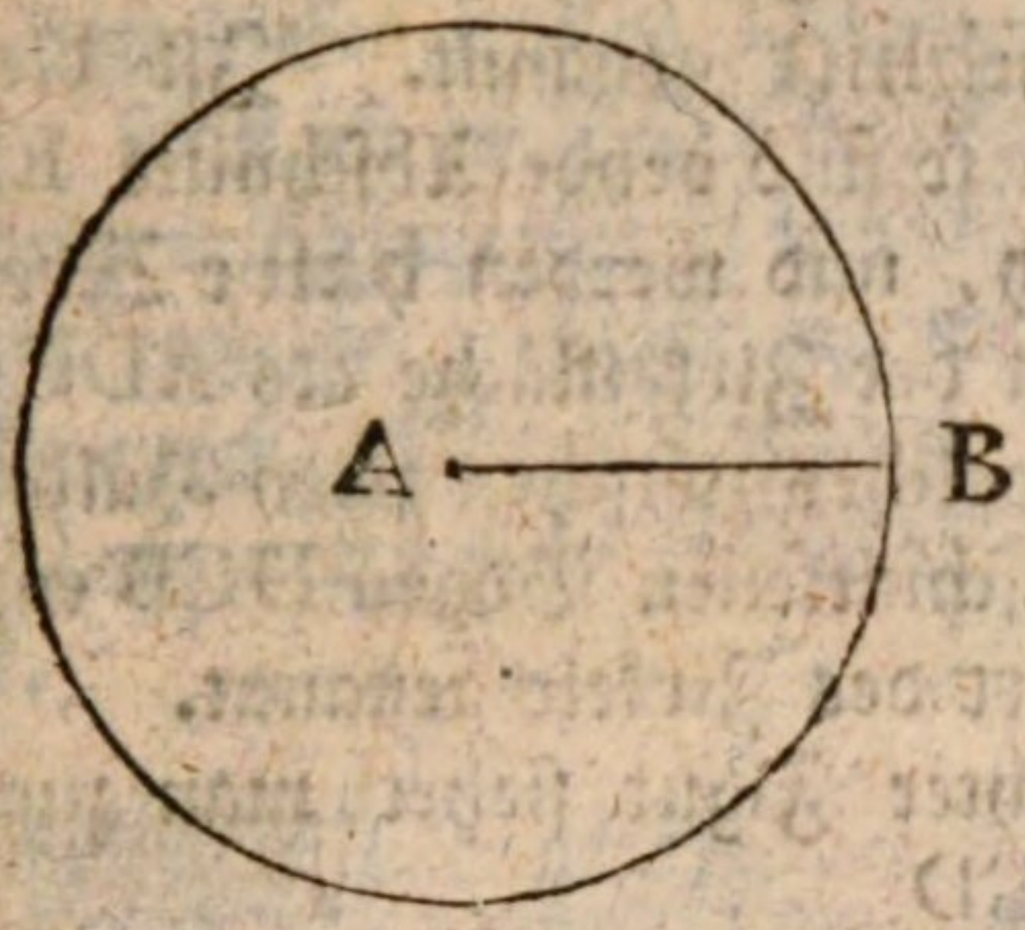


Man kann sich auch vorstellen, es entstehe ein Kreis, wenn eine gerade Linie als AC, sich auf einer Ebne um ihren Endpunkt A herum drehet.

§. 20.

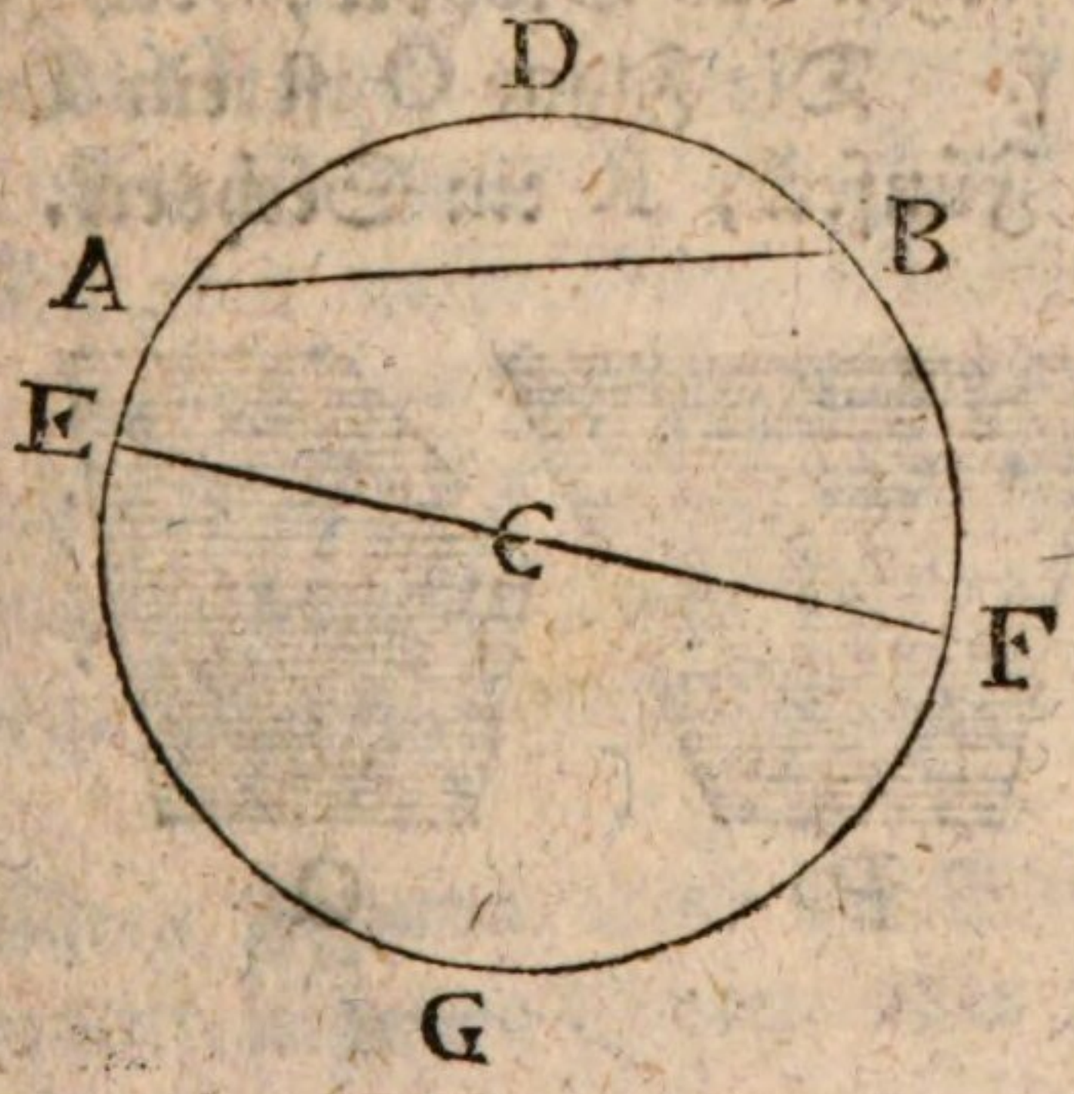
Der Punkt A im Kreise, woraus nach dem Umfange der Figur lauter gleiche gerade Linien gezogen werden können, heißt der Mittelpunkt, und jede vom Mittelpunkte bis

bis zum Umfange reichende gerade Linie als AB ist ein Halbmesser oder Radius. Der krumme Umfang wird der Umkreis oder die Peripherie oder die Zirkumferenz genannt.



§. 21.

Jeder beliebige Theil des Umkreises als ADB oder AEGFB ist ein Zirkelbogen. Jede gerade Linie als AB die ihre beyden Enden im Umkreise hat, ist die Sehne oder Subtensa beyder abgeschnittenen Bogen ADB und AEGFB. Gehet eine Sehne EF durch den Mittelpunkt C, so wird sie ein Durchmesser oder Diameter des Zirkels genannt. Alsdann sind beyde Bogen EDF und EGF wegen der Einförmigkeit der Figur, einander gleich, und werden halbe Umkreise genannt. Auch siehet man sogleich, daß ein Durchmesser EF aus zwey Halbmessern CF und CE bestehet.



§. 22.

Ein Stück der Zirkelfläche, als (in voriger Figur) ABDA oder ABFGEA, welches zwischen einer Sehne AB und deren Bogen ADB oder AEGFB enthalten ist, wird ein Abschnitt genannt. Ist die Sehne EF ein Durchmesser, so sind beyde Abschnitte EFDE und EFGE einander gleich, und werden halbe Kreise genannt.

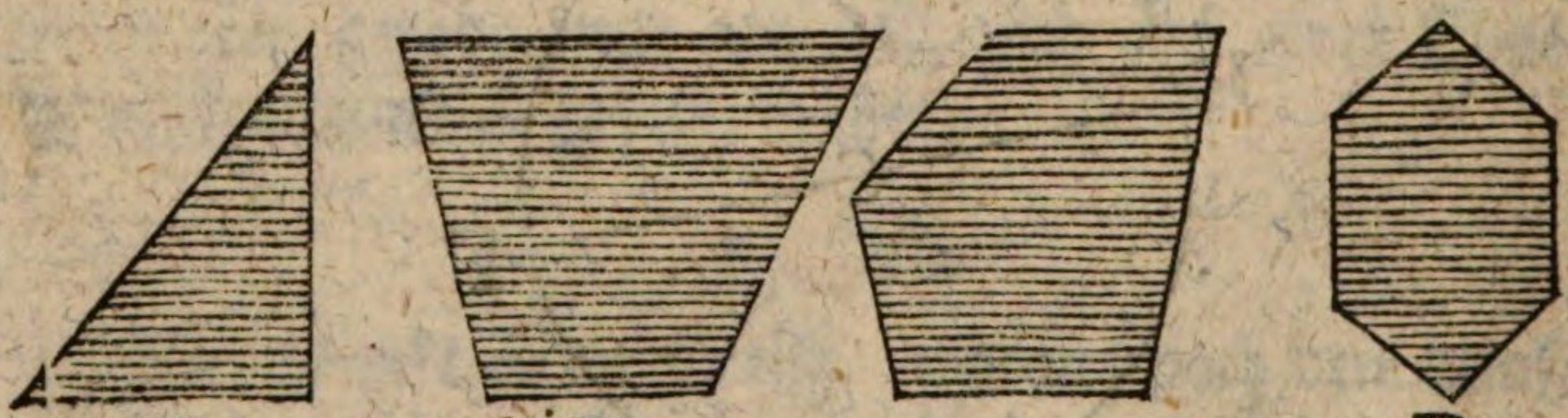
Ein Stück der Zirkelfläche als ADCBA (in der Figur bey §. 19.), welches zwischen zwey Halbmessern AD, AB, und dem abgeschnittenen Bogen DCB enthalten ist, wird ein Ausschnitt des Zirkels genannt.

In gedachter Figur siehet man zugleich einen Abschnitt DEBCD.

Auch ist zu merken, daß wenn man von der Zirkelfläche den Ausschnitt ADCBA wegnimmt, noch ein größerer Ausschnitt bleibet, der ebenfalls durch die Halbmesser AD und AB bestimmet wird.

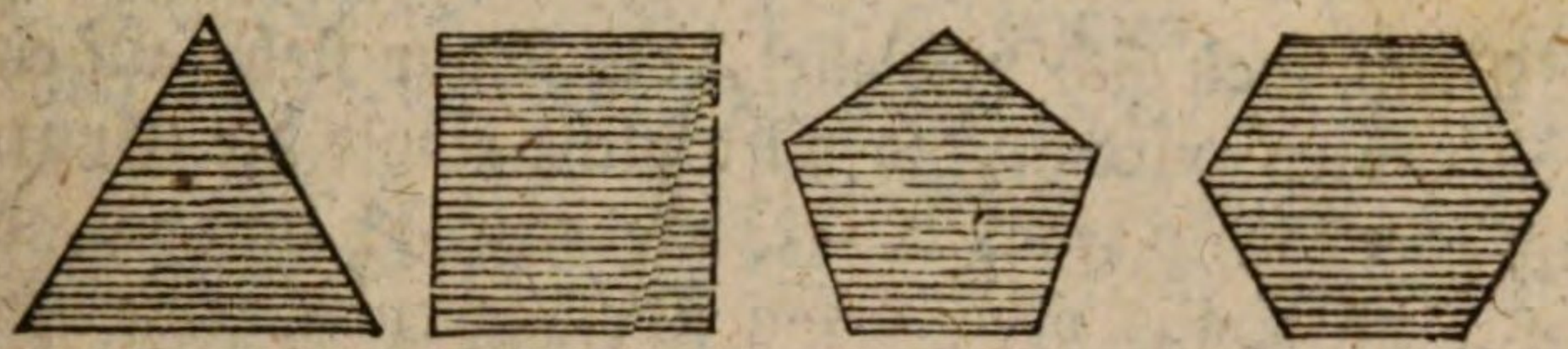
§. 23.

Geradlinichte Figuren bekommen ihre Namen von der Anzahl der Linien woraus ihr Umfang bestehet. Zwey gerade Linien können wohl einen Winkel bilden, aber keinen begränzten Raum einschließen. Daher ist das Dreyeck oder der Triangel die einfachste aller geradlinichten Figuren. Hierauf folgen das Viereck, das Fünfeck, das Sechseck u. s. f. Die Figur O ist ein Dreyeck, P ein Viereck, Q ein Fünfeck, R ein Sechseck.



§. 24.

Eine geradlinichte Figur wird **regulär** genannt, wenn alle Linien, von denen sie begränzet wird, einander gleich sind, und wenn sie auch lauter gleiche Winkel bilden. Wenn nun eine von diesen beyden Bedingungen, oder alle beyde fehlen, sonst ist die Figur **irregulär**. Z. E. die Figuren bey vorigem Absatzewaren irregulär abgebildet, folgende aber sind regulär. S ist ein regulåres oder gleichseitiges Dreyeck, T ein regulåres Viereck oder ein Quadrat, U ein reguåres Fünfeck, V ein regulåres Sechseck.



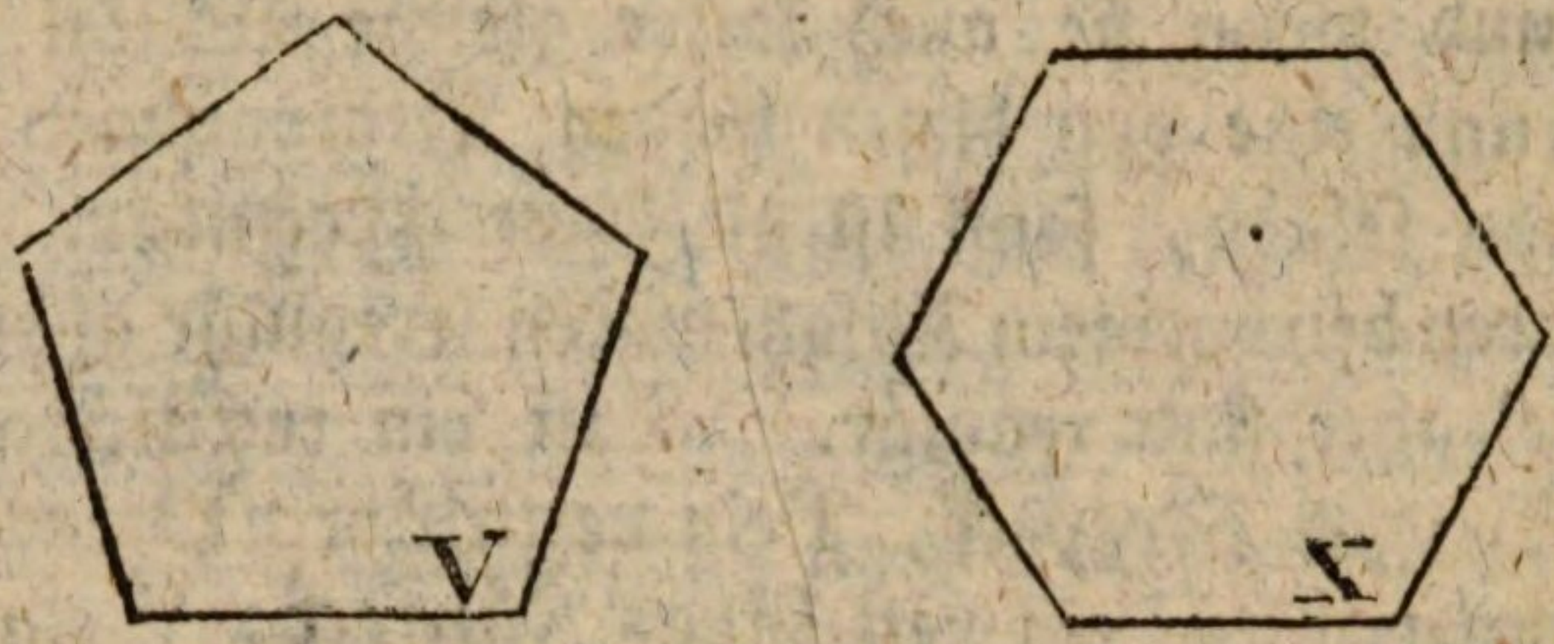
S T U V

§. 25.

Bey geradlinichten Figuren ist die Anzahl der Ecken oder Winkel allemal der Anzahl der begränzenden Linien gleich, weil jede Linie mit der folgenden eine Ecke bildet. Daher die Namen, welche sich auf die Anzahl der Winkel beziehen, auch zugleich die Anzahl der begränzenden Linien andeuten. Ueberhaupt wird eine Figur, in so fern sie von mehreren geraden Linien begränzet ist, die eben so viel Ecken bilden, ein **Vieleck**, oder **Polygon** genannt. Die begränzenden Linien pfleget man die **Seiten** des Vielecks zu nennen. Da aber dieses Wort oft zweydeutig ist, so wäre es wohl besser, wenn man das so gemeine Wort Kante gebrauchte. Dieses wäre dem Sprachgebrauche desto angemessener, da man im gemeinen Leben oft genug von **dreykantigen**, **vierkantigen** Figuren, u. s. f. reden höret.

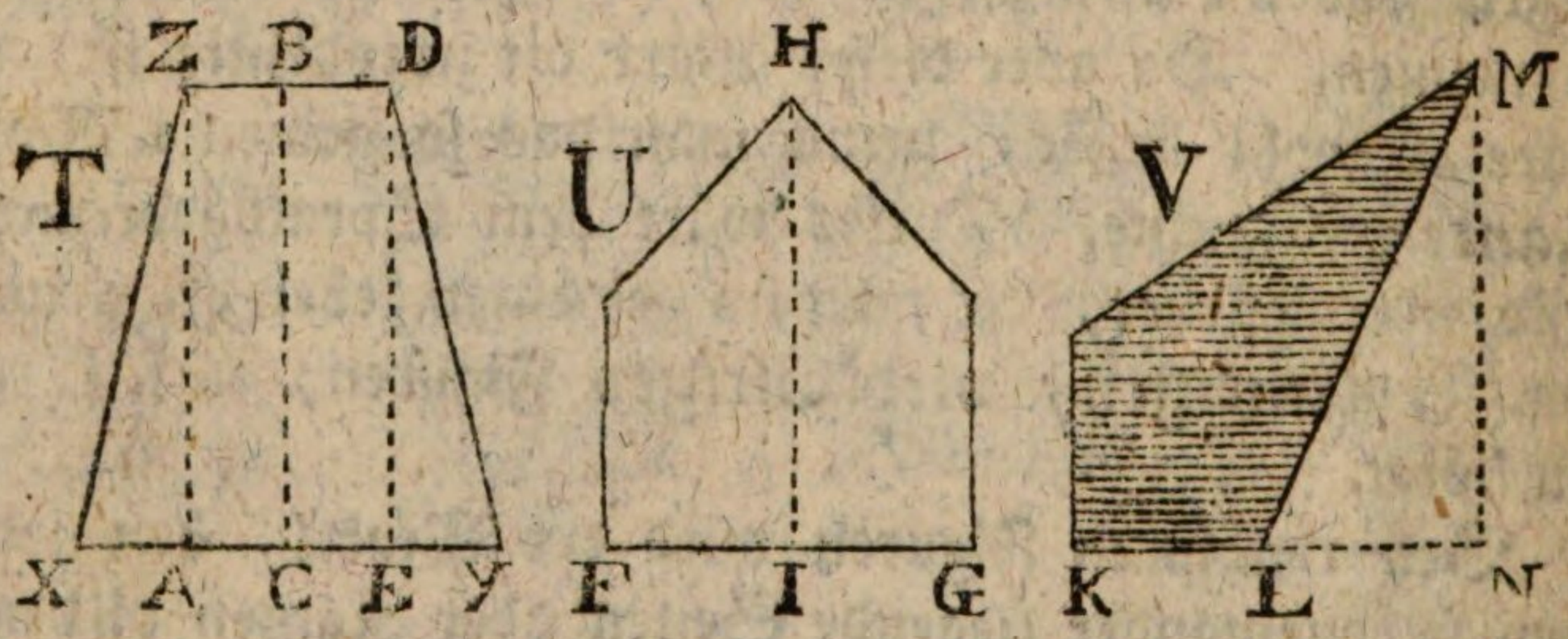
Bey regulären Figuren wird der Winkel, den jede zwey nebeneinander liegende Seiten oder Kanten bilden,

der Vielecks = Winkel oder Polygonal = Winkel genannt. Z. E. der Winkel V ist der Winkel des Fünfeck, X ist der Winkel des Sechsecks.



§. 26.

Wenn man sich vorstellet, die Figur stehe auf einer ihrer Kanten aufrecht, so wird solche Kante die Grundlinie oder Basis genannt. Stelet man sich nun vor, daß über diese Basis oder deren Verlängerung eine senkrechte Linie bis zum entferntesten Punkte der Figur gezogen wird, so bestimmet solche senkrechte Linie die Höhe der Figur. Wenn die Figur so beschaffen ist, daß der Grundlinie gegenüber eine mit derselben parallele Kante ist, welche von der Grundlinie am meisten entfernet ist, so kann die senkrechte Höhe aus jedem Punkte der parallelen Kante bis zur Grundlinie gezogen werden. Z. E. in der Figur U ist die Grundlinie FG, und die Höhe HI. In der Figur V ist die Grundlinie KL, deren Verlängerung LN, und die Höhe der Figur MN. In der Figur T ist die Grundlinie XY, und die Höhe BC, oder ZA, oder DE.

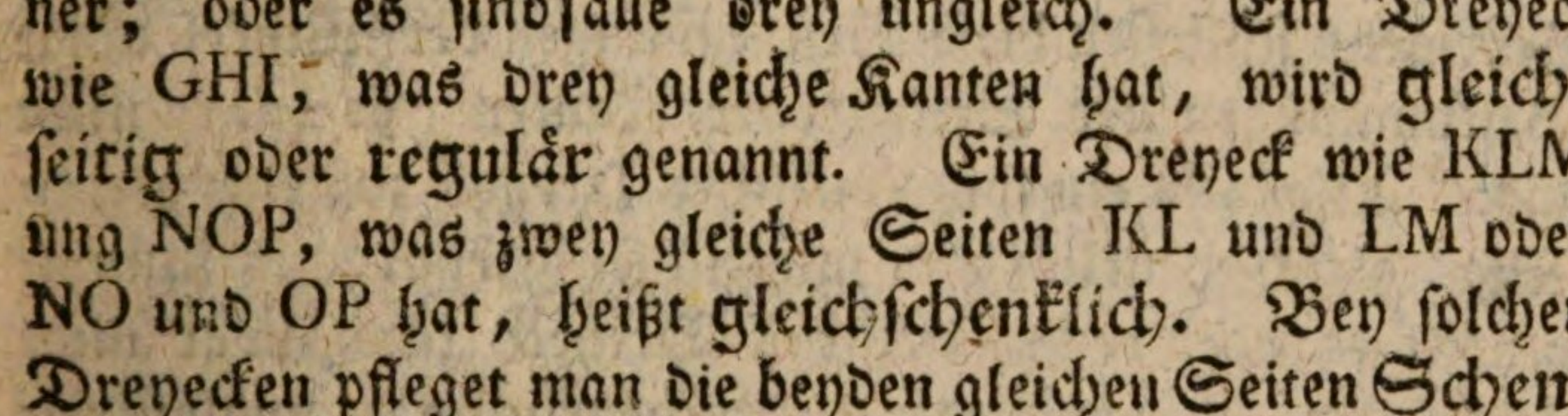


Uebri=

Uebrigens ist es ganz willkührlich, welche Kante man zur Grundlinie annehmen will. Eine andere Grundlinie giebt meistens auch eine andere Höhe. Die Umstände einer Aufgabe und die Bequemlichkeit des Beweises müssen entscheiden, ob man die eine oder andere Kante der Figur als Grundlinie betrachten will.

§. 27.

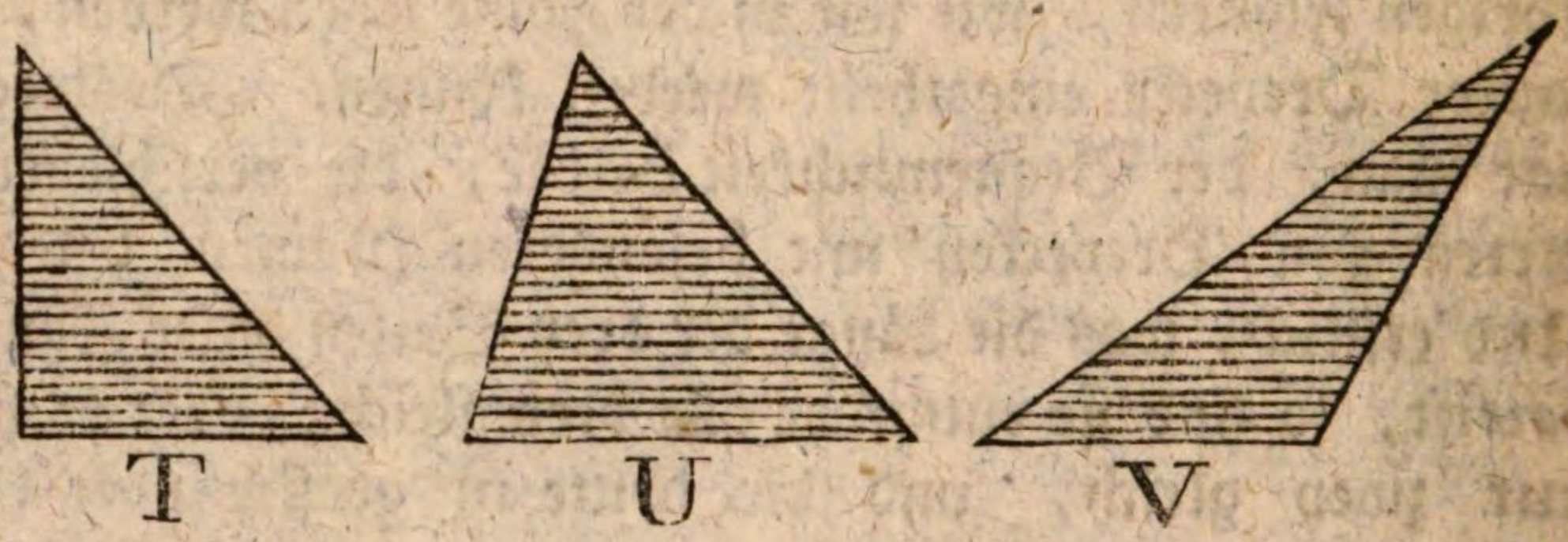
Von allen geradlinichten Figuren verdienet das Dreyeck am mehrsten gekannt und betrachtet zu werden, weil alle übrigen Figuren, wie wir in der Folge sehen werden, in lauter Dreyecke eingetheilt werden können. Deswegen hat man, der Bequemlichkeit halber, die verschiedenen Arten von Dreyecken mit besonderen Namen beleget. Und erstlich, was die Länge der drey Seiten oder Kanten betrift, so sind sie entweder alle drey gleich; oder es sind nur zwey gleich, und die dritte ist größer oder kleiner; oder es sind alle drey ungleich. Ein Dreyeck wie GHI, was drey gleiche Kanten hat, wird gleichseitig oder regulär genannt. Ein Dreyeck wie KLM ung NOP, was zwey gleiche Seiten KL und LM oder NO und OP hat, heißt gleichschenklich. Bey solchen Dreyecken pfleget man die beyden gleichen Seiten Schenkel zu nennen, die dritte Seite wird meistens als die Grundlinie betrachtet, worauf die Schenkel stehen. Ein Dreyeck wie QRS, wo die drey Seiten ungleich sind, wird deswegen ungleichseitig genannt.



§. 28.

§. 28.

Was die Winkel anbelanget, so wird in der Folge bewiesen werden, daß jedes Dreyeck nothwendig zwey spitzige Winkel haben muß, daß aber der dritte Winkel entweder ein spitziger, oder ein stumpfer, oder ein rechter seyn kann. Wenn ein Dreyeck, als U, lauter spitzige Winkel hat, so wird es derohalben spitzwinklich genannt. Wenn ein Winkel stumpf ist, als im Dreyecke V, so ist das Dreyeck stumpfwinklich. Wenn ein Winkel recht ist, als im Dreyecke T, so ist das Dreyeck rechtwinklich.



T U V

Uebrigens schließen diese Bestimmungen der Winkel obige Bestimmungen der Seiten oder Kanten (§. 27.) nicht aus. Also kann ein spitzwinkliches Dreyeck zugleich gleichseitig, gleichschenklich oder ungleichseitig seyn. Ein stumpfwinkliches oder rechtwinkliches Dreyeck kann zwar nicht gleichseitig, aber entweder gleichschenklich oder ungleichseitig seyn, wie man oft in der Folge sehen wird.

Ein Dreyeck was nicht rechtwinklich ist, pfleget man auch überhaupt schiefwinklich zu nennen, es mag nun entweder spitzwinklich oder stumpfwinklich seyn.

§. 29.

Nach dem Dreyecke sind die viereckigten Figuren am einfachsten. Unter denselben sind besonders die **Parallelogrammen** merkwürdig. Ein Parallelogramm ist eine viereckigte Figur, wo die gegenüberstehenden Kanten oder Seiten parallel sind. Sind die Winkel des Parallelogramms schief, so wird es ein **Rhomboides** genannt.

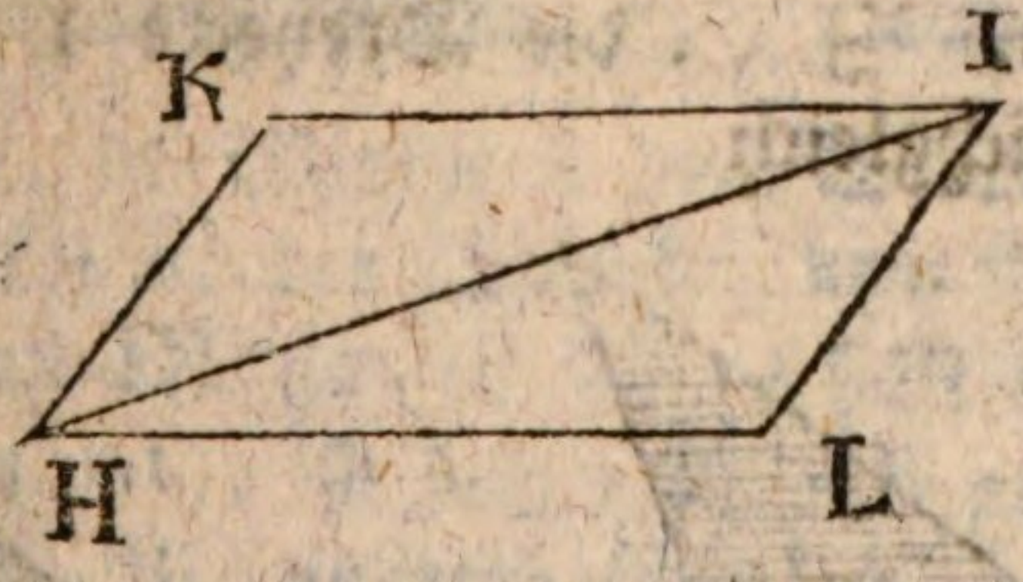
Sind

Sind dabey die vier Seiten gleich, so wird aus dem Rhomboïdes ein Rhombus oder eine Raute. Sind die Winkel recht, so heißt das Parallelogramm ein Rektangel oder ein Rechteck. Sind zugleich die Winkel recht, und die vier Seiten gleich, so wird aus dem Rektangel ein Quadrat oder reguläres Viereck. Unter folgenden Figuren ist A ein Rhomboïdes, B ein Rhombus, C ein Rektangel, D ein Quadrat.

Wenn beyde Paare der gegenüberstehenden Seiten nicht parallel sind, so wird die Figur ein unreguläres Viereck oder ein Trapezium genannt. Doch verstehen einige Schriftsteller unter dem Worte Trapezium eine viereckigte Figur, welche ein Paar parallele Seiten hat, wie die viereckigte Figur bey §. 23.

§. 30.

Die Diagonal-Linie oder Querlinie in einer viereckigten Figur ist eine gerade Linie, die aus dem Scheitel eines Winkels zum Scheitel des gegenüberstehenden Winkels gehet. Z. E. HI ist eine Diagonal-Linie des Rhomboïdes HKIL.

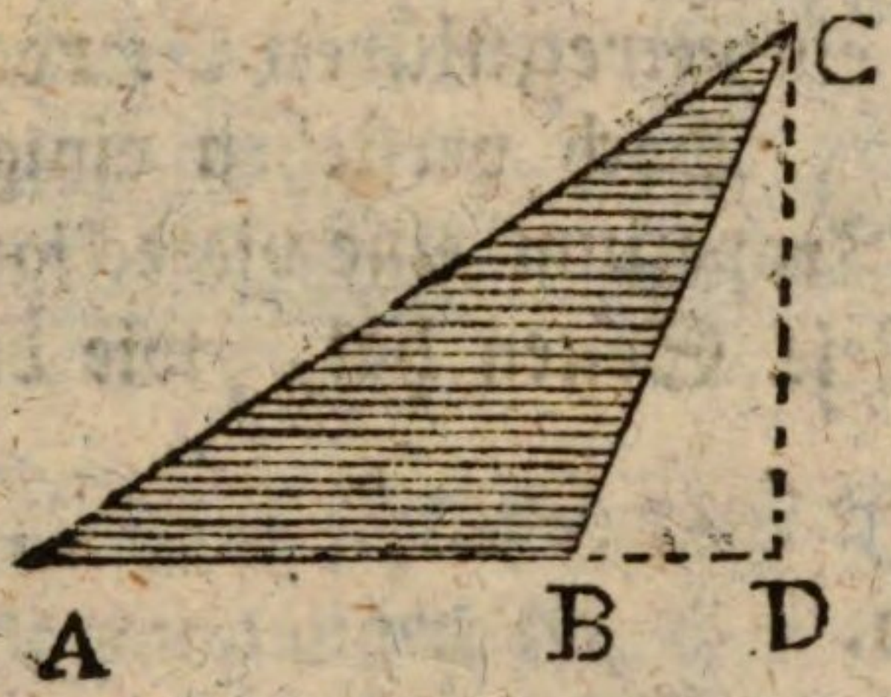


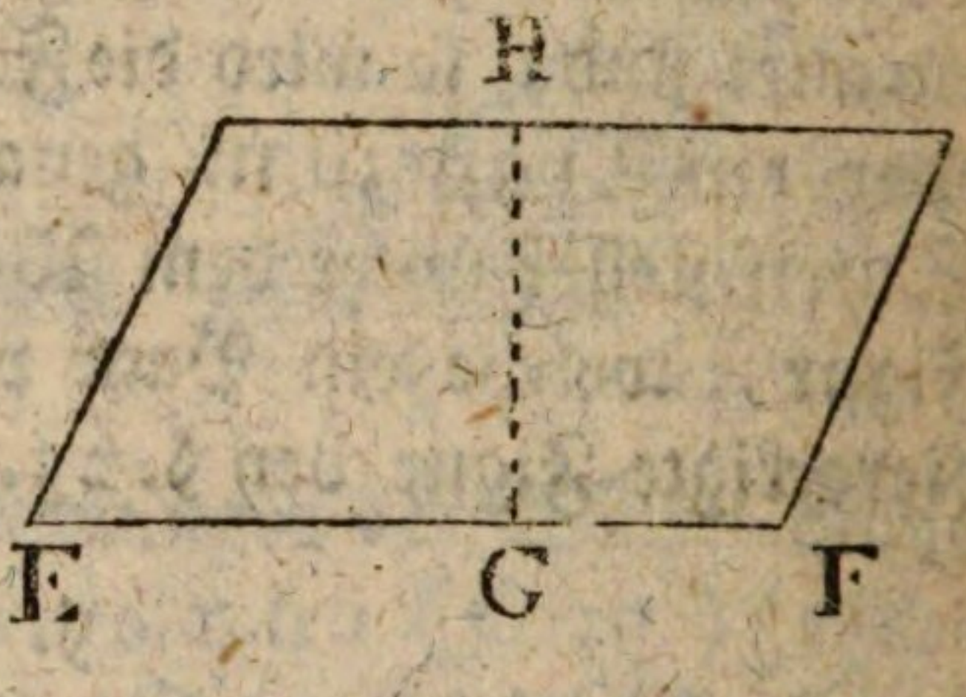
Ueberhaupt pfleget man in einer geradlinichten Figur, jede gerade Linie, die von einer Ecke zu einer andern gehet, eine Diagonal-Linie zu nennen.

Man merke bey dieser Gelegenheit, daß man nicht allemal vier Buchstaben brauchet um ein Parallelogramm anzuzeigen, sondern nur zwey, die an den Enden einer eingebildeten Diagonal-Linie stehen. Letztes Parallelogramm hätte man können das Parallegramm KL nennen.

§. 31.

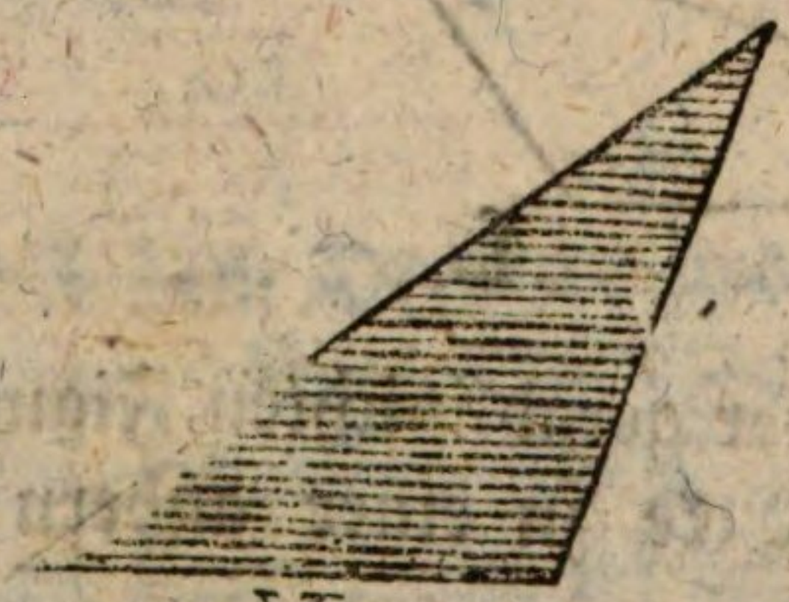
Was im 26ten Abschnitte überhaupt von der Grundlinie und der Höhe der Figuren gesagt worden, läßt sich sehr leicht auf Triangel und Parallelogramme anwenden. Es sey AB die Grundlinie des Dreyecks ACB, so ist CD die Höhe, nachdem AB verlängert worden. Es sey FF die Grundlinie des Parallelogramms, so ist HG die Höhe.

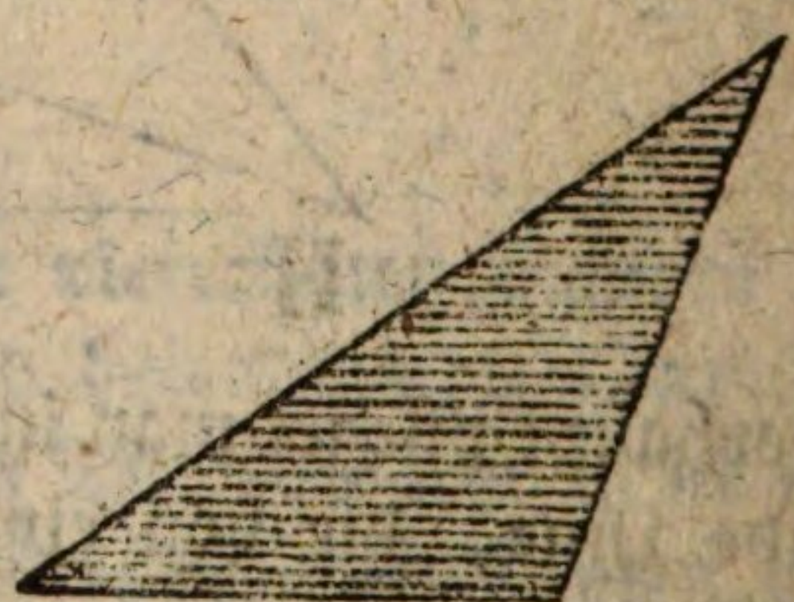




§. 32.

Aehnlichgleiche oder identische Figuren, sind solche die weiter keinen Unterschied haben, als daß sie an verschiedenen Stellen stehen, so daß sie, wenn sie geradlinicht sind, die nemlichen Seiten und auch die nemlichen Winkel haben. Z. E. die Dreyecke Y und Z sind identisch oder ähnlichgleich.





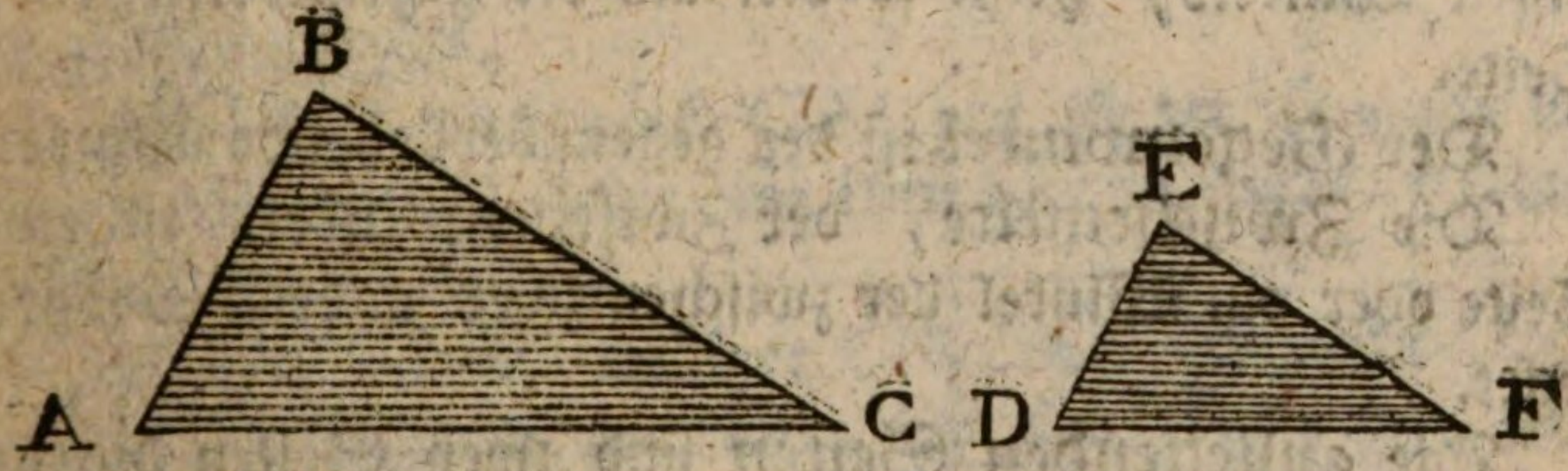
Die

Die Lage der ähnlichgleichen Figuren braucht eben nicht der nemliche zu seyn. Z. E. wenn man das Dreyeck Z umkehrte, so würde es deswegen nicht aufhören mit Y ähnlichgleich zu seyn.

Uebrigens muß man ähnlichgleiche Figuren nicht mit bloß gleichen verwechseln. Denn gleiche Figuren sind eigentlich solche, deren Ebnen oder Flächen von gleicher Größe sind, wobey sie dennoch von sehr verschiedener Gestalt seyn können, wie wir in der Folge sehen werden.

§. 33.

Aehnliche Figuren sind solche, die die nemliche Gestalt haben, oder auf der nemlichen Art entstanden sind, aber von ungleicher Größe sind. Z. E. alle Kreise sind ähnliche Figuren, ob sie gleich von verschiedener Größe sind. Bei geradlinichten Figuren erkennet man die Aehnlichkeit zweyer Figuren daran, daß in beyden die nemlichen Winkel anzutreffen sind, und daß die in beyden Figuren zwischen gleichen Winkeln liegenden Seiten, allemal einerley Verhältniß haben, Z. E. wenn in beyden Dreyecken



ABC und DEF, der Winkel A dem Winkel D, der Winkel B dem Winkel E, der Winkel C dem Winkel F, gleich sind, und wenn DE sich zu AB verhält wie EF zu BC, und wie DF zu AC, so daß z. E. AB anderthalbmal so groß sey als DE, BC anderthalbmal so groß als EF, AC anderthalbmal so groß als DF; so sind beyde Dreyecke ähnlich.

Man wird in der Folge sehen, daß bey Dreyecken die Proporzionalität der Seiten schon aus der Gleichheit

der Winkel fließet, und daß zwey Dreyecke für ähnlich gehalten werden müssen, so bald sie die nemlichen Winkel haben. Bey andern Figuren findet dieses nicht Statt.

§. 34.

Bey ähnlichgleichen oder ähnlichen Figuren, heißen die Theile welche in der einen so gelegen und bestimmet sind wie in der anderen homologe Theile. Die homologen Winkel zweyer ähnlichgleichen oder ähnlichen Figuren sind also diejenigen, welche beyderseits gleich und in Betrachtung der übrigen Figur in gleicher Lage sind. Die homologen Seiten sind diejenigen, welche beyderseits zwischen den nemlichen Winkeln liegen, oder überhaupt in Betrachtung der ganzen Figur eine ähnliche Lage haben.

§. 35.

Um die Lage der Seiten und Winkel in einer Figur zu bestimmen, kann man sich, der Kürze halber, folgender Ausdrücke bedienen:

Die Gegenseite einer gewissen Seite oder eines gewissen Winkels, heißt so viel als die gegenüberstehende Seite.

Der Gegenwinkel ist der gegenüberstehende Winkel.

Die Zwischenseite, der Zwischenwinkel, ist eine Seite oder ein Winkel der zwischen zwey andern Größen lieget.

Die anliegenden Seiten sind zwey Seiten die an einem Winkel liegen und zugleich dessen Schenkel sind.

Die anliegenden Winkel sind zwey Winkel die an den Enden einer Seite liegen, so daß sie ein gemeinschaftlicher Schenkel derselben ist.

§. 36.

Obige Erklärungen können fürs erste zureichend seyn, um dem Anfänger einen Begriff von den Gegenständen zu geben, wovon in den ersten Anfangsgründen

der

der Geometrie gehandelt wird. Um nun alle Weitläuftigkeit so viel als möglich zu vermeiden, pflegen die Mathematiker, anstatt der Wörter gewisse Zeichen zu gebrauchen, welche die nemliche Bedeutung haben. Folgende mögen zum Beyspiele dienen.

$\angle A$, $\angle ABC$ heißt der Winkel A, der Winkel ABC.

$\triangle ABC$, heißt, das Dreyeck ABC.

$\square ABCD$, $\square AC$, das Parallelogramm ABCD, das Parallelogramm AC.

$\square ABCD$, $\square AC$, das Quadrat ABCD, das Quadrat AC.

$AB\square$ oder $(AB)^q$ oder $(AB)^2$ das Quadrat von AB, das ist, ein Quadrat was die Linie AB zur Grundlinie hat.

$AB = CD$, die Linie AB ist der CD gleich, oder die CD ist der AB gleich.

$AB \backsim B$, die Figur A ist der Figur B ähnlich, oder B ist der A ähnlich.

$A \overset{\backsim}{=} B$, die Figuren A und B sind ähnlichgleich.

$AB > CD$, die Linie AB ist größer als CD, oder CD ist kleiner als AB.

$AB < CD$, die Linie AB ist kleiner als CD, oder CD ist größer als AB.

$AB + CD$, AB plus CD, das ist die Summe der Linien AB und CD, oder eine Linie die aus beyden AB und CD zusammengesetzt ist.

$AB - CD$, AB weniger CD, oder AB minus CD, das ist die Differenz der Linien AB und CD, oder, was übrig bleibet, nachdem die CD von der AB abgenommen worden.

$AB.CD.$ oder $AB \times CD$, das Rektangel aus AB und CD, oder ein Rektangel, welches die Grundlinie AB und die Höhe CD, oder die Grundlinie CD und die Höhe AB hat.

$AB : CD$ oder $\frac{AB}{CD}$, das Verhältniß der Linien AB und CD, das ist die Zahl die da anzeiget wie vielmal die AB

größer oder kleiner ist als CD, oder wie vielmal die eine Linie in der andern enthalten ist.

$AB : CD = EF : GH$ oder $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$ oder $\frac{CD}{AB} = \frac{GH}{EF}$,

oder AB, CD : : EF, GH. wird gelesen, AB verhält sich zu CD, wie EF zu GH, das heist, so vielmal AD größer oder kleiner ist als CD, so vielmal ist auch EF größer oder kleiner als GH.

Die algebraischen Zeichen, welche wir hier bloß auf Linien angewandt haben, lassen sich ebenfalls bey andern Arten von Größen, als bey Winkeln und Flächen gebrauchen.

Wir werden überhaupt in der Folge sehen, wie sich die arithmetischen und algebraischen Operazionen, sammt ihren Zeichen, auf geometrische Größen anwenden lassen.

§. 37.

Unter den Lehrsätzen oder Wahrheiten der Geometrie, giebt es einige die an sich selbst so klar und begreiflich sind, daß sie keines Beweises bedürfen, sondern daß vielmehr aus denselben die Beweise der übrigen hergeleitet werden können. Man nennet sie Axiome, Grundsätze, Grundwahrheiten. Dergleichen sind folgende:

1) Wenn zwey oder mehrere Linien, Winkel oder Ebnen so beschaffen sind, daß sie genau einander decken, wenn man sie übereinander leget, so sind sie ähnlichgleich, und wenn sie ähnlichgleich sind, so decken sie einander. Man merke hierbey, daß bloß gleiche Figuren, wenn sie nicht ähnlich sind, einander nicht decken. (§. 32.)

2) Winkel sind gleich, wenn sie in der Gegend ihrer Scheitel einander decken, obgleich die Schenkel von verschiedener Länge sind. Denn da es bey Winkeln nur bloß auf die Neigung der Linien ankömmt, so kömmt die Länge der Schenkel gar nicht in Betrachtung.

3) Alle rechte Winkel sind gleich.

4) Zwey

4) Zwey gerade Linien können keinen Raum einschließen. (§. 23.)

§. 38.

Außer diesen Grundsätzen, die der Geometrie eigenthümlich gehören, setzet man noch alle diejenigen Wahrheiten als bekannt voraus, welche den Größen überhaupt zukommen, und in der Algebra angeführt oder bewiesen werden. Dergleichen sind folgende:

1) Jede Größe ist sich selbst gleich, z. E. $A = A$.

2) Wenn zwey Größen gleich sind, so kann allemal die eine anstatt der andern gesetzt werden, in so fern es nicht auf die Gestalt der Größen ankömmt. Z. E. wenn $A + B = C$, und es ist eine Größe $D = B$, so kann man schließen $A + D = C$.

3) Wenn zwey oder mehrere Größen, jede einer gewissen Größe gleich sind, so sind sie auch untereinander gleich. Wenn $A = B$ und $C = B$, so folget das $A = C$. Wenn $A = B$, $C = B$, $D = B$, so folget, daß A, C und D gleich sind.

4) Wenn von verschiedenen Größen die erste der zweyten gleich ist, die zweyte der dritten, die dritte der vierten, u. s. f. so sind sie alle gleich. Wenn also $A = B$, $B = C$, $C = D$, $D = E$, so sind A, B, C, D und E alle gleich, welches folgendermaßen ausgedrückt wird: $A = B = C = D = E$.

5) Wenn zu gleichen Größen gleiche Größen zugesetzet, oder wenn von gleichen Größen gleiche abgenommen werden, so entstehen wiederum gleiche Größen. Z. E.

zu	$A = B$	von	$A = B$
setze hinzu	$C = D$	nimm ab	$C = D$
so wird	$A + C = B + D$	so bleibet	$A - C = B - D$

6) Wenn zwey Größen gleich sind, so ist ihr Doppeltes, Dreyfaches, Vierfaches, u. s. f. gleich. Eben-

falls ist alsdann die Hälfte, der dritte Theil oder vierte Theil, u. s. f. beyder Größen gleich:

Wenn	A	=	B	Wenn	A = B
so ist	2A	=	2B	so ist	$\frac{1}{2}$A = $\frac{1}{2}$B
	3A	=	3B		$\frac{1}{3}$A = $\frac{1}{3}$B
	4A	=	4B		$\frac{1}{4}$A = $\frac{1}{4}$B
	etc.		etc.		etc. etc.

7) Wenn zu ungleichen Größen gleiche Größen, oder zu gleichen ungleiche hinzugethan werden, so entstehn ungleiche Größen.

Wenn	A	▷	B	Wenn	A	=	B
und	C	=	D	und	C	◁	D
so ist	(A+C)	▷	(B+D)	so ist	(A+C)	◁	(B+D)

8) Wenn von ungleichen Größen, gleiche Größen, oder von gleichen Größen ungleiche abgenommen werden, so entstehen ungleiche Größen. Im letzten Falle bleibet am meisten übrig, wo am wenigsten abgenommen worden.

Wenn	A	◁	B	Wenn	A	=	B
und	C	=	D	und	C	>	D
so ist	(A—C)	◁	(B—D)	so ist	(A—C)	◁	(B—D)

9) Das Ganze ist seinen zusammengenommenen Theilen gleich. Sind also AB, BC, CD, DE die Theile einer Linie, und die ganze Linie ist AE, so ist AE = AB + BC + CD + DE.

10) Das Ganze ist größer als jeder seiner Theile, oder als die Summe einiger Theile (nicht aller). Im vorigen Falle ist also AH ▷ AB, AH ▷ BC, AH > CD, AH > DE, AH ▷ (AB+BC), AH > (CD+DE), u. s. f.

Aus diesen Grundsätzen fließen verschiedene Lehrsätze und Operazionen, wodurch die Größen verglichen, verbunden, getrennt werden, u. s. f. Solche Lehrsätze werden in der Algebra entwickelt, und da wir in diesem Werke nicht die Lehre von den Größen überhaupt, sondern von

der

der Größe der Körper oder des Raumes insbesondere abhandeln wollen, so müssen wir uns einen Leser denken, der schon mit den vornehmsten Sätzen der Algebra bekannt ist. Hauptsächlich muß einer, der die Geometrie lernen will, die Lehre von den geometrischen Proportionen wohl gefaßt haben. Was nicht so allgemein bekannt ist, wollen wir in diesem Buche bey Gelegenheit erläutern.

§. 39.

Unter den Aufgaben der Geometrie giebt es einige wenige, die bey den übrigen als möglich vorausgesetzet werden, die aber nicht anders als auf einer mechanischen Art, das ist, mit Instrumenten oder Werkzeugen aufgelöset werden können. Die unentbehrlichsten sind folgende:

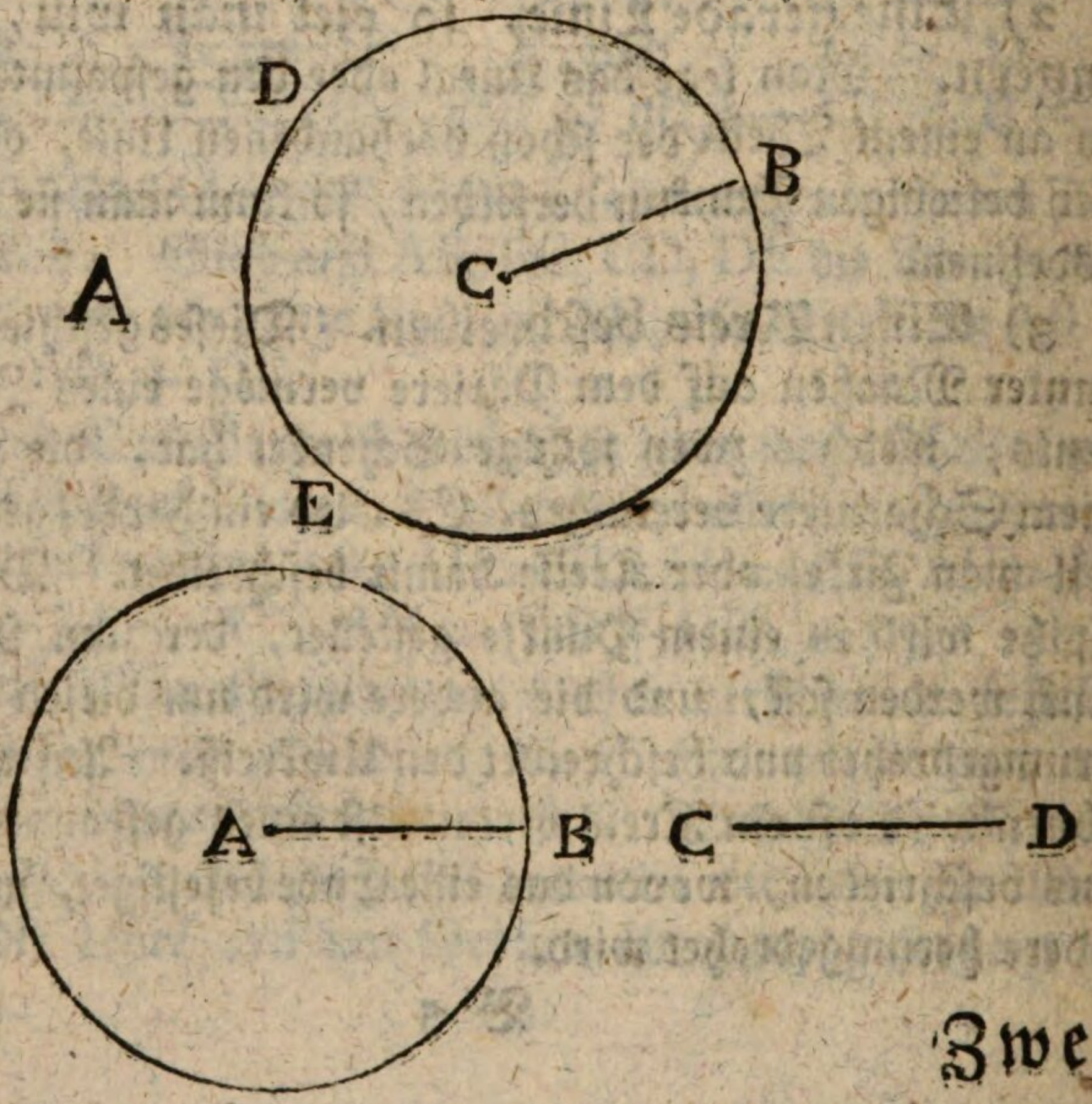
1) Eine gerade Linie ziehen. Dieses geschiehet bekannter Maaßen auf dem Papiere vermittelst eines Lineals, auf anderen Ebnen aber vermittelst eines gespannten Fadens. Sind zwey Punkte gegeben, wo die Linie durchgehen soll, so wird das Lineal oder der Faden an solchen Punkten genau angeleget.

2) Eine gerade Linie, so viel man will, verlängern. Man lege das Lineal oder den gespannten Faden an einem Theile der schon vorhandenen Linie, oder an zwey beliebigen Punkten derselben, so kann man sie weiter ausdehnen.

3) Einen Kreis beschreiben. Dieses geschiehet bekannter Maaßen auf dem Papiere vermöge eines Instruments, welches zwey spitzige Schenkel hat, die sich in einem Scharniere vereinigen. Es wird ein Zirkel genannt, weil man Zirkel oder Kreise damit beschreibet. Die eine Spitze wird in einem Punkte gestellet, der zum Mittelpunkt werden soll, und die andere wird um diesen Punkt herumgedrehet und beschreibet den Umkreiß. Auf anderen Ebnen wird oft ein Kreis vermittelst eines gespannten Fadens beschrieben, wovon das eine Ende befestiget, und das andere herumgedrehet wird.

Ist der Mittelpunkt gegeben, nebst einem Punke wo der Umkreis durchgehen soll, so wird die eine Spitze des Zirkels oder das eine Ende des Fadens im gegebenen Mittelpunkte gestellet. Die andere Spitze des Zirkels wird bis zum gegebenen Punkte des Umkreises entfernet, oder der Faden wird bis zum nemlichen Punkte ausgedehnet und dort fest gehalten. Alsdann wird der Zirkel wie vorher beschrieben.

Ist der Halbmesser des Zirkels gegeben, so werden beyde Spitzen so weit aus einander gestellet, daß sie die Enden des gegebenen Halbmessers erreichen. Oder es wird der Faden so lang genommen, daß er dem gegebenen Halbmesser gleich sey. Alsdann kann der Zirkel leicht um den gegeben Mittelpunkt beschrieben werden. Dieser Mittelpunkt ist entweder am Ende des gegebenen Halbmessers oder an einem anderen Orte. Auf solche Art ist in der Figur A der Umkreis BDEB um den Mittelpunkt C, mit dem gegebenen Halbmesser CB beschrieben worden. In der andern Figur ist der Umkreis um den Mittelpunkt A mit dem gegebenen Halbmesser CD (=AB) beschrieben worden.



Zwey-

Zweytes Hauptstück.

Von der geraden Linie.

§. 1.

Wenn man die Geometrie auf der nemlichen Art wie andere Wissenschaften vortragen wollte, so müste man alles, was unter einer Benennung gehört, zusammenfassen und abhandeln, ohne etwas fremdes darunter zu mischen. So müste man, zum Beyspiele, in dem Theile der Meßkunst, wo von geraden Linien geredet wird, weder der ebnen Figuren noch des Zirkels erwähnen. Die Erfahrung lehret aber, daß solches hier nicht angehet, und daß die Gründlichkeit der Lehren sehr viel dabei einbüßen würde. Wir schicken diese Anmerkung voraus, um dem Lehrlinge zuvor zu kommen, dem es sonst auffallend scheinen möchte, daß die Sätze der Geometrie oft in einer scheinbaren Unordnung auf einander folgen. In gegenwärtigem Hauptstücke, welches eigentlich nur von geraden Linien handeln sollte, wird manches von Winkeln und Dreiecken gesaget werden, weil ohnedem die Aufgaben, welche sich auf die geraden Linien beziehen, keine gründliche Auflösung erhalten könnten. Ein Geometer muß sich damit begnügen, daß kein Satz vorgetragen werde, der sich nicht aus den vorhergehenden Sätzen beweisen lasse. Um die sogenannte Schulordnung muß er sich nicht zu viel bekümmern. Nach dieser nöthigen Vorerinnerung schreiten wir zu den Lehrsätzen und Aufgaben, welche entweder die gerade Linie zum Gegenstande haben, oder ohne welchen dieselben nicht verstanden und bewiesen werden können.

§. 2.

§. 2.

Von einem Punkte zum andern kann nur eine gerade Linie gehen.

Weil nur eine die kürzeste von allen seyn kann, die sich in den nemlichen Punkten endigen. (1 Haupt. §. 6)

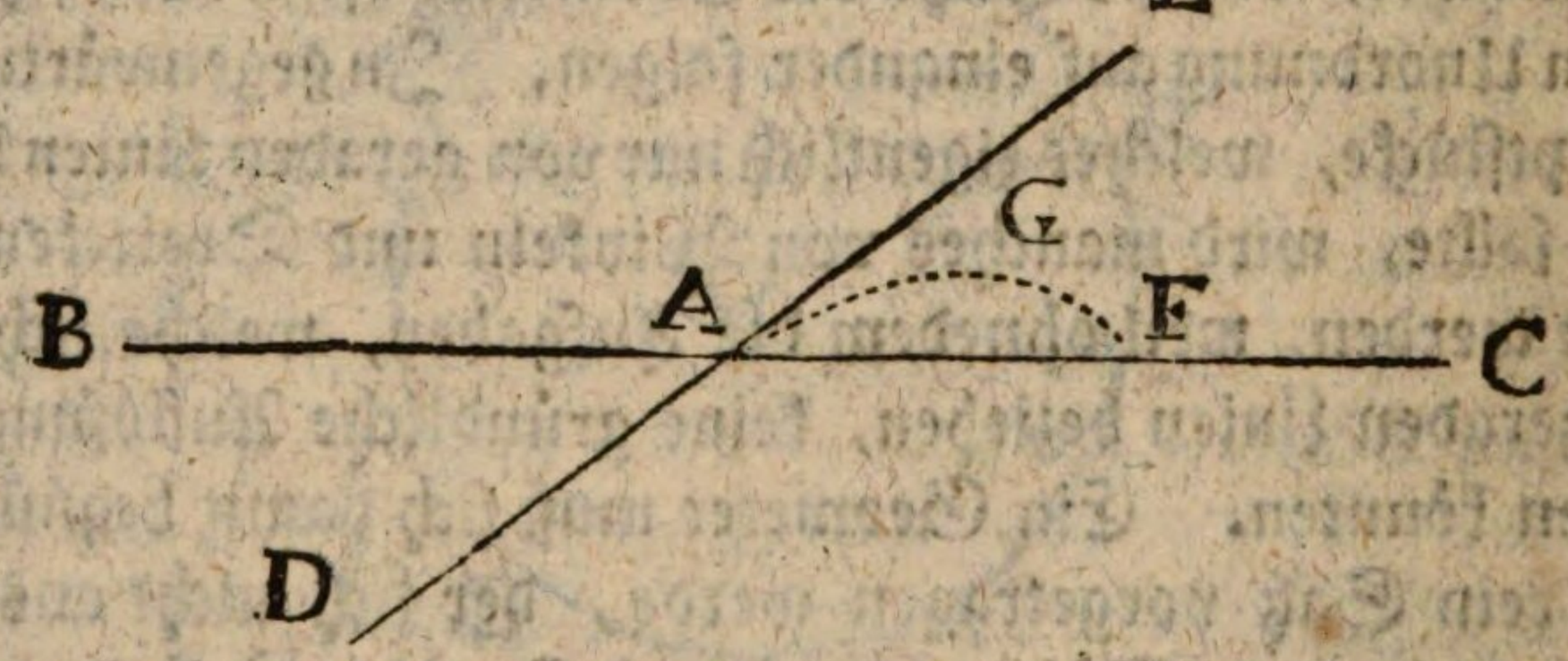
§. 3.

Wenn von einem Punkte zu einem anderen mehrere Linien gehen, worunter eine gerade ist, so sind die übrigen entweder krumm oder aus geraden zusammengesetzet, und alle länger als die einzige gerade; und diejenigen, die der geraden am nächsten liegen, sind die kürzesten.

Dieses folget aus vorigem Satze, und überhaupt aus der gesunden Vernunft.

§. 4.

Wenn zwey gerade Linien einander schneiden oder begegnen, so können sie sich nur in einem Punkte schneiden oder begegnen.



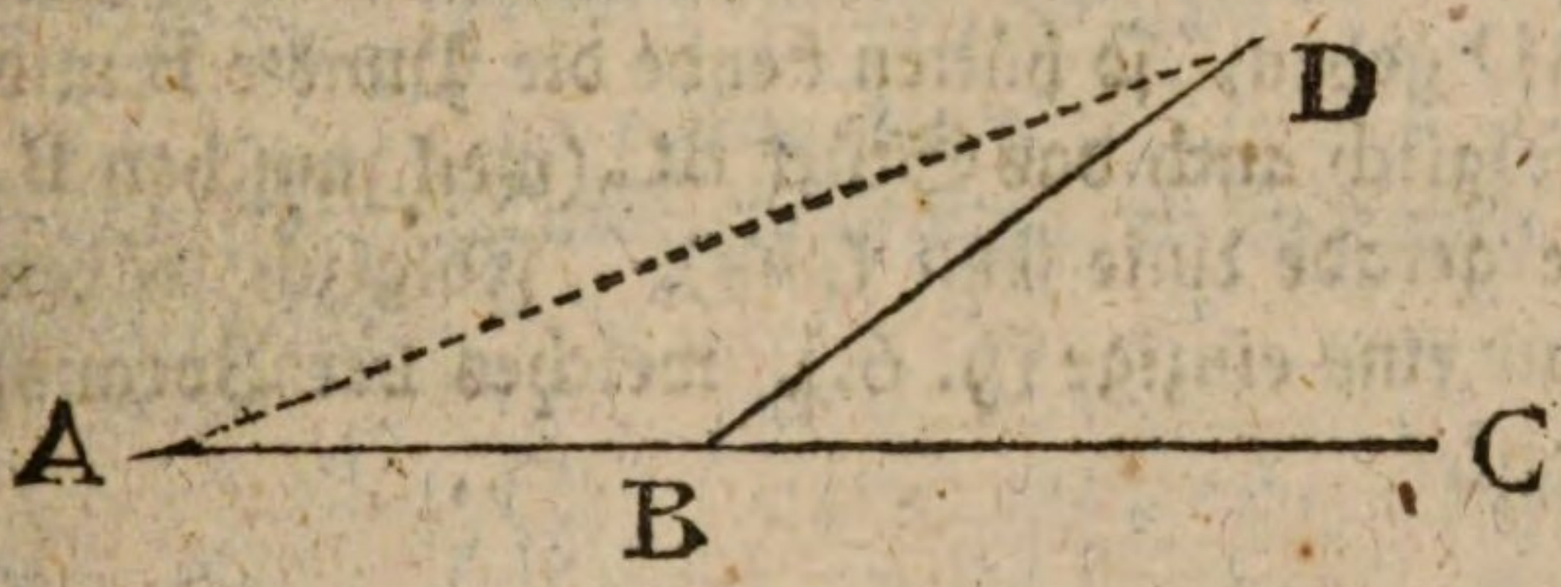
Gesetzt die geraden Linien BC und DE schneiden oder begegnen einander im Punkte A, so können sie nicht wiederum in einem anderen Punkte F zusammen treffen.

Wäre dieses möglich, so wäre AF, als ein Theil der BC, eine gerade Linie, AGF als ein Theil der DE wäre auch eine gerade Linie.

Also wären zwischen den Punkten A und F zwey gerade Linien AF und AGF, welches unmöglich ist. (§. 2.)

§. 5.

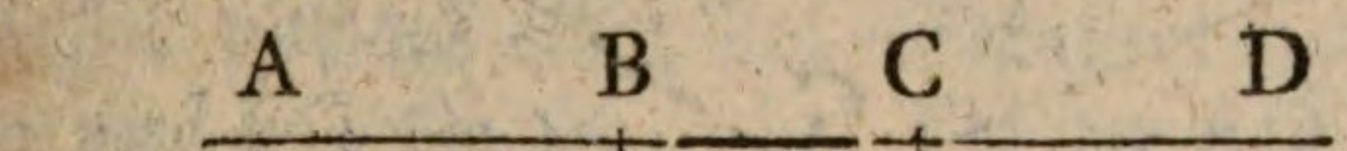
Die Verlängerung einer geraden Linie kann keine andere Richtung haben, als die gerade Linie selbst, oder eine gerade Linie kann nicht nach verschiedenen Richtungen verlängert werden.



Gesetzt AB könnte nicht nur nach C, sondern auch nach D verlängert werden, so stelle dir von A nach D eine gerade Linie AD vor. Es wären also zwischen A und D zwey gerade Linien AB und ABD, welches unmöglich ist. (§. 2.)

§. 6.

Wenn zwey gerade Linien ein Stück gemein haben, so machen sie zusammen eine gerade Linie.



Gesetzt das Stück BC gehöret sowohl zu AC als zu BD, so ist BC eine einzige gerade Linie, CD und BA sind deren Verlängerungen, und diese Verlängerungen machen mit BC nur eine gerade Linie. (§. 5.) Also ist AD eine gerade Linie.

§. 7.

Wenn zwey gerade Linien zwey Punkte gemein haben, so machen sie zusammen eine gerade Linie.

Gesetzt in voriger Figur gehören die Punkte B und C sowohl zur AC als BD. Zwischen B und C findet nur eine

gerade

gerade Linie Statt (§. 2). Also haben beyde Linien das Stück BC gemein, und AD ist eine gerade Linie. (§. 6.)

§. 8.

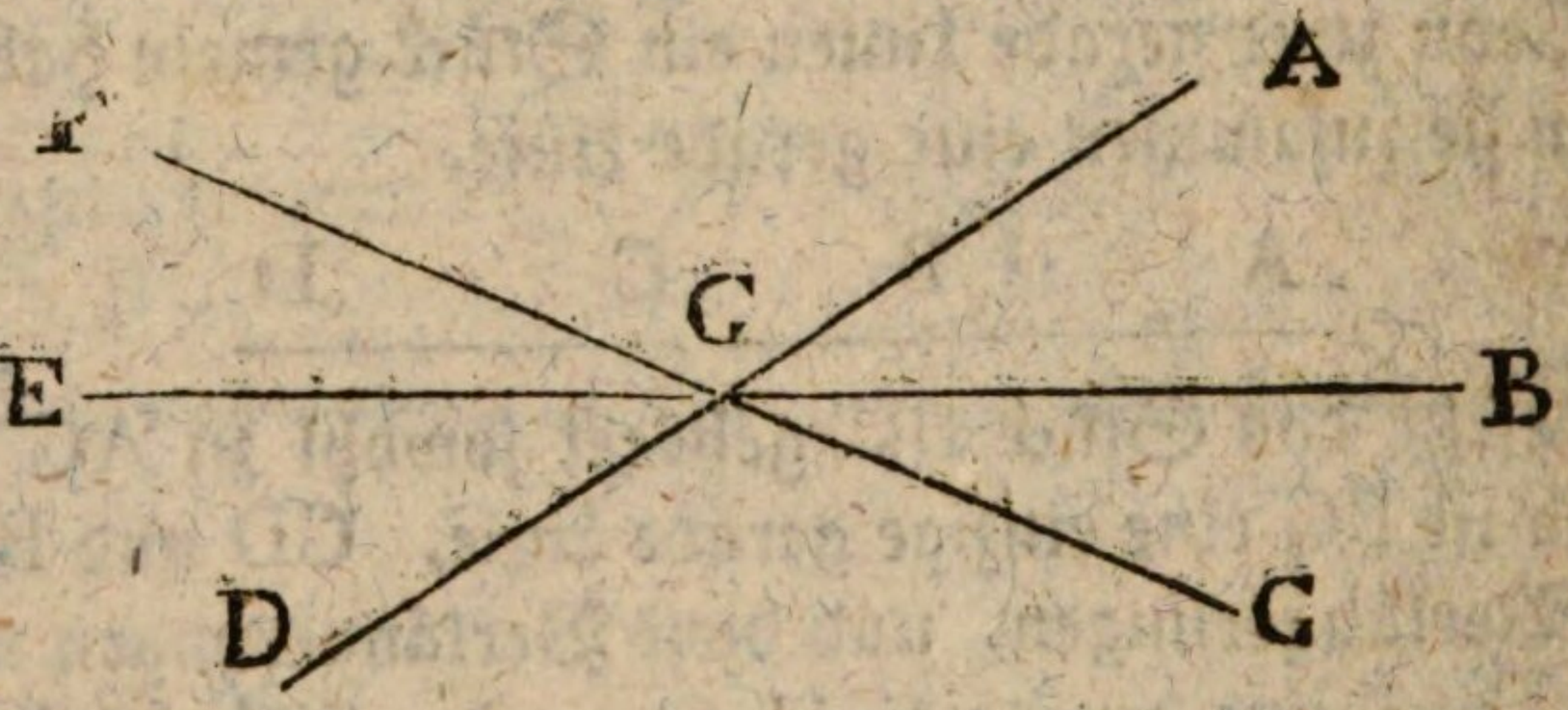
Durch zwey gegebene Punkte kann nicht mehr als eine gerade Linie gehen, nur kann sie länger oder kürzer seyn. Z. E. in der letzten Figur kann durch B und C keine andere gerade Linie gezogen werden als AD. Denn gesetzt es könne durch B und C noch eine andere gerade Linie außer AD gehen, so hätten beyde die Punkte B und C gemein, folglich auch das Stück BC (weil zwischen B und C nur eine gerade Linie seyn kann). Folglich wären beyde Linien nur eine einzige (§. 6.), welches der Voraussetzung zuwider ist.

§. 9.

Zwey Punkte bestimmen völlig die Lage einer geraden Linie.

Dieses ist die Folge des vorigen Satzes.

Anmerkung. Wenn nur ein Punkt G gegeben ist, so können durch denselben so viel gerade Linien gezogen werden als man will, z. E. AD, CF, BE.



§. 10.

Alle gerade Linien, die in einem Zirkel vom Mittelpunkte bis zum Umkreise gehen, sind gleich, und dem Halbmesser gleich, womit der Kreis beschrieben worden.

Denn sie sind im Grunde nichts anders als der Halbmesser selbst, der bey seiner Umwendung um den Mittelpunkt

punkt verschiedene Lagen oder Richtungen annimmt. (1 Hauptst. §. 19.)

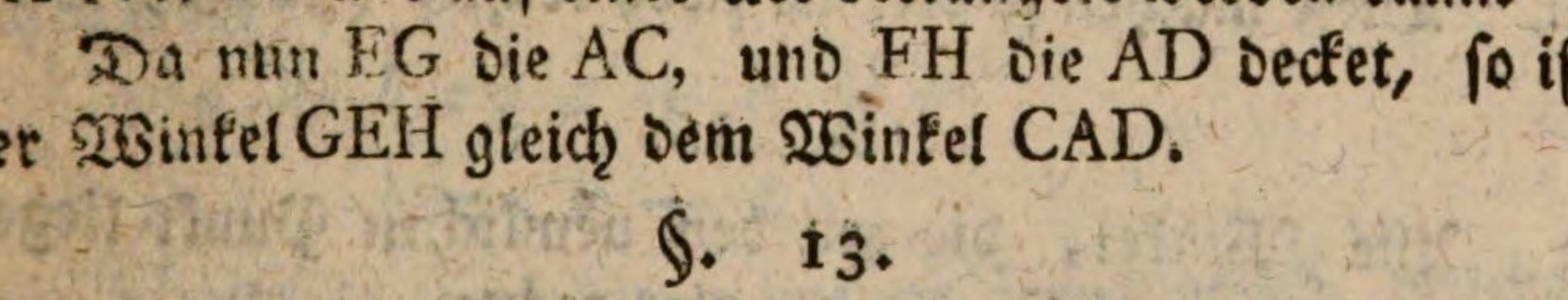
§. 11.

Wenn zwey Kreise mit gleichen Halbmessern beschrieben sind, so sind die geraden Linien, die in beiden vom Mittelpunkte zum Umkreise gezogen werden, alle gleich.

Denn sie sind in jedem Zirkel dem Halbmesser gleich. Da nun die Halbmesser gleich sind, so sind auch solche Linien gleich. (1 Hauptst. §. 38. No. 3.)

§. 12.

Wenn zwey Winkel gleich sind, so sind auch ihre Nebenwinkel gleich.

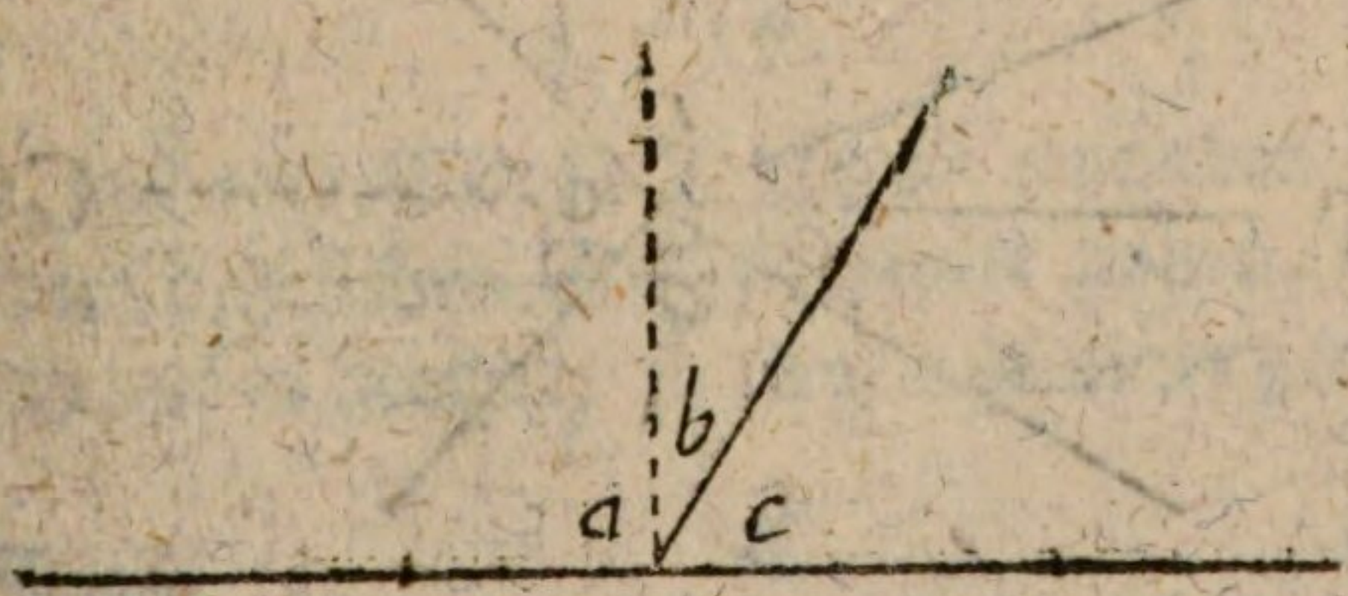


Es sey der Winkel GEF gleich dem ∠CAB. Weil diese Winkel gleich sind, so lege sie in Gedanken über einander, so daß EG auf AC und EF auf AB liege. Da nun EF auf AB lieget, so ist EF mit AB eine und dieselbe gerade Linie, folglich lieget auch EH auf AD weil die gerade Linie BA oder FE nur auf einer Art verlängert werden kann.

Da nun EG die AC, und FH die AD decket, so ist der Winkel GEH gleich dem Winkel CAD.

§. 13.

Zwey Nebenwinkel auf einer geraden Linie sind allemal entweder zwei rechte oder zusammen zwey rechten gleich.



Es

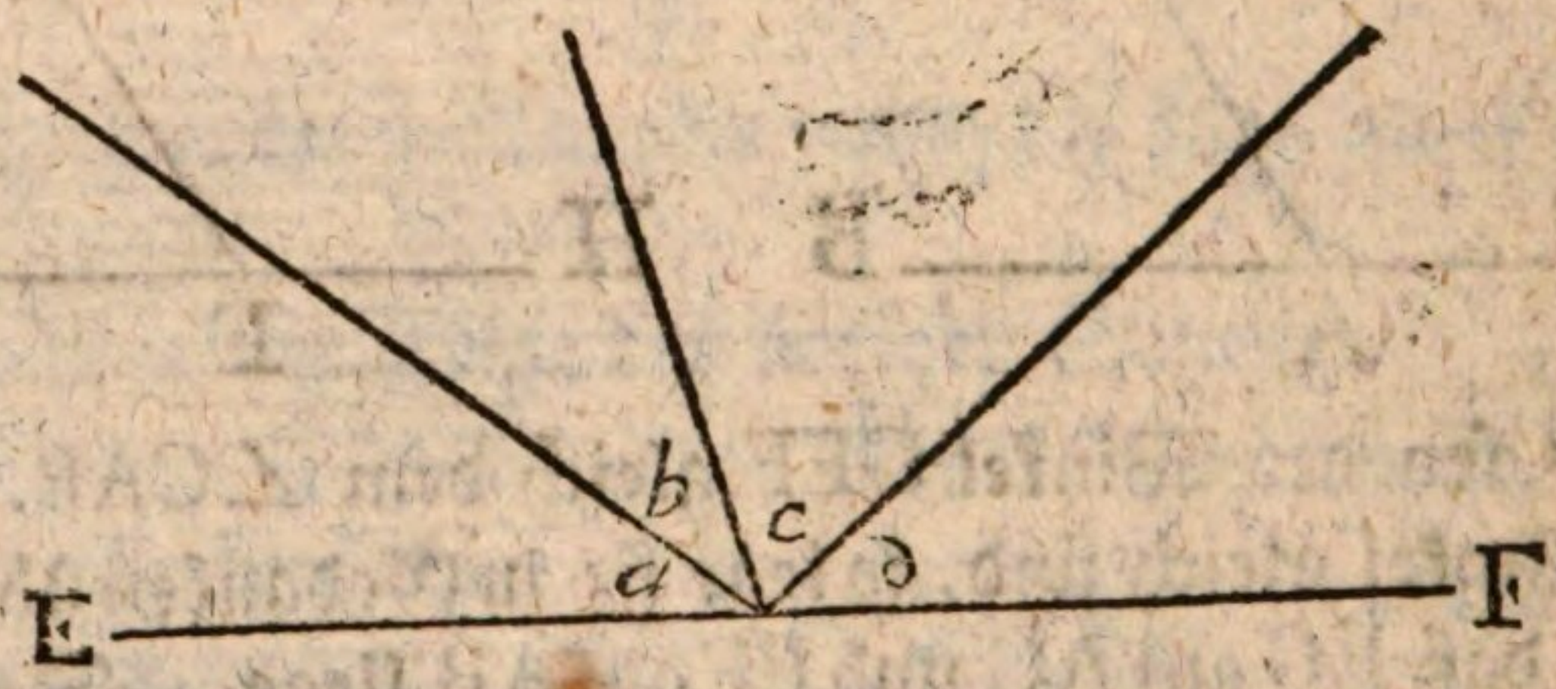
Ist die Linie, welche die beyden Nebenwinkel bildet, auf der andern senkrecht, so entstehen zwey rechte Winkel a und $b + c$ (1 H. §. 13). Ist sie schief, so kann man sich allemal eine senkrechte im Begegnungspunkte vorstellen, alsdann entstehen drey Winkel a, b und c, und es ist

$$(a + b) + c = a + (b + c) = 2\ \text{R}.$$

Anmerkung. Wenn von Winkeln die Rede ist, so soll der Buchstabe R einen rechten bedeuten.

§. 14.

Verschiedene Winkel, die auf derselben Seite einer geraden Linie liegen, und in derselben ihren gemeinschaftlichen Scheitelpunkt haben, machen allemal zusammen so viel als zwey rechte Winkel.

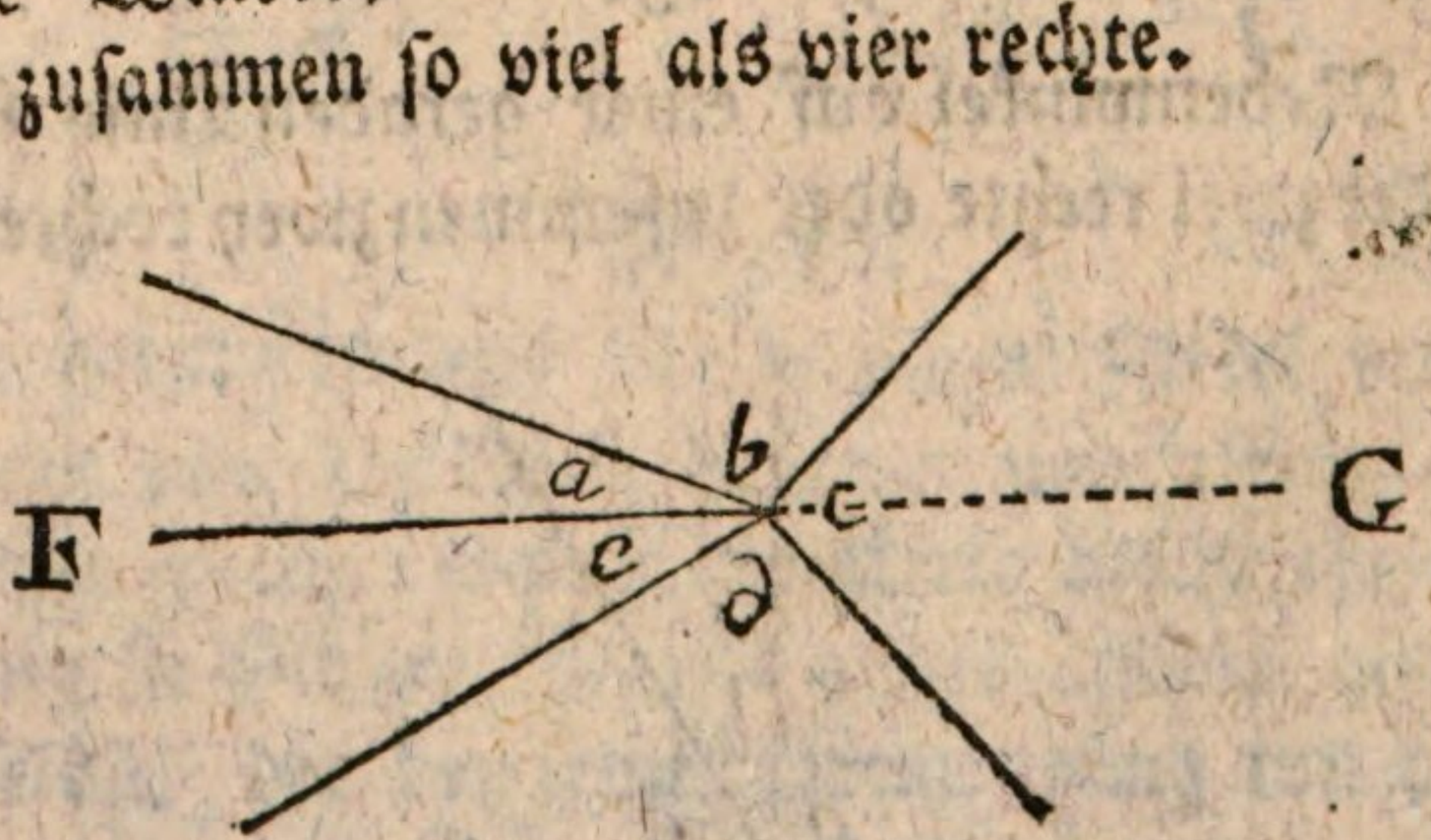


Denn nimmt man $a + b + c$, die auf EF liegen, zusammen, so hat man zwey Nebenwinkel $(a + b + c)$ und d. Diese machen so viel als zwey rechte. (§. 13.)

§. 15.

Alle Winkel, die um den nemlichen Punkt liegen,

[illegible]en zusammen so viel als vier rechte.

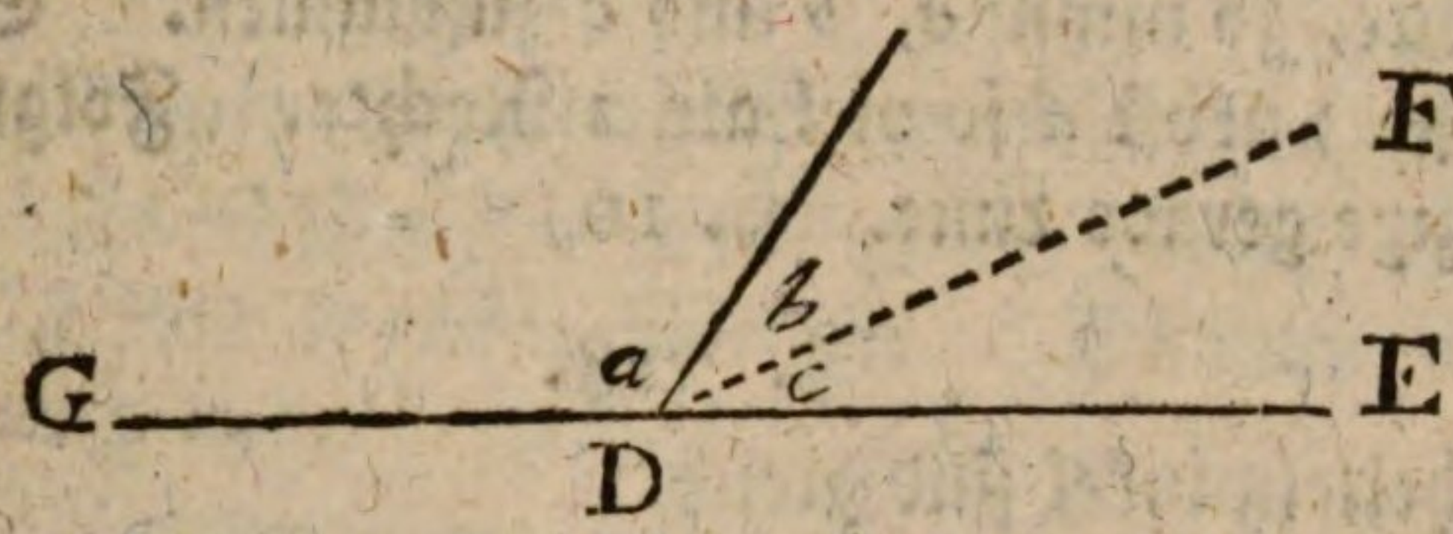


[illegible] Es

Es gehe durch den gemeinschaftlichen Scheitelpunkt eine gerade Linie FG, so machen alle Winkel einerseits zwey rechte und anderseits auch zwey rechte, also zusammen vier rechte. Also ist $\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e = 4\,R.$

§. 16.

Wenn zwey Nebenwinkel so viel als zwey rechte ausmachen, so liegen sie auf einer geraden Linie.



Es seyen a nebst $(b + c)$ so groß als zwey rechte. Gesetzt es läge DE mit DC nicht in einer geraden Linie, so muß irgend eine andere Linie als DF mit CD in einer geraden Linie liegen. Alsdann wären a und b zwey Nebenwinkel auf der geraden Linie CDF, folglich wären a und b zusammen so groß als 2 Rechte (§. 13.), oder

$$a + b = 2\ R.$$

es war auch der Voraussetzung zu Folge

$$a + (b + c) = 2\ R.$$

daher wäre

$$a + b = a + b + c$$

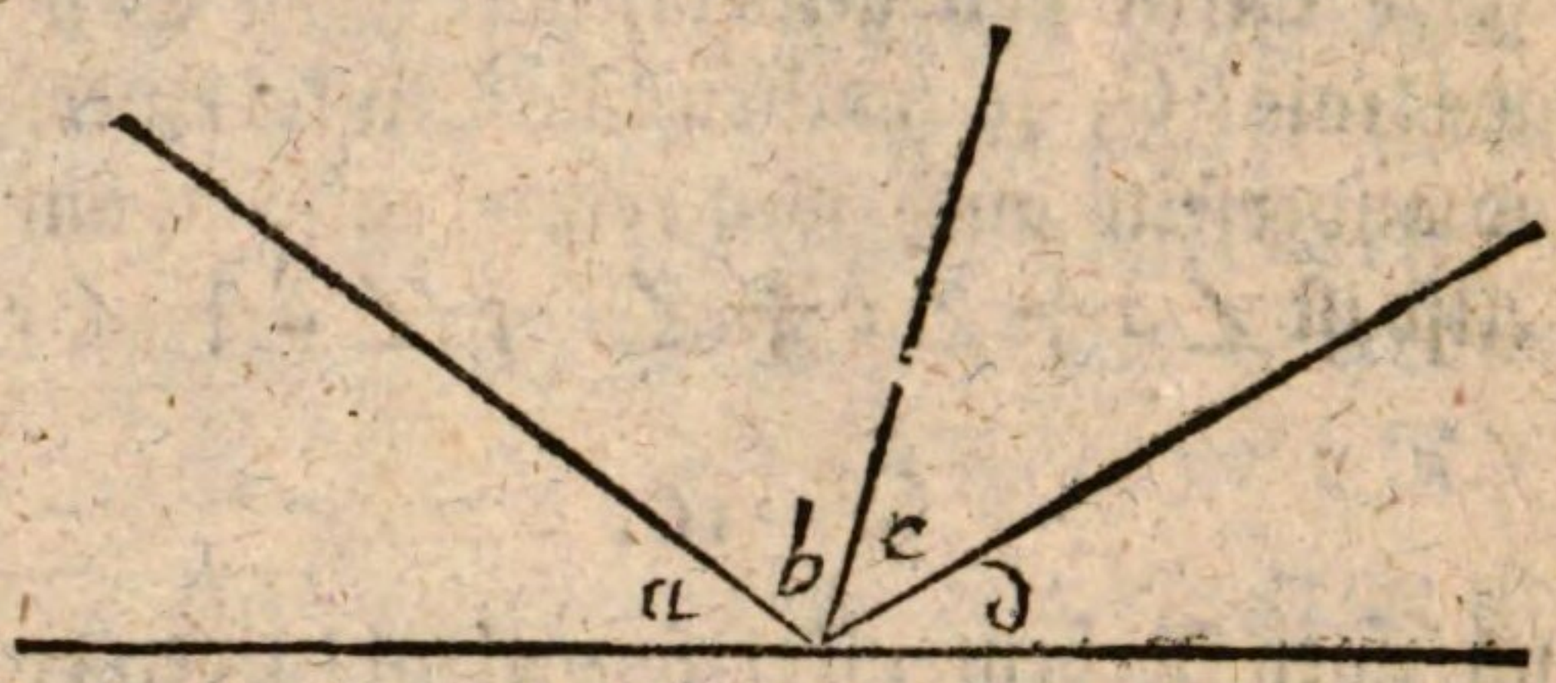
oder

$$b = b + c$$

oder der Theil b wäre dem ganzen $b + c$ gleich, welches unmöglich ist.

§. 17.

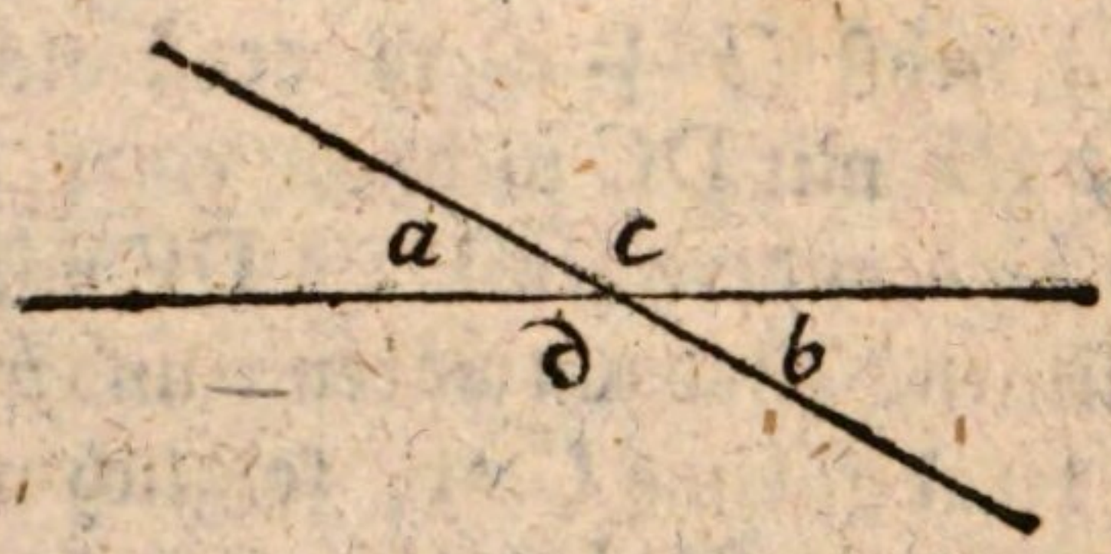
Wenn mehrere Winkel, die an einander liegen und einen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt haben, zusammen so groß sind, als 2 Rechte, so liegen sie einer geraden Linie.



Gesetzt *a*, *b*, *c* und *d* machen zusammen so viel als zwei rechte, so nimm *a*, *b* und *c* zusammen. So machet $(a+b+c)$ nebst *d* so viel als 2 Rechte. Folglich ist EF eine einzige gerade Linie. (§. 16)

§. 18.

Scheitelwinkel sind gleich.



Es sind $a + c = 2\ \mathfrak{R}$ (§. 13.)

$$b + c = 2\ \mathfrak{R}$$

also $$a + c = b + c$$

folglich $$a = b$$

Desgleichen sind

$$a + d = 2\ \mathfrak{R}.$$

$$a + c = 2\ \mathfrak{R}.$$

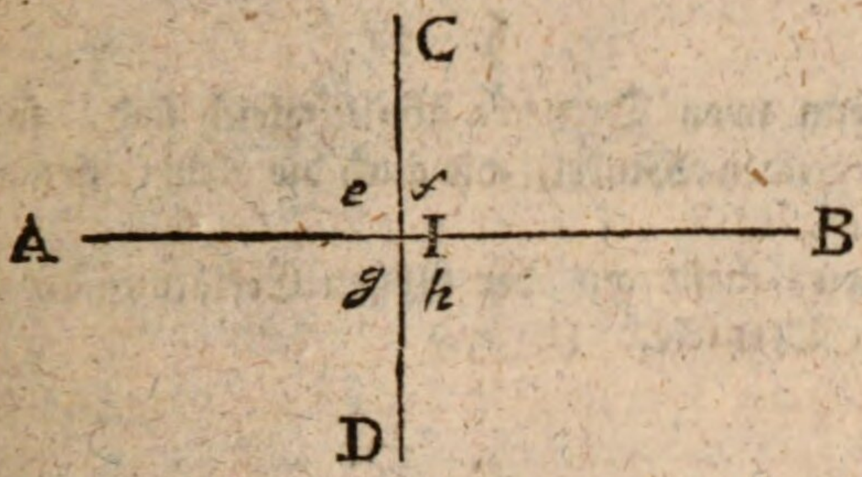
folglich $a + d = a + c$

und $d = c$

§. 19.

Wenn eine gerade Linie eine andere senkrecht schneidet, so entstehen vier Winkel, die alle recht, und folglich gleich sind.

Weil

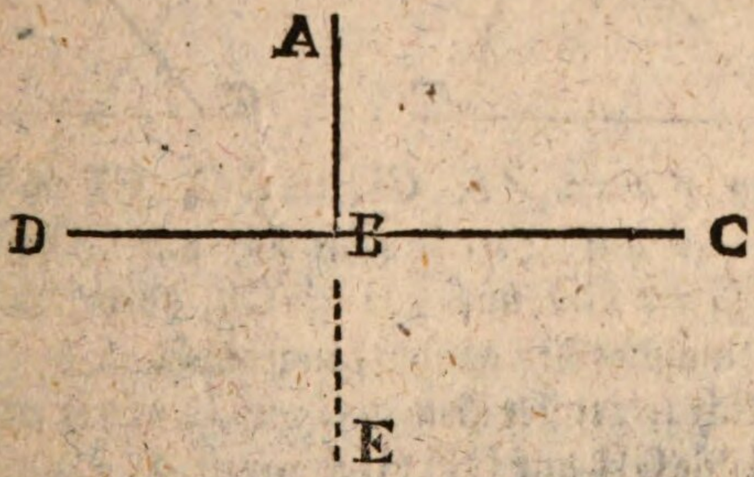


Weil CI auf AB senkrecht stehet, so sind e und f rechte Winkel. Es ist aber $h = e$ und $g = f$ (§. 18.), folglich sind auch g und h rechte Winkel. Da nun alle rechte Winkel gleich sind, so sind

$$e = f = g = h.$$

§. 20.

Wenn von zwey geraden Linien die erste auf der zweyen senkrecht stehet, so stehet auch die zweyte auf der ersten senkrecht.



Es sey AB senkrecht auf DC. Es sey BE die Verlängerung der AB, so ist (§. 19.)

$$\angle ABD = \angle ABC = \angle DBE \text{ (§. 4.)} = \angle CBE$$

folglich

$$\angle ABC = \angle CBE$$

folglich ist CB senkrecht auf AB (l. 13.)

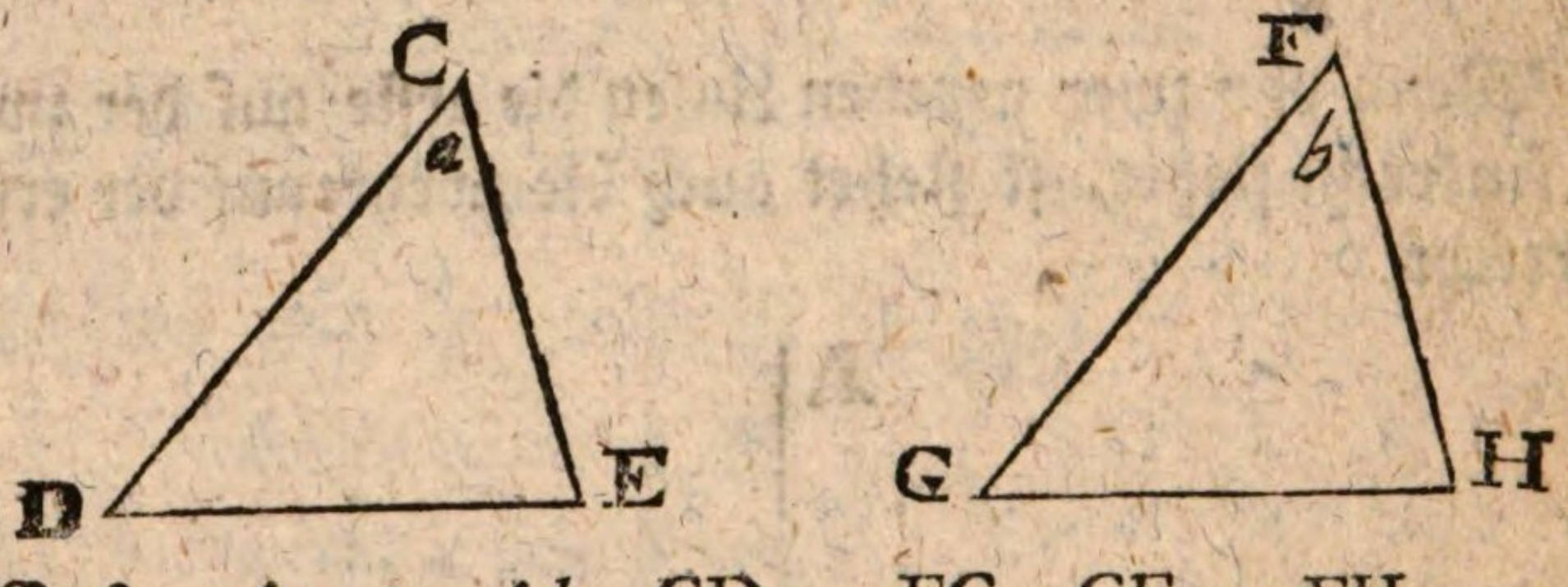
§. 21.

Wenn zwey Dreyecke ähnlichgleich sind, so sind die gleichliegenden Winkel, wie auch die gleichliegenden Seiten gleich.

Dieses fließt aus der bloßen Erklärung der ähnlichgleichen Dreyecke. (I. 33.)

§. 22.

Wenn in einem Dreyecke ein Winkel und die beyden anliegenden Seiten so groß sind, als ein Winkel und die anliegenden Seiten in einem andern Dreyecke, so sind beyde Dreyecke ähnlichgleich, und die übrigen gleichliegenden Theile, nemlich die Gegenwinkel der gleichliegenden Seiten, und die Gegenseiten der gleichen Winkel sind auch gleich.



Es sey $\angle a = \angle b$, CD = FG, CE = FH.

Lege $\angle b$ auf $\angle a$, so fällt FG auf CD, FH auf CE und da FG = CD und FH = CE, so decken solche gerade Linien einander der ganzen Länge nach.

Folglich lieget der Punkt G auf D und H auf E. Also auch die Linie GH auf DE. (II Hauptst. §. 2.)

Folglich sind beyde Dreyecke ähnlichgleich, und es ist

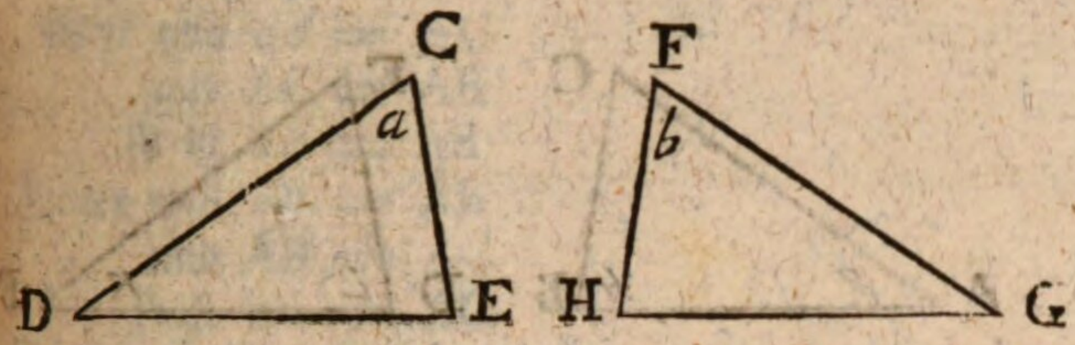
GH = DE

$\angle$FHG = $\angle$CED

$\angle$FGH = $\angle$CDE.

Anmerkung. Der nemliche Beweis gilt, wenn auch die gleichliegenden Schenkel in verkehrter Lage erscheinen.

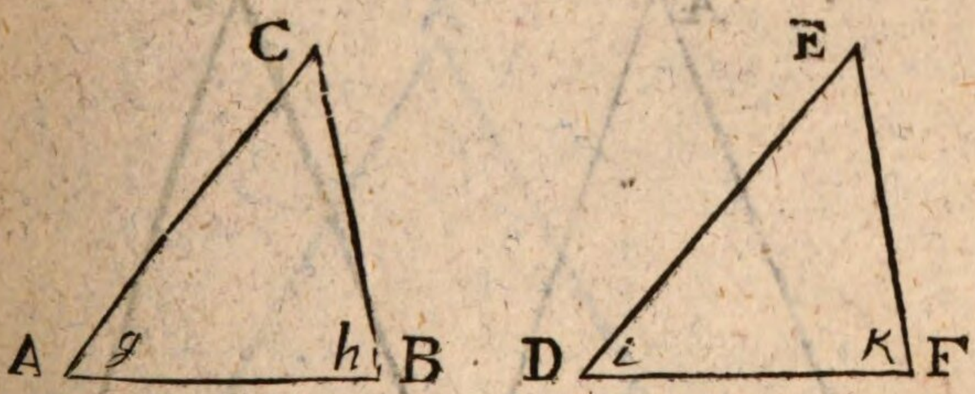
Es



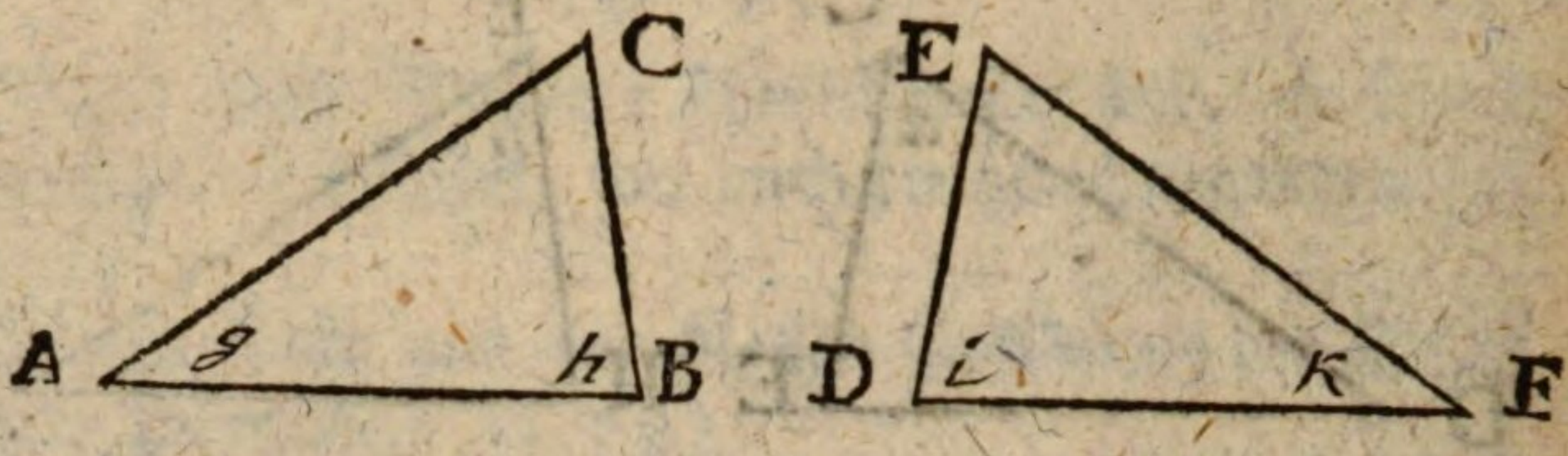
Es sey $\angle a = \angle b$, FG = CD FH = CE, so kehre in Gedanken das Dreyeck FGH um, so daß FH auf CE und FG auf CD geleget werden könne. Führe alsdann den nemlichen Beweis wie vorher.

§. 23.

Wenn eine Seite und die beyden anliegenden Winkel in einem Dreyecke so groß sind als eine Seite, und die anliegenden Winkel in einem anderen Dreyecke, so sind beyde Dreyecke ähnlichgleich.



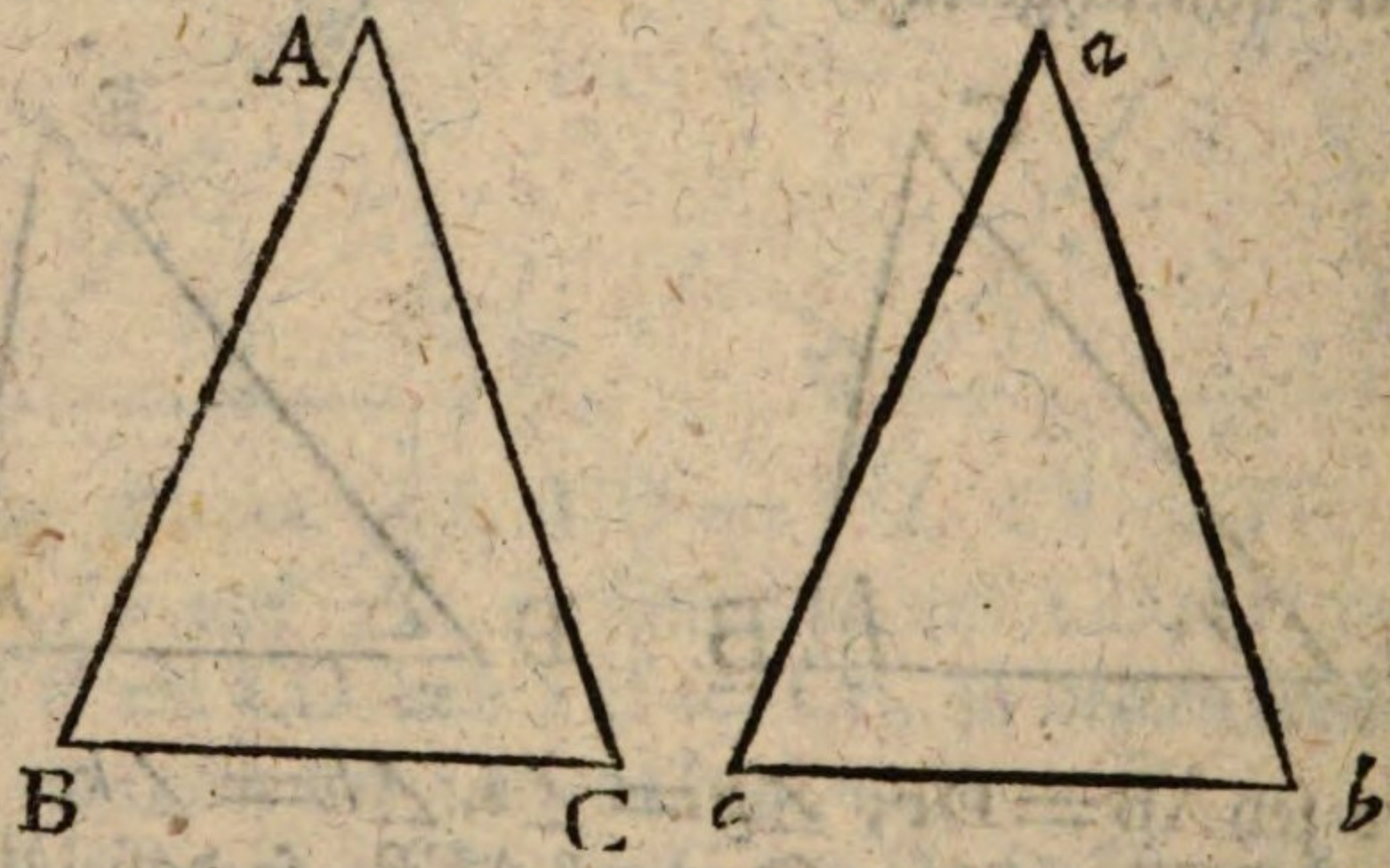
Es sey AB = DF, $\angle g = \angle i$, $\angle h = \angle k$. Lege das Dreyeck DEF auf dem Dreyeck ACB, so daß DF auf AB liege. Weil $\angle i = \angle g$, so fällt DE auf AC. Weil $\angle k = \angle h$, so fällt FE auf BC. In dieser Lage ist also die Linie DE die nemliche als AC, und FE die nemliche als BC. Da nun zwey gerade Linien einander nur in einem Punkte schneiden können (§. 4.), so kann der Punkt E kein anderer als der Punkt C seyn. Folglich decken beyde Dreyecke vollkommen einander, und sind daher ähnlichgleich.



Anmerkung. Wenn die homologen Winkel in verkehrte Lage erscheinen, so muß das eine Dreyeck vor der Ausführung des Beweises in Gedanken umgewandt werden. Z. E. Es sey AB = DF, ∠ g = ∠ k, ∠ h = ∠ i, so kehre das Dreyeck DEF um, lege die Ecke k auf g, und i auf h, so wird, wie vorher bewiesen, E auf C fallen.

§. 24.

Wenn ein Dreyeck zwey gleiche Seiten hat, so sind die Gegenwinkel derselben gleich.



Es sey AB = AC. Es sey ein anderes Dreyeck abc mit dem gegebenen ABC ähnlichgleich, aber in verkehrter Lage, so daß

ab = AB
ac = AC
cb = BC
∠ a = ∠ A
∠ b = ∠ B
∠ c = ∠ C

Weil

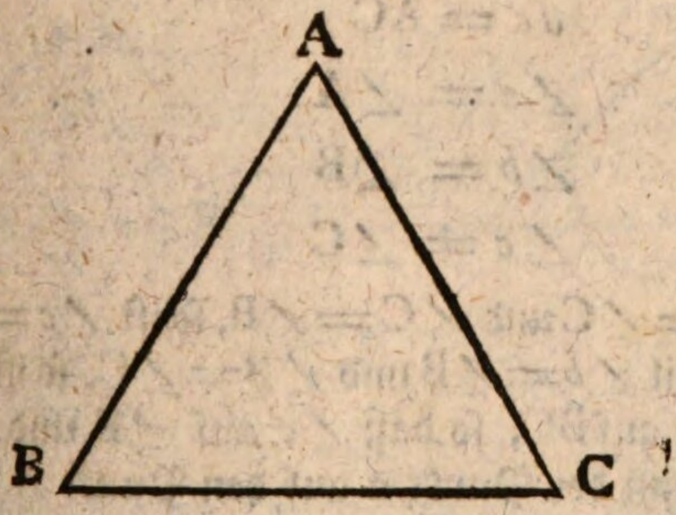
Weil nun $ac = AC$
und $AC = AB$
so ist $ac = AB$
Ferner weil $ab = AB$
und $AB = AC$
so ist $ab = AC$
Es ist auch $\angle a = \angle A$

Lege demnach $\angle a$ auf $\angle A$, so fällt ac auf AB, ab auf AC, cb auf BC, $\angle c$ auf $\angle B$, $\angle b$ auf $\angle C$.

Also (I §. 37. No. 1) ist $\angle c = \angle B$
$\angle b = \angle C$

Es ist aber angenommen worden $\angle c = \angle C$, und $\angle b = \angle B$. Wenn man $\angle C$ anstatt $\angle c$ und $\angle B$ anstatt $\angle b$ setzet (I §. 38. No. 2.) so wird

$\angle C = \angle B$
oder $\angle B = \angle C$

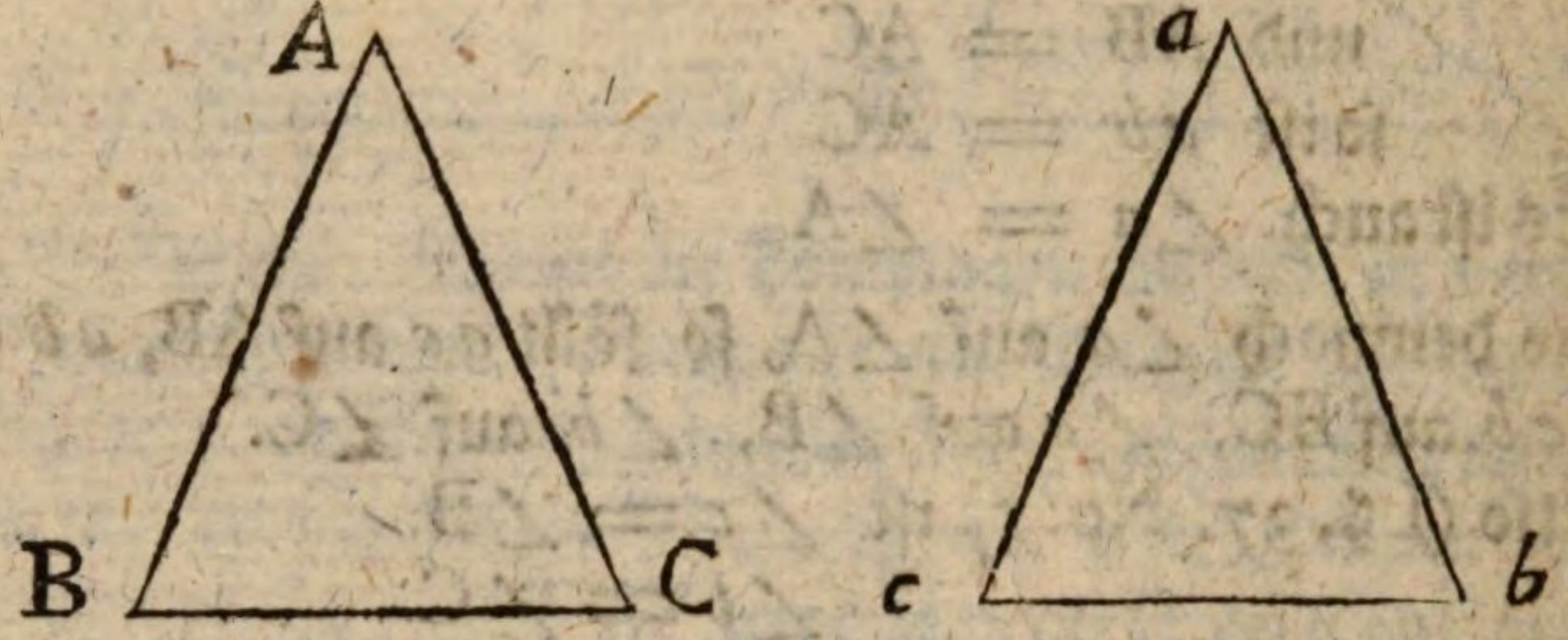


Zusatz. Wenn ein Dreyeck drey gleiche Seiten hat, so hat es auch drey gleiche Winkel. Es sey $AB = AC = BC$

Weil $AB = AC$
so ist $\angle B = \angle C$ (§. 24.)
Weil $AB = BC$
so ist $\angle A = \angle C$ (§. 24.)
Also ist $\angle B = \angle C = \angle A$.

§. 25.

Wenn ein Dreyeck zwey gleiche Winkel hat, so sind auch die Gegenseiten derselben gleich.



Es sey $\angle B = \angle C$ im Dreyecke BAC. Es sey *acb* ein ähnlichgleiches Dreyeck, aber in verkehrter Lage, so daß

$$bc = BC$$
$$ab = AB$$
$$ac = AC$$
$$\angle a = \angle A$$
$$\angle b = \angle B$$
$$\angle c = \angle C$$

Weil $\angle c = \angle C$ und $\angle C = \angle B$, so ist $\angle c = \angle B$. Desgleichen, weil $\angle b = \angle B$ und $\angle B = \angle C$, so ist $\angle b = \angle C$.

Lege *cb* auf BC, so daß $\angle c$ auf $\angle B$ und $\angle b$ auf $\angle C$ falle, so muß der Punkt *a* auf den Punkt A fallen, folglich *ac* auf AB, *ab* auf AC, wie im §. 23. bewiesen worden.

Es ist also

$$ac = AB$$

es war aber angenommen

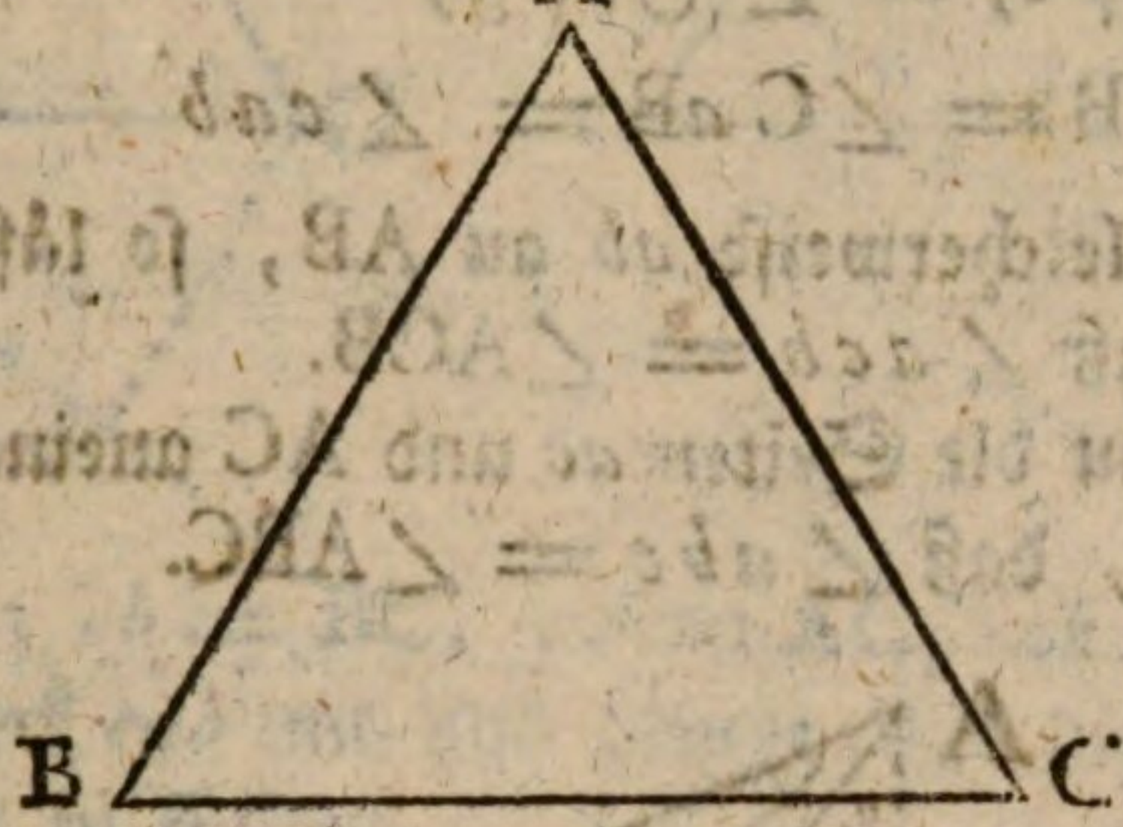
$$ac = AC$$

also ist $AB = AC$.

Zusatz. Wenn ein Dreyeck drey gleiche Winkel hat, so hat es auch drey gleiche Seiten. Denn weil $\angle B = \angle C$,

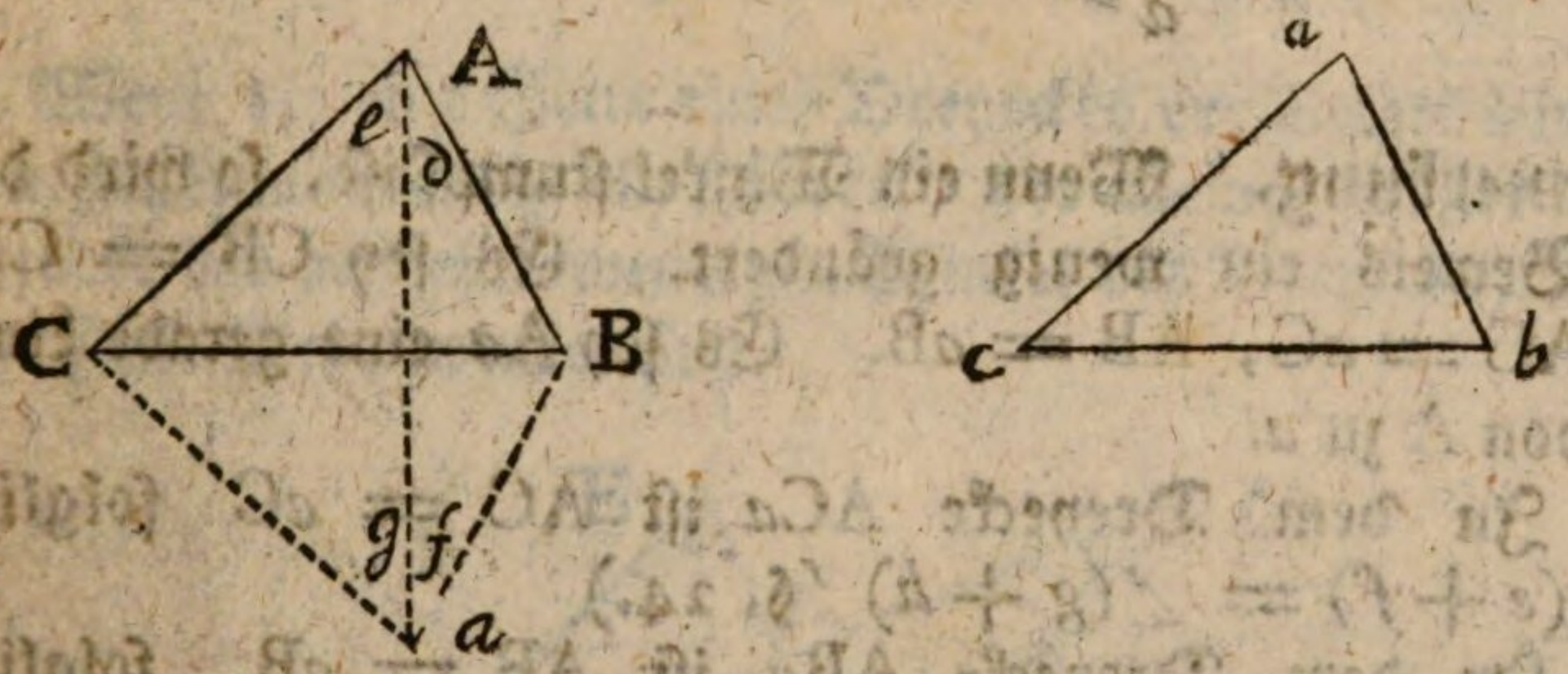
so

so ist AC = AB, weil ∠B = ∠A so ist auch AC = BC.
Also ist AC = AB = AC.



§. 26.

Wenn die drey Seiten eines Dreyecks den drey Seiten eines andern Dreyecks gleich sind (jede mit jeder verglichen) so sind beyde Dreyecke ähnlichgleich, und die Gegenwinkel der gleichen Seiten sind auch gleich.



Es sey *ab* = AB, *bc* = BC, *ac* = AC. Lege das Dreyeck *acb* mit einer Seite *cb* an die gleiche Seite CB des anderen Dreyeckes auf einer Ebne, so daß die gleichen Seiten B*a* oder *ba* und BA, C*a* oder *ca* und CA mit ihren Enden aneinander stoßen.

Bilde dir die gerade Linie A*a* ein, so hat das Dreyeck AB*a* zwey gleiche Seiten AB = B*a* (= *ba*), folglich zwey gleiche Winkel ∠*d* = ∠*f* (§. 24.)

Desgleichen im Dreyecke AC*a* ist C*a* oder *ca* = CA, folglich ∠*e* = ∠g (§. 24.)

Da nun $\angle d = \angle f$

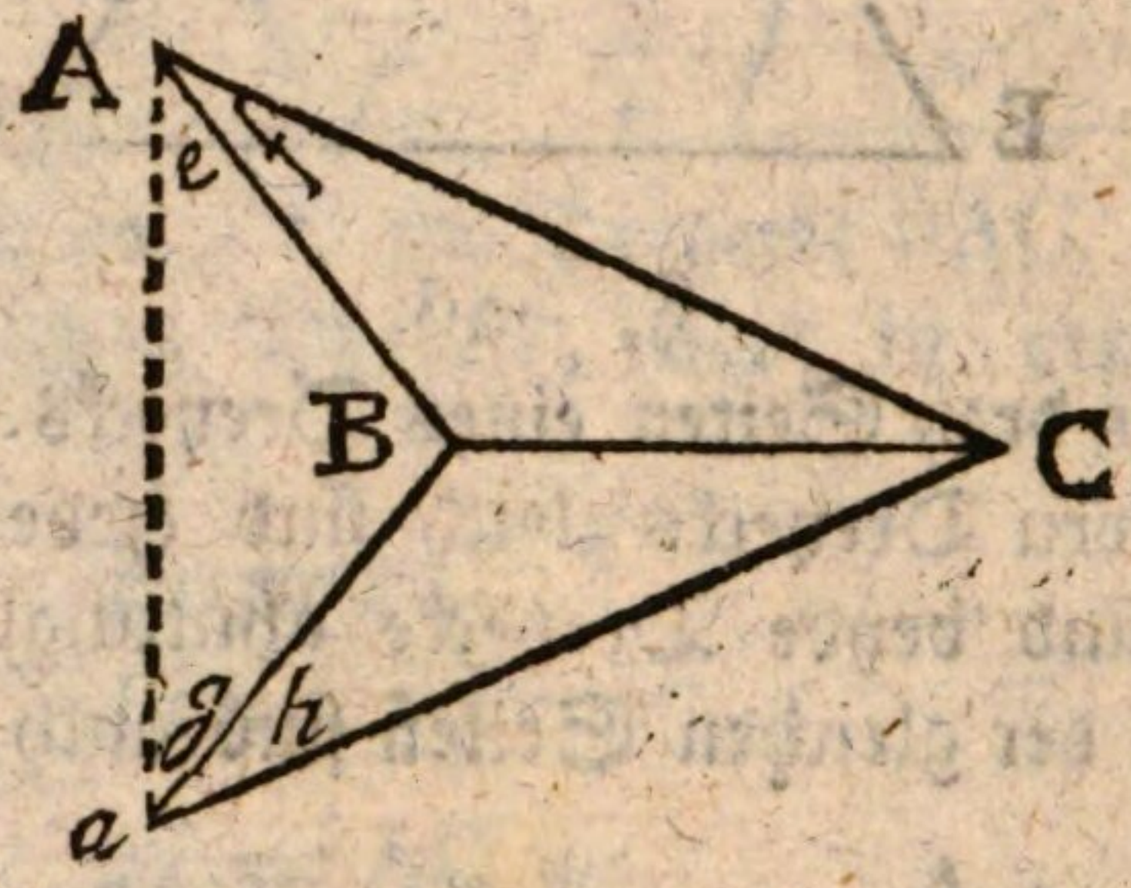
$\angle e = \angle g$

so ist $\angle (d+e) = \angle (f+g)$

oder $\angle$ CAB $= \angle$ C $aB = \angle cab$

Leget man gleicherweise *ab* an AB, so läßt sich eben so beweisen, daß $\angle acb = \angle$ ACB.

Leget mau die Seiten *ac* und AC aneinander, so läßt sich beweisen, daß $\angle abc = \angle$ ABC.



Anmerkung. Wenn ein Winkel stumpf ist, so wird der Beweis ein wenig geändert. Es sey CB = CB, AC = *a*C, AB = *a*B. Es sey A*a* eine gerade Linie von A zu *a*.

In dem Dreyecke AC*a* ist AC = *a*C folglich $\angle (e+f) = \angle (g+h)$ (§. 24.)

In dem Dreyecke AB*a* ist AB = *a*B, folglich $\angle e = \angle g$.

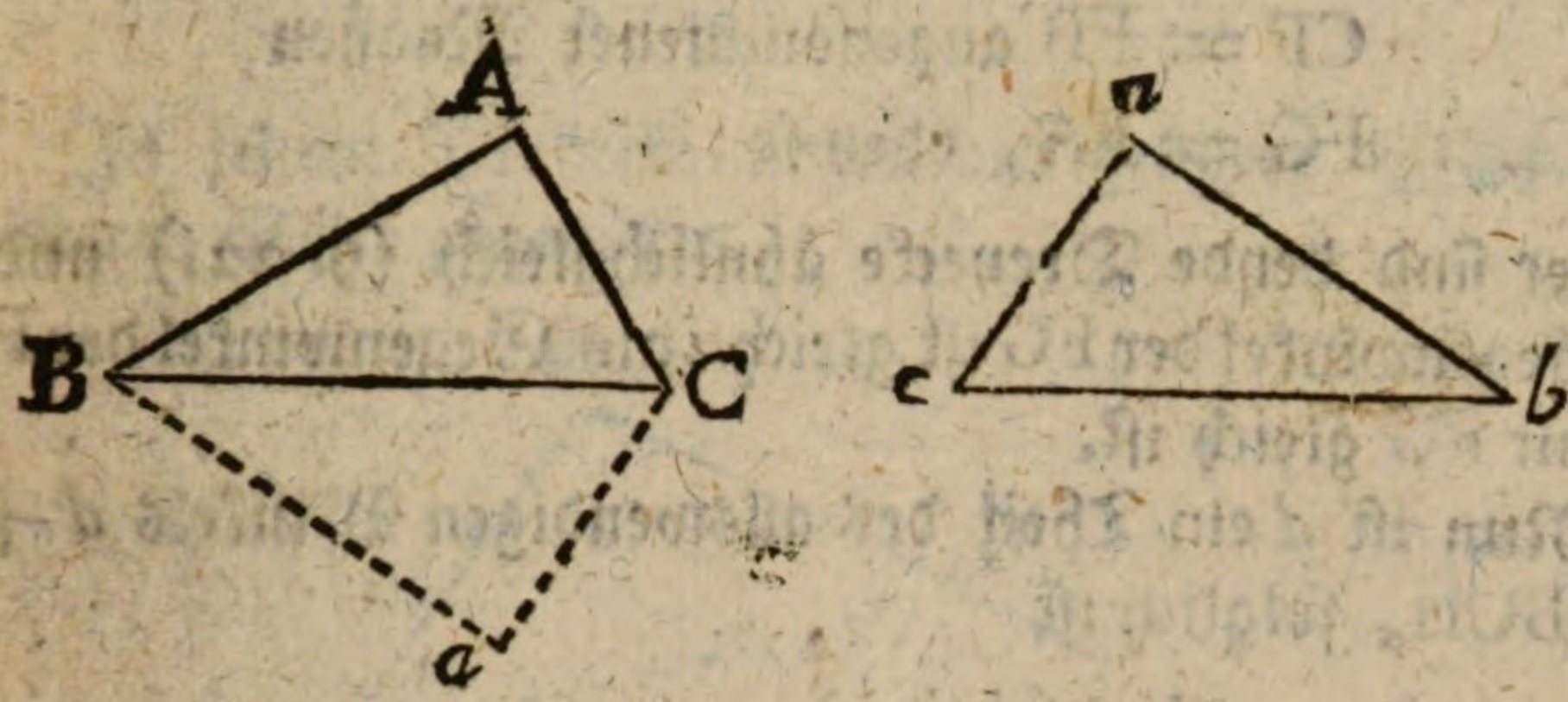
Da nun $e + f = g + h$

und $e = g$

so ist $f = h$

Sind beyde Dreyecke in verkehrter Lage, so muß das eine erst in Gedanken umgewandt werden, bevor man es neben dem anderen leget.

Z. E.

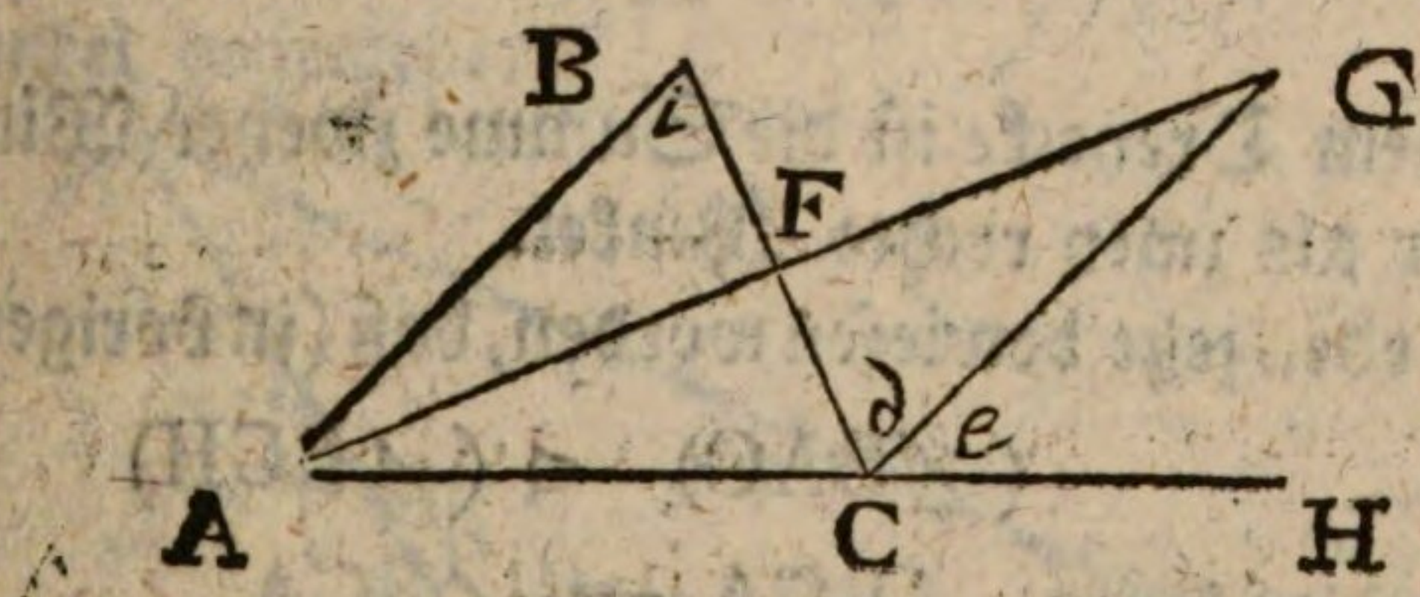


Z. E. wenn $cb = BC$, $ac = AC$, $ab = AB$, so kehre das Dreyeck *cab* um, und bringe es in die Lage C*a*B, um den Beweis zu führen.

Zusatz. Hieraus läßt sich schließen, daß, wie auch drey gerade Linien an einander gesetzet werden mögen, doch allemal ähnlichgleiche Dreyecke daraus entstehen, die nur der Lage nach verschieden sind.

§. 27.

Wenn die eine Seite eines Dreyeckes verlängert wird, so entstehet auswendig ein Winkel, der allemal größer ist, als jeder der beyden inwendigen Winkel des Dreyecks, die nicht seine Nebenwinkel sind.



Es sey die Seite AC des Dreveckes ABC verlängert in CH. Es sey der Punkt F die Mitte der Seite BC, so daß $BF = FC$. Durch A und F gehe die gerade Linie AFG, und es sey $FG = AF$. Zwischen den Punkten G und C sey die gerade Linie GC gezogen.

In den Dreyecken GFC und AFB ist $\angle GFC = \angle BFA$, als Scheitelwinkel.

CF

CF = FB angenommener Maaßen
FG = FA, eben so:

Daher sind beyde Dreyecke ähnlichgleich (§. 22.) nnd *d* als Gegenwinkel der FG ist gleich *i* als Gegenwinkel der FA, die mit FG gleich ist.

Nun ist *d* ein Theil des auswendigen Winkels $d + e$ oder BCH, folglich ist

$$d < (d + e)$$

Es ist aber bewiesen, daß $d = i$, also ist auch

$$i < (d + e)$$

Wird nun BC unterwärts verlängert, und durch B und die Mitte von AC eine gerade Linie gezogen, so läßt sich eben so beweisen, daß der Winkel BAC kleiner ist, als der unter der Grundlinie entstehende Winkel, oder als sein Scheitelwinkel $d + e$.

Also ist auch $(\angle BAC) < (d + e)$

woraus man siehet, daß der auswendige Winkel BCH größer ist als jeder der einwendigen CBA und CAB, die nicht darneben liegen.

§. 28.

In jedem Dreyecke ist die Summe zweyer Winkel allemal kleiner als zwey rechte Winkel.

Es ist eben jetzt bewiesen worden, daß (in voriger Figur)

$$(\angle BAC) < (\angle BCH)$$

setze beyderseits hinzu $\angle BCA = \angle BCA$

so ist $(\angle BAC + \angle BCA) < (\angle BCH + \angle BCA)$

oder weil $\angle BCH + \angle BCA = 2\,R.$

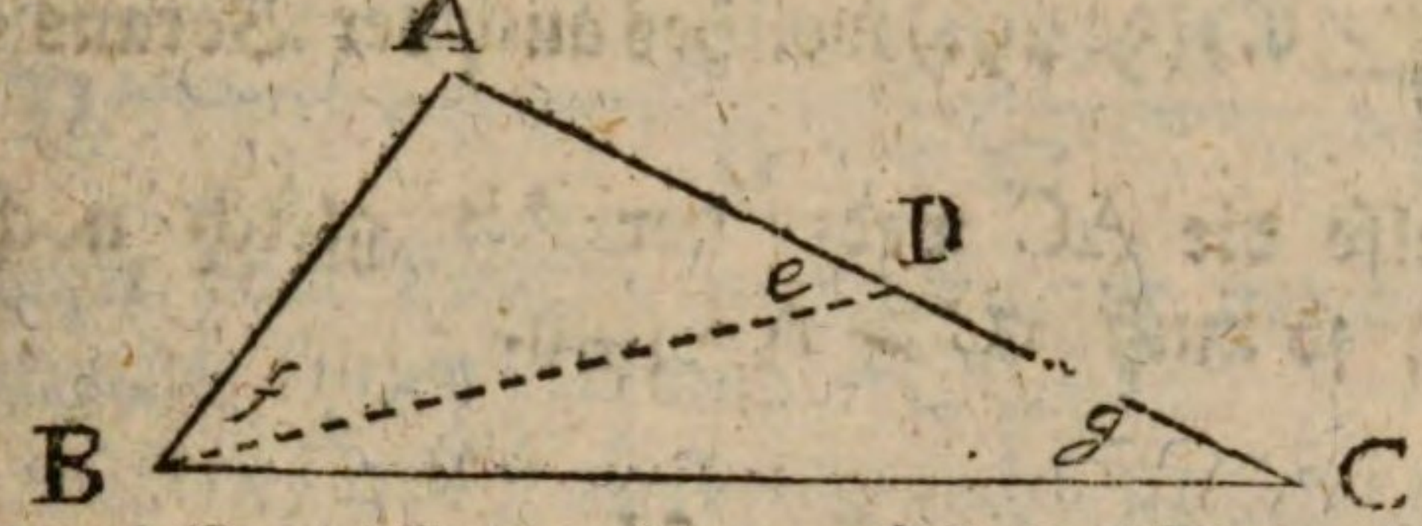
so ist $(\angle BAC + \angle BCA) < 2\,R.$

Dieses kann auf einer ähnlichen Art von der Summe der Ecken A und C, B und C bewiesen werden.

§. 29.

§. 29.

In jedem Dreyecke lieget der größere Winkel der größeren Seite gegenüber.



Es sey AC ▷ AB, so sey der Theil AD = AB. Von D nach B gehe die gerade Linie DB.

Da nun im Dreyecke BAD die AD = AB, so ist auch $\angle e = \angle f$. (§. 24.)

Nun ist im Dreyecke BDC der auswendige $\angle e < \angle g$ (§. 27.)

Und da $\angle e = \angle f$, so ist

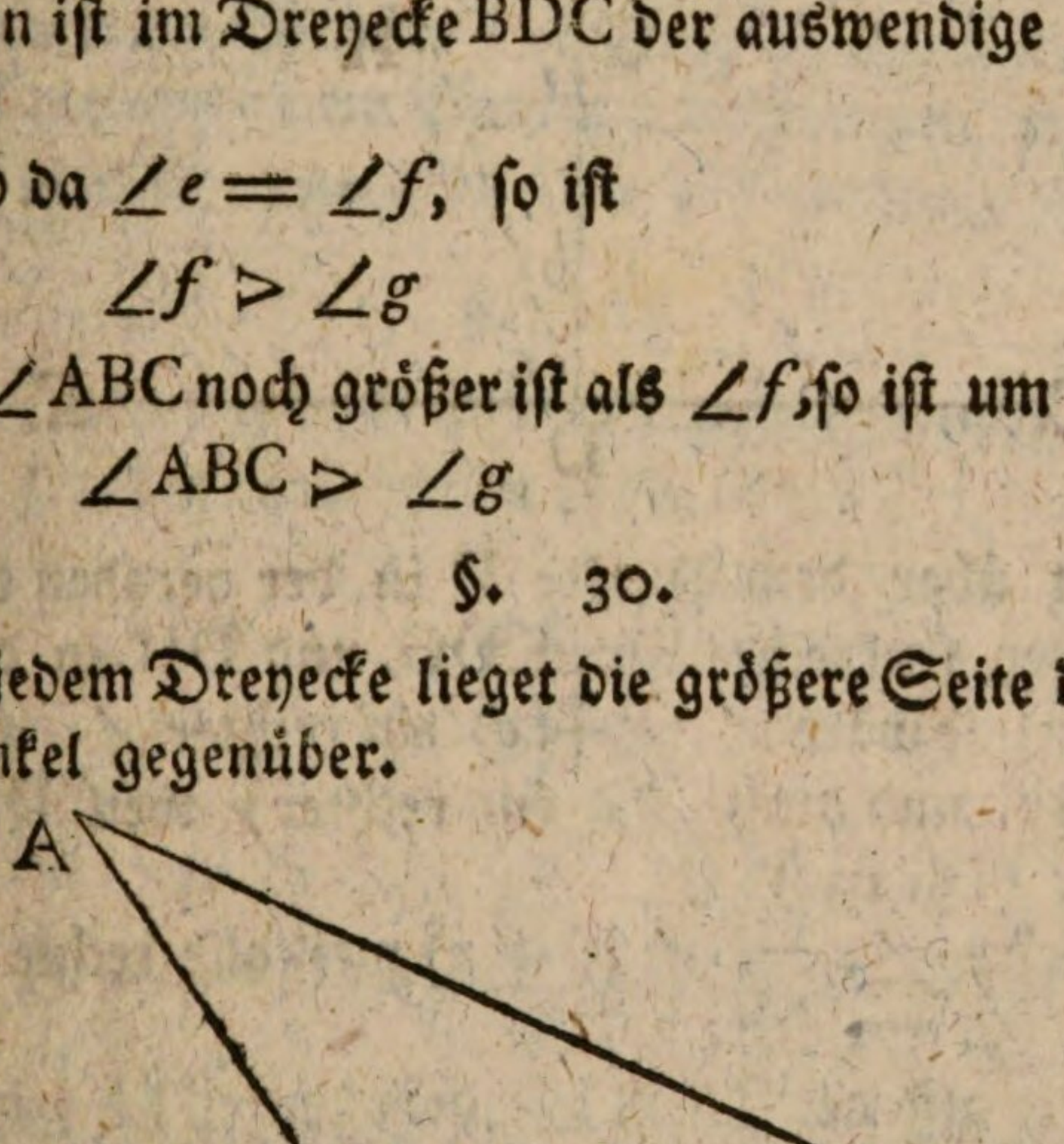
$$\angle f \triangleright \angle g$$

und da $\angle$ ABC noch größer ist als $\angle f$, so ist um destomehr

$$\angle \text{ABC} \triangleright \angle g$$

§. 30.

In jedem Dreyecke lieget die größere Seite dem größeren Winkel gegenüber.



Es sey $\angle B \triangleright \angle C$

so muß auch seyn AC ▷ AB.

Denn wäre nicht AC ▷ AB, so wäre

entweder AC = AB

oder AC ◁ AB.

Im

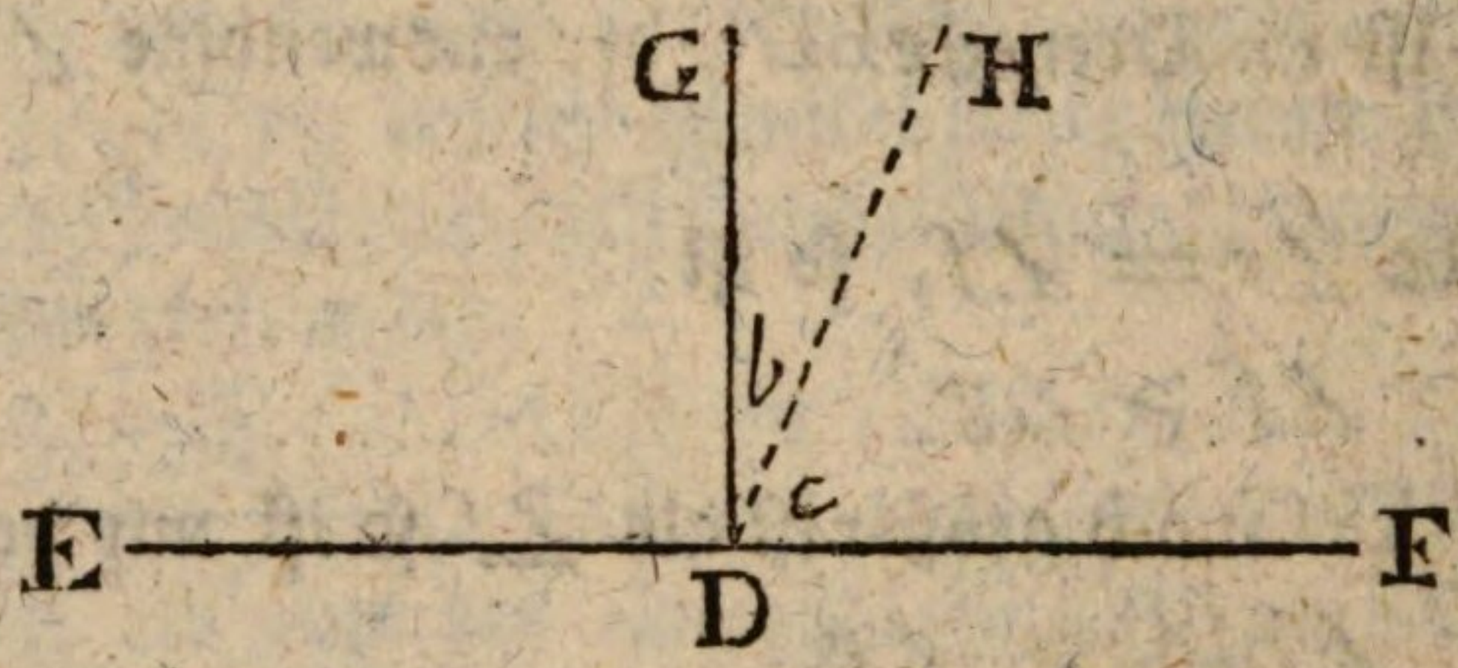
Im ersten Falle, wenn AC = AB wäre, so wäre (§. 24.) $\angle B = \angle C$, welches der Voraussetzung zuwider ist,

Im zweyten Falle, weun AC < AB wäre, so wäre $(\angle B) < (\angle C)$ (§. 29.) welches auch der Voraussetzung zuwider ist.

Da also die AC weder der AB gleich noch kleiner seyn kann, so muß AC > AB seyn.

§. 31.

Ueber einem Punkte einer geraden Linie kann in derselben Ebne nur eine einzige senkrechte Linie stehen.



Gesetzet über dem Punkte D in der geraden Linie EF könnten zwey senkrechte Linien DG und DH in derselben Ebne stehen, so wäre $\angle (b + c)$ ein rechter $\angle$, weil DG senkrecht ist, und auch $\angle c$ ein rechter, weil DH senkrecht wäre. (I §. 13.)

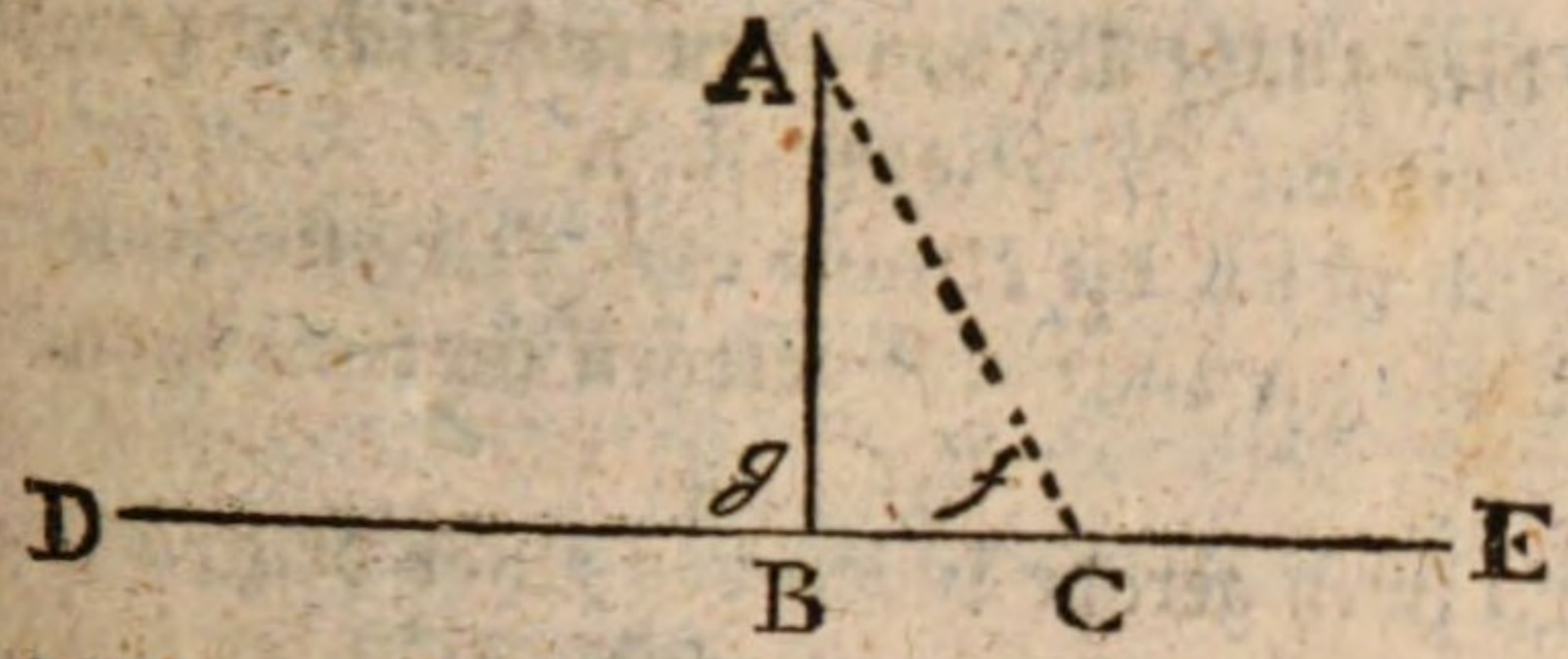
Also wäre $\angle c = \angle (b + c)$ weil alle rechte Winkel gleich sind. (§. 37. Nr. 3.)

Es wäre also der Theil $\angle c$ dem ganzen $(b + c)$ gleich, welches unmöglich ist.

§. 32.

Von einem Punkte nach einer geraden Linie kann nur eine senkrechte Linie gehen.

Gesetzet



Gesetzet vom Punkte A könnten zur geraden Linie DE zwey senkrechte Linien AB und AC gehen.

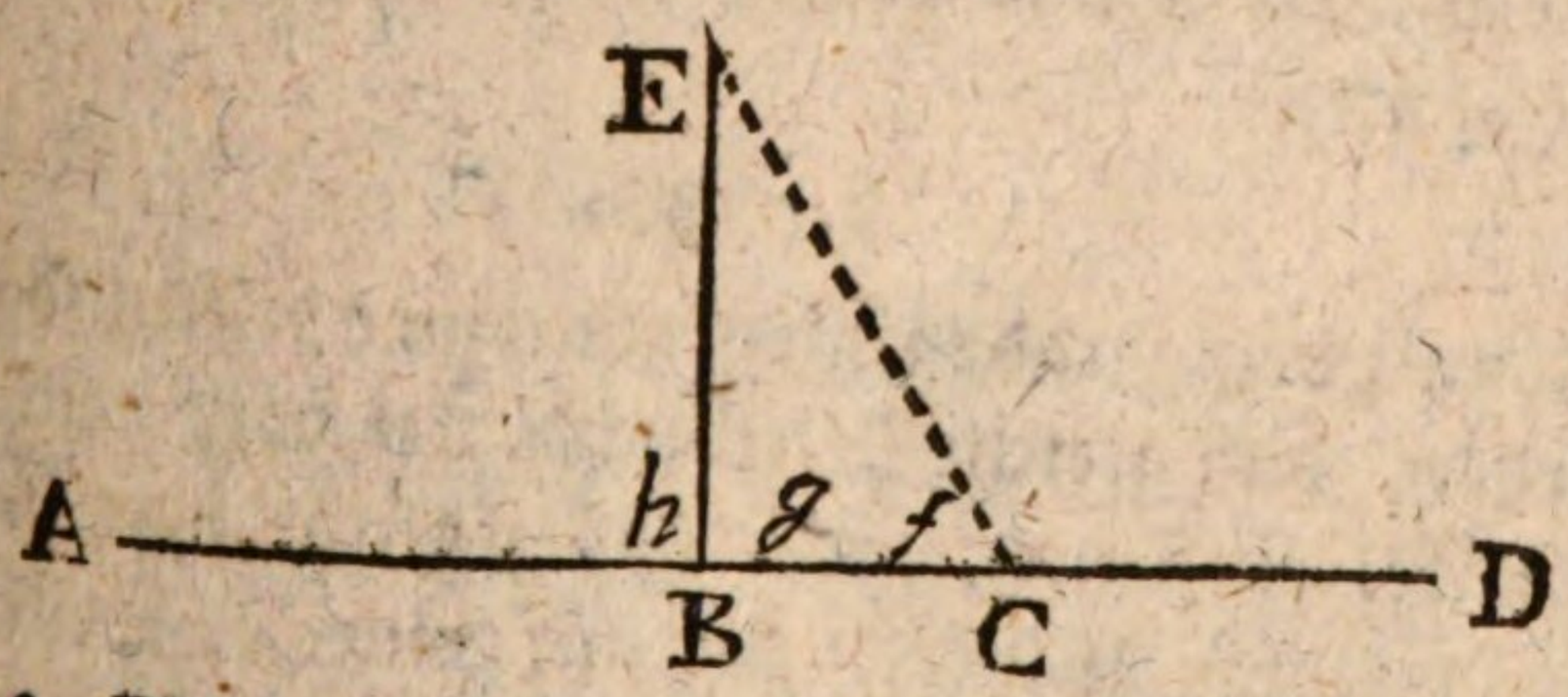
So müßten f und g alle beyde rechte Winkel, (I. §. 13.) und folglich gleich seyn.

Aber im Dreyecke ABC ist der auswendige Winkel g größer als $\angle f$ (§. 27.)

Folglich können $\angle g$ nnd $\angle f$ nicht gleich seyn, also nicht alle beyde rechte Winkel. Folglich können zwey Linien AB und AC die aus einem Punkte A entspringen, nicht zugleich auf der nemlichen geraden Linie DE senkrecht stehen.

§. 33.

Die senkrechte Linie ist die kürzeste die von einem Punkte zu einer geraden Linie gehen kann.



Es sey EB senkrecht auf AD, so ist EB kürzer als jede andere gerade Linie wie EC die aus dem Punkte E zur Linie AD gezogen werden kann.

Im Dreyecke EBC ist der auswendige Winkel h größer als $\angle f$ (§. 27.)

Es ist aber $h = g$, weil beyde rechte sind.

Also ist auch $\angle g$ größer als $\angle f$.

Da nun $g > f$, so ist auch EC größer als EB, (§. 30.)

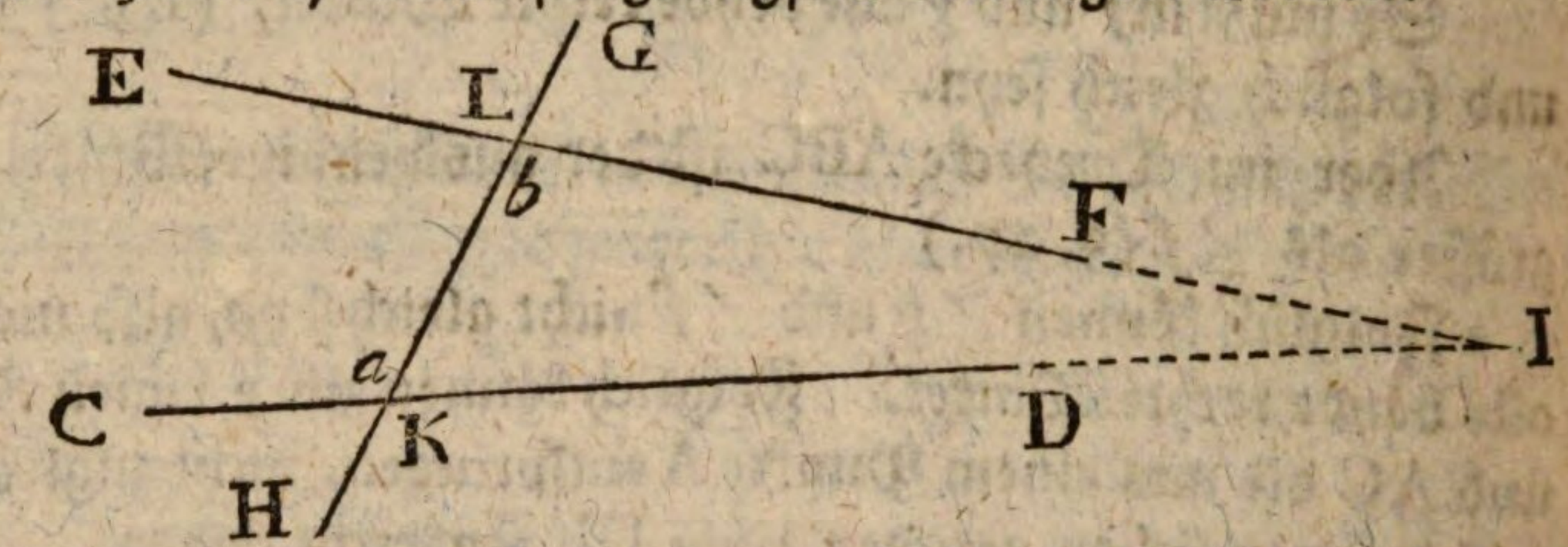
Und

Und dieses läßt sich von allen möglichen geraden Linien brweisen, die wie EC gezogen sind.

Folglich ist EB die kleinste oder kürzeste Linie, die vom Punkte E bis zur Linie AD gezogen werden kann.

§. 34.

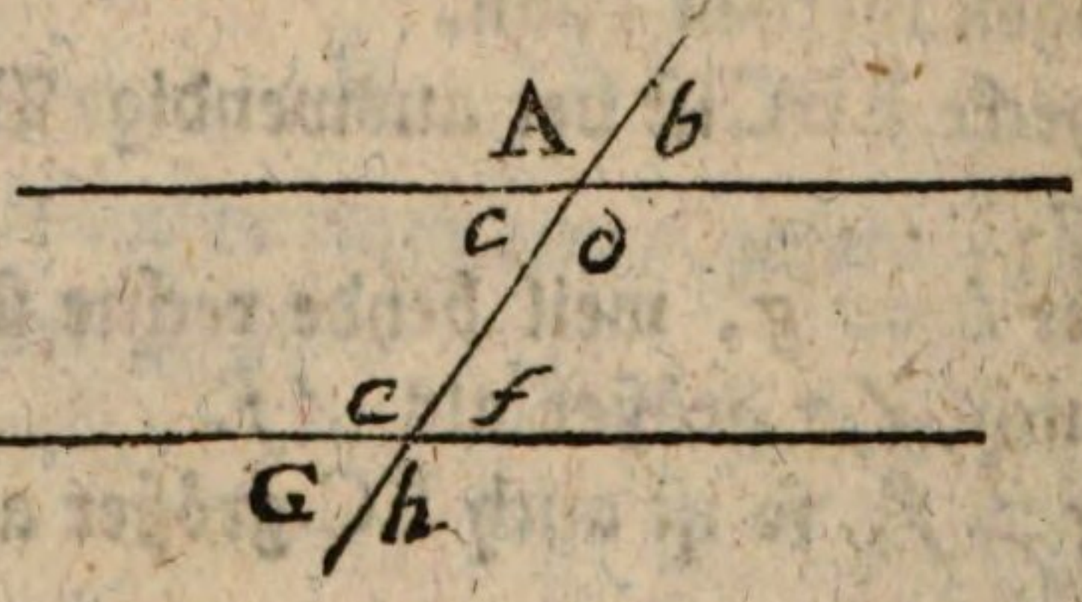
Wenn zwey gerade Linien von einer dritten so geschnitten werden, daß ungleiche Wechsel-Winkel entstehen, so begegnen die geschnittenen Linien irgendwo einander in einem Punkte, wenn sie genugsam verlängert werden.



Gesetzt die geraden Linien CD und EF werden von der geraden Linie GH so geschnitten, daß die Wechselecken ungleich sind, und z. E. $a > b$, so kann ich mir ein Dreyeck LIK vorstellen, wovon b ein inwendiger und a der auswendige Winkel ist, und worin b nothwendig kleiner seyn muß als a. (§. 27)

§. 35.

Wenn zwey gerade Linien von einer dritten so geschnitten werden, daß gleiche Wechselwinkel oder gleiche homologe Winkel entstehen, oder daß jegliche zwey inwendige oder auswendige Winkel, die auf einerley Seite liegen, zweyen rechten gleich sind, so sind beyde geschnittene Linien parallel.



1) Ge-

I) Gesetzt es sind die Wechselwinkel *f* und *c* gleich, so können die geschnittene Linien nie zusammen treffen, so weit man sie auch verlängert.

Denn gesetzt sie träfen zusammen in I, so entstünde ein Dreyeck AIG, und der auswendige Winkel *f* müste größer seyn als der einwendige *c* (§. 27.), welches aber der Voraussetzung zuwider ist.

Gesetzt sie könnten in K zusammen treffen, so wäre im Dreyecke AKG der auswendige Winkel *e* größer als *d*. Dieses ist aber unmöglich. Denn da $f = c$, so sind auch die Neben-Winkel $e = d$. (§. 12.)

Wenn $\angle A = \angle h$, so sind auch die Scheitelwinkel $d = e$ (§. 18.). Wenn $\angle b = \angle G$, so ist auch $c = f$ (§. 18.) und der Beweis wird der nemliche.

II) Ist $b = f$, so ist auch $c = f$, weil $b = c$ (§. 18.). Wenn $d = h$, so ist auch $d = e$, weil $h = e$. Wenn $A = e$, so ist auch $d = e$, weil $A = d$. Wenn $c = G$, sonst auch $c = f$, weil $G = f$. Wenn also die homologen Winkel gleich sind, so sind auch die Wechsel-Winkel gleich, und die geschnittenen Linien sind gleichlaufend, wie im ersten Falle bewiesen worden.

III) Es sey $c + e = 2\,\text{R}$

es ist auch $f + e = 2\,\text{R}$ (§. 13.)

daher $c + e = f + e$

folglich $c = f$

Es sey $d + f = 2\,\text{R}$

es ist $e + f = 2\,\text{R}$ (§. 13.)

also $d + f = e + f$

folglich $d = e$

Es sey $A + G = 2\,\mathfrak{R}$

es ist $A = d$ und $G = f$

folglich $d + f = 2\,\mathfrak{R}$

da nun $e + f = 2\,\mathfrak{R}$

so ist $d + f = e + f$

daher $d = e$

Es sey $b + h = 2\,\mathfrak{R}$

so ist $c + e = 2\,\mathfrak{R}$ (weil $b = c$ und $h = e$)

da nun $f + e = 2\,\mathfrak{R}$

so ist $c + e = f + e$

daher $c = f$

Wenn also zwey auf einerley Seite liegende auswendige oder inwendige Winkel so viel als zwey rechte machen, so sind die Wechselwinkel gleich, folglich sind die geschnittenen Linien vermöge des ersten Falles wiederum gleichlaufend.

§. 36.

Wenn zwey Parallel-Linien von einer geraden Linie geschnitten werden, so sind die Wechselwinkel gleich, auch sind die homologen Winkel gleich, und jegliche zwey auf einerley Seite liegende inwendige oder auswendige Winkel, machen so viel als zwey rechte. Siehe die vorige Figur.

1) Sind beyde geschnittene Linien parallel, so müssen sie nirgends zusammentreffen, wenn man sie verlängert (1. §. 17.). Wären aber die Wechselwinkel als e und d, oder c und f ungleich, so würden die geschnittenen Linien irgendwo zusammentreffen (§. 34.). Die Wechselwinkel e und d, e und f können also nicht anders als gleich seyn.

Ist $c = f$, so ist auch $e = d$ (§. 12.). Ist $c = f$, so ist auch $b = G$. Ist $e = d$, so ist auch $A = h$ (§. 18.).

So bald also zwey Wechselwinkel gleich sind, so sind jegliche andere zwey auch gleich.

II) Ist $c = f$, so ist auch $b = f$ und $G = c$, weil $c = b$ und $G = f$. Ist $e = d$, so ist auch $A = e$, und $d = h$, weil $d = A$ und $d = h$. Also sind auch die homologen Winkel gleich.

III) Weil $c = f$, so ist $c + e = f + e = 2\,\Re$

und $f + d = c + d = 2\,\Re$

Weil $A = e$

$G = c$

so ist $A + G = e + c = 2\,\Re$

Weil $b = f$

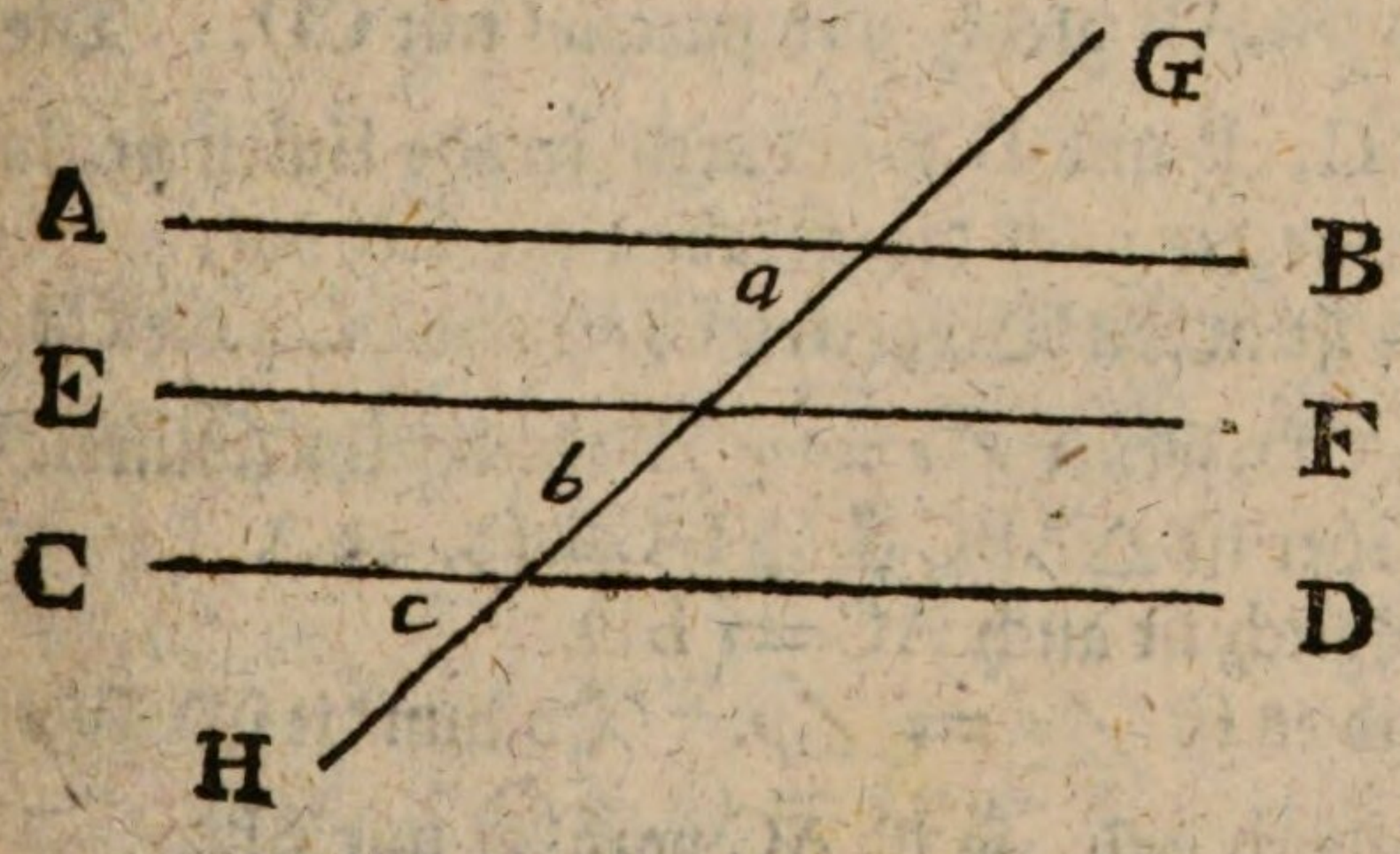
$h = d$

so ist $b + h = d + f = 2\,\Re$

Also machen jegliche zwey Winkel $d + f$, $e + c$, $b + h$ $A + G$, so viel als zwey rechte.

§. 37.

Wenn zwey gerade Linien jede mit einer dritten parallel sind, so sind sie auch unter einander parallel.



Es seyen AB und CD jede parallel mit EF. Es sey GH eine gerade Linie welche AB, EF und CD schneidet.

So ist $\angle a = \angle b$, als homologe Winkel, weil AB mit EF parallel ist. (§. 36.)

Desgleichen ist $\angle c = \angle b$, weil CD mit EF parallel ist.

Da nun

$$\angle a = \angle b$$

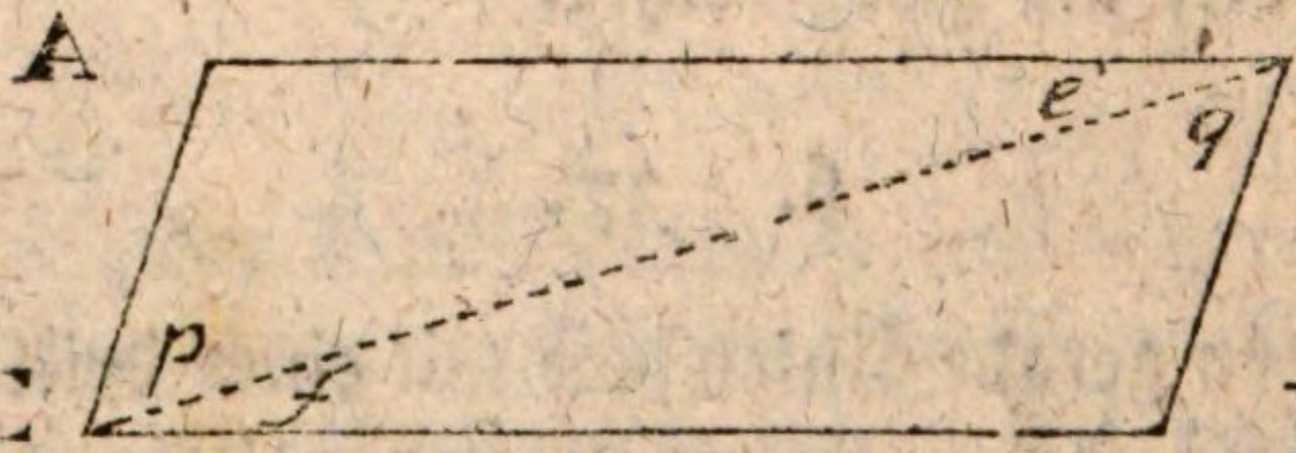
und $\angle c = \angle b$

so ist $\angle a = \angle c$

folglich ist AB parallel mit CD (§. 35.)

§. 38.

Wenn zwey gerade Linien gleich und parallel sind, so sind die geraden Linien, welche ihre Enden auf einerley Seite verbinden, auch gleich und parallel.



Es sey AB gleich und parallel mit CD. Die Enden A und C, B und D sind durch gerade Linien verbunden.

Stelle dir noch die gerade Linie CB vor.

So ist in den Dreyecken CDB und BCA die CB = CB, AB = CD, ferner $\angle e = \angle f$. als Wechselwinkel. (§. 36.)

Daher ist $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ (§. 22.)

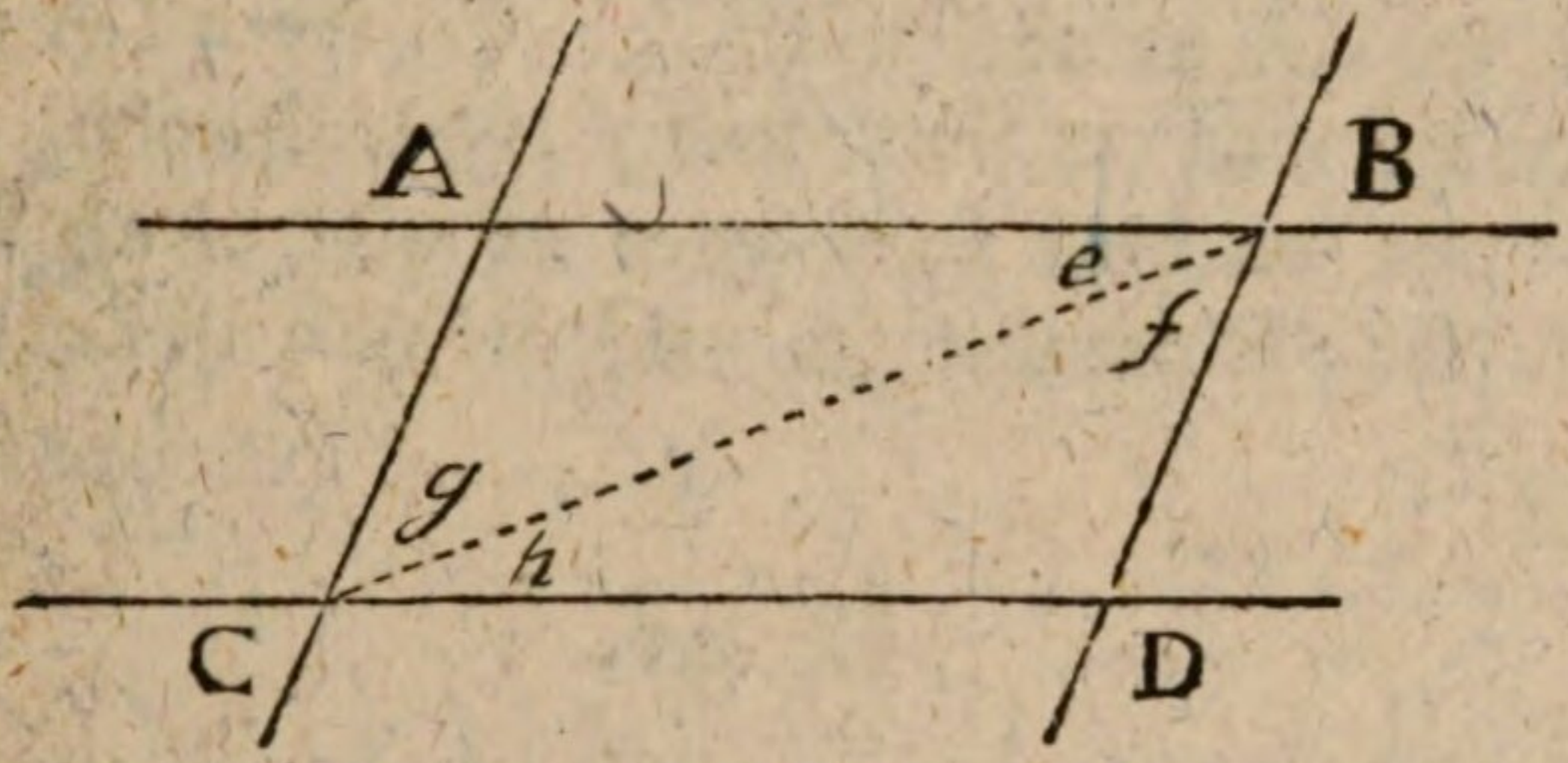
Folglich ist auch AC = BD.

Und es ist $\angle q = \angle p$. Da nun die Wechselwinkel p und q gleich sind, so ist AC parallel mit BD.

Zusatz. Man kann auch diesen Satz also umkehren: wenn zwey Linien AB und CD gleich sind, und sie werden durch gleiche Linien AC und BD verbunden, so sind sowohl AB und CD, als auch AC und BD parallel. Denn in diesem Falle läßt sich sehr leicht beweisen, daß $\triangle ABC \cong \triangle DCB$, und folglich $\angle e = \angle f$, $\angle q = \angle p$, daher dann folget, daß AB mit CD, und BD mit AC parallel sind.

§. 39.

Wenn zwey Parallel-Linien von zwey andern Parallel-Linien geschnitten werden, so sind die gegenüberstehenden Theile, wie auch die gegenüberstehenden Winkel gleich.



Es sey AB parallel mit CD, und AC parallel mit BD. Ziehe CB, so ist

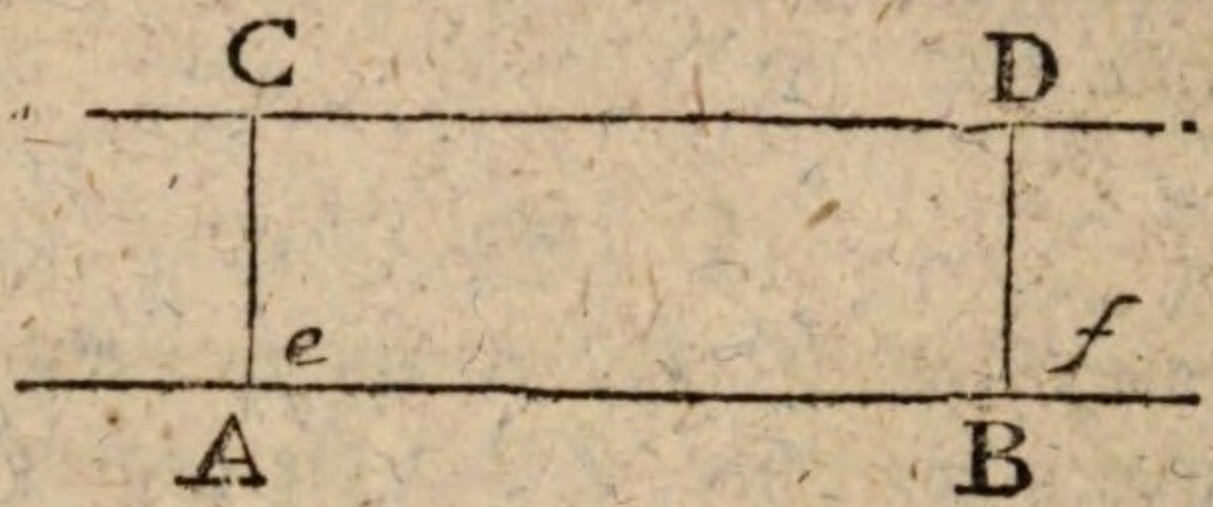
$$\angle e = \angle h \text{ (§. 36.)}$$
$$\angle g = \angle f$$
$$CB = CB$$

folglich $\triangle BAC \cong \triangle CDB$ (§. 23.) folglich $AB = CD$ und $AC = BD$, desgleichen $\angle A = \angle D$, und weil

$$\angle e = \angle h$$
$$\angle f = \angle g$$
$$\text{so ist } \angle (e + f) = (g + h)$$

§. 40.

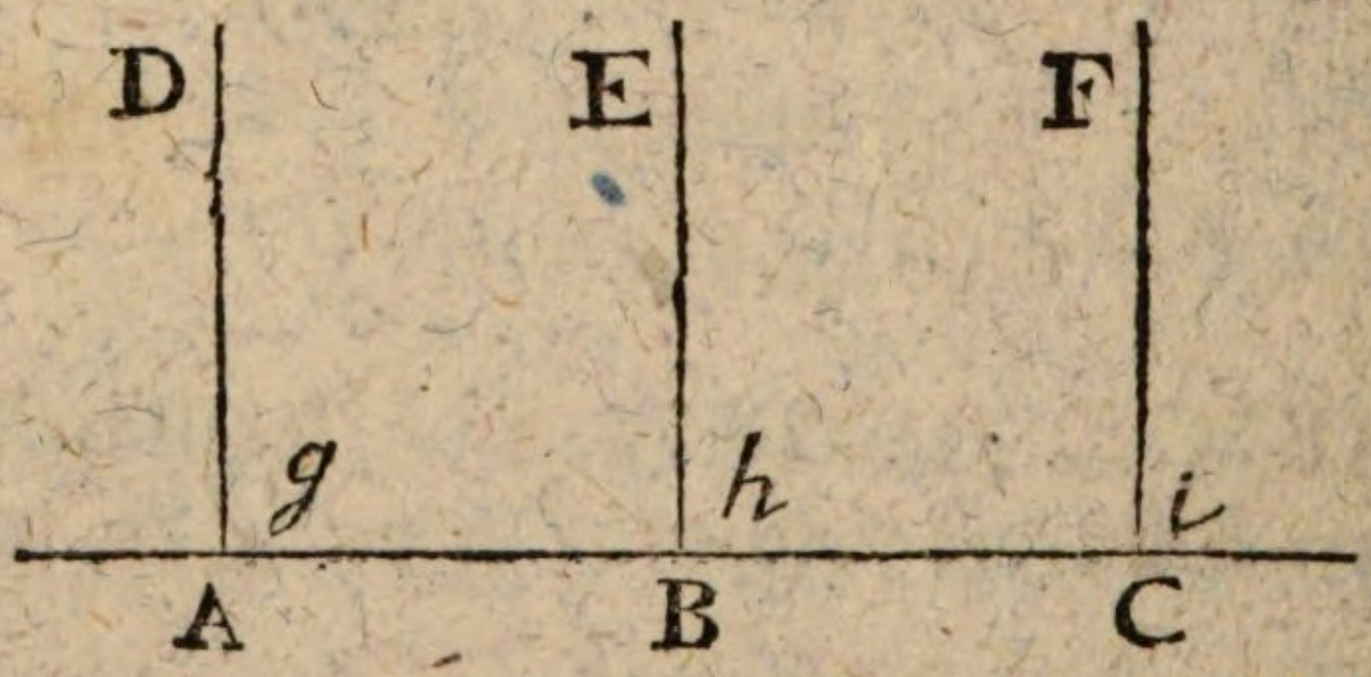
Wenn zwey gerade Linien parallel sind, so sind die senkrechten Linien, die von jedem Punkte der einen auf die andere gezogen werden, einander gleich.



Es sey CD parallel mit AB. Es seyen CA und DB senkrecht auf AB, so sind *e* und *f* rechte Winkel, folglich gleich, und da diese homologen Winkel gleich sind, so sind AC und BD parallel (§. 35.) folglich ist CA = DB. (§. 39.)

§. 41.

Wenn zwey oder mehr gerade Linien auf der nemlichen geraden Linie senkrecht stehen, so sind sie parallel.



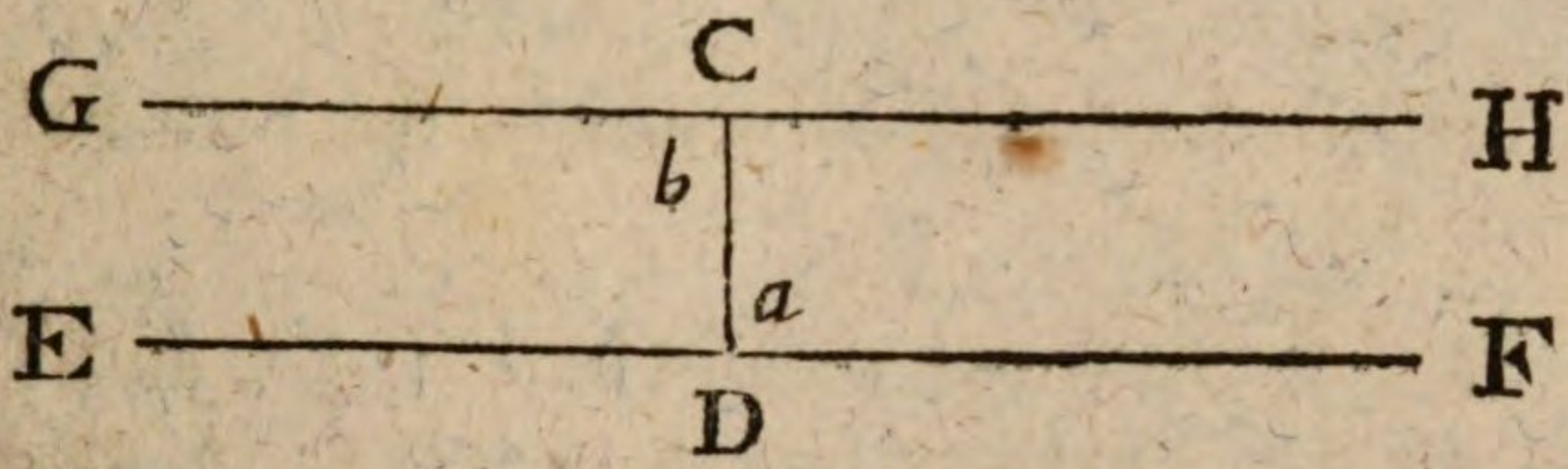
Es seyen DA, EB, FC senkrecht auf AC, so sind *g*, *h*, *i* rechte Winkel, da nun diese homologen Winkel

gleich

gleich sind, so ist DA parallel mit EB, und EB parallel mit CF, folglich sind alle drey Linien DA, EB, FC parallel (§. 37.), und so mit mehreren.

§. 42.

Wenn eine gerade Linie auf einer von zwey parallel-Linien senkrecht stehet, so stehet sie auch auf der andern senkrecht.



Es sey GH parallel mit EF, und CD senkrecht auf EF, so ist *a* ein rechter Winkel, folglich ist auch der Wechselwinkel *b* ein rechter (§. 36.) folglich ist DC auch senkrecht auf GH.

§. 43.

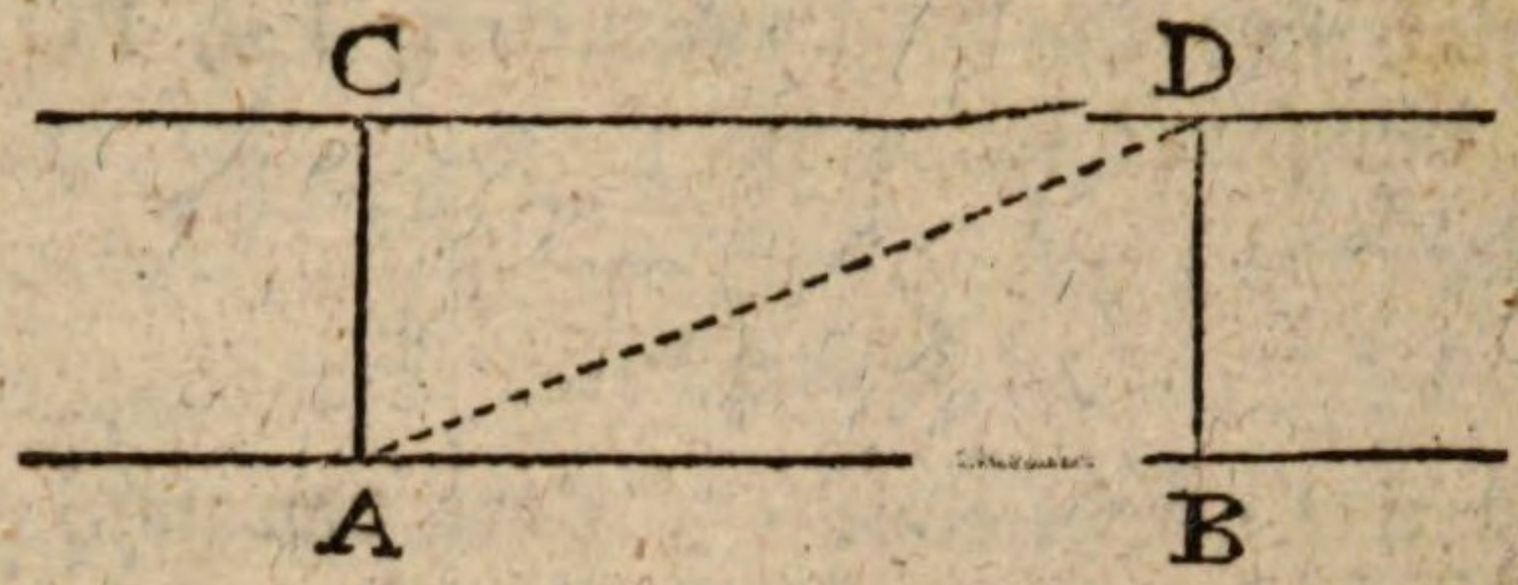
Wenn eine gerade Linie auf zwey andern senkrecht stehet, so sind diese beyden parallel.

(Siehe die vorhergehende Figur.)

Es sey CD senkrecht, sowohl auf GH als auf EF, so ist sowohl *b* als *a* ein rechter Winkel. Also $a = b$. Da nun diese Wechselwinkel gleich sind, so ist GH parallel mit EF. (§. 25.)

§. 44.

Wenn von zwey Punkten einer geraden Linie auf eine andere zwey gleiche senkrechte Linien fallen, so sind erstere zwey gerade Linien parallel.



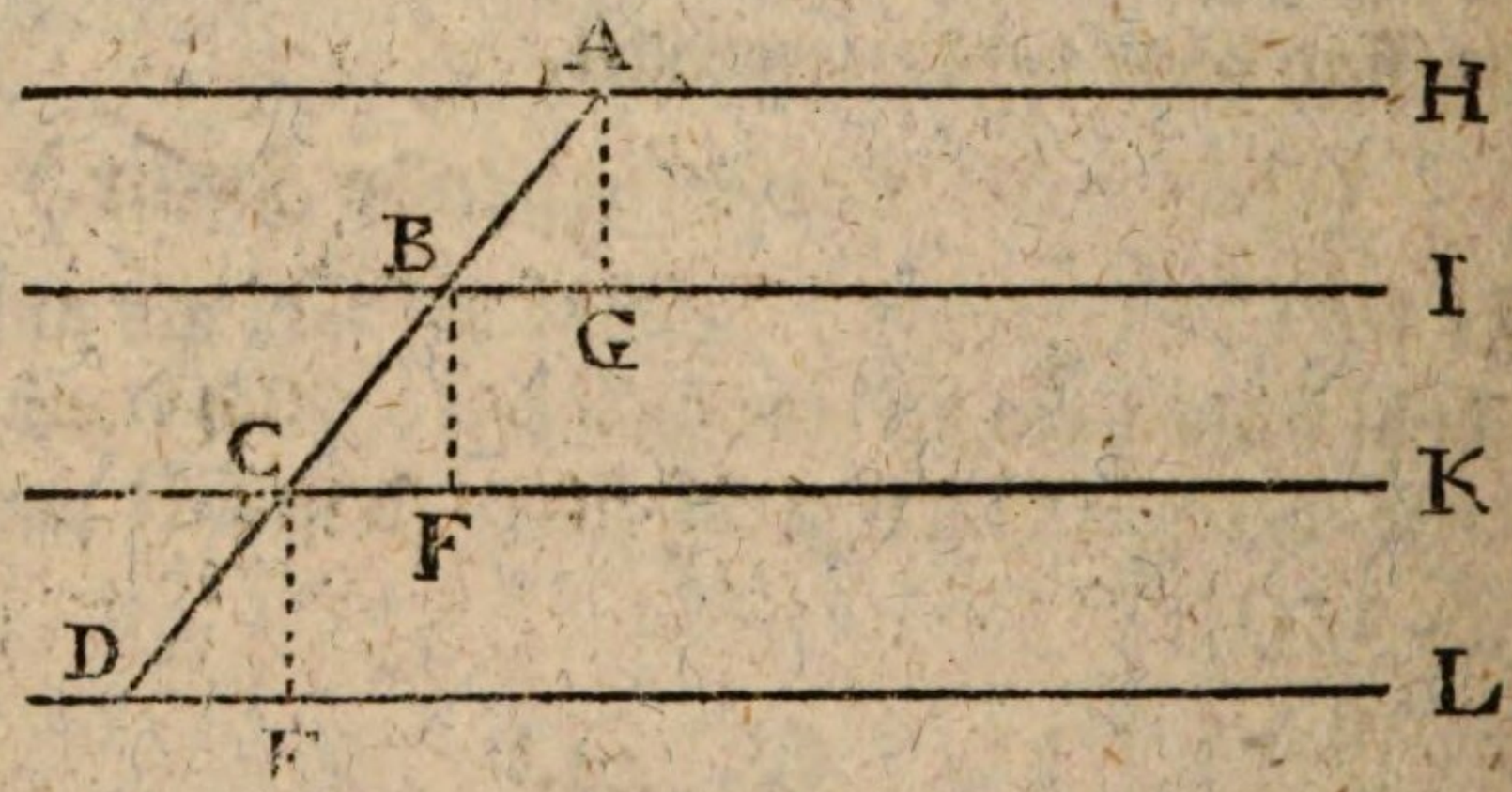
Es seyen CA und DB gleich, und beyde senkrecht auf AB.

Weil sie beyde auf AB senkrecht sind, so sind sie parallel. §. 41.)

Weil sie gleich und parallel sind, so sind auch CD und AB, die ihre Enden verbinden, parallel. (§. 38.)

§. 45.

Wenn eine gerade Linie von verschiedenen Parallel-Linien geschnitten wird, die in gleicher Entfernung von einander liegen, so sind die abgeschnittenen Theile gleich.



Es werde die Linie AD von den Parallel-Linien AH, BI, CK, DL geschnitten, die in gleicher Entfernung von einander liegen.

Da die Entfernung gleich ist, so ist AG = BF = CE.

Weil

Weil AG und FB auf BI senkrecht sind, so sind sie parallel (§. 41.) Weil BF und CE auf CK senkrecht sind, so sind sie auch parallel (§. 41.) Also sind AG, BF, CE parallel, folglich sind die homologen Winkel BAG, CBF, DCE gleich.

Auch sind die Winkel BGA, CFB, DEC gleich, weil sie alle recht sind.

Daher sind die Dreyecke AGB, BFC, CED ähnlichgleich. (§. 23.)

Folglich sind die Theile AB, BC, CD gleich.

§. 46.

Wenn eine gerade Linie in gleiche Theile getheilet ist, und es laufen Parallel-Linien durch durch die Theilungs-Punkte, so sind solche Parallel-Linien in gleicher Entfernung.

(Siehe die vorhergehende Figur.)

Es sey AB = BC = CD, und durch die Punkte A, B, C, D seyen in beliebiger Richtung die Parallel-Linien AH, BI, CK, DL gezogen.

Ziehe die senkrechten Linien AG, BF, CE.

So sind AG, BF, CE parallel, wie im vorigen Paragraph gezeiget worden. Folglich sind die homologen Winkel BAG, CBF, DCE gleich.

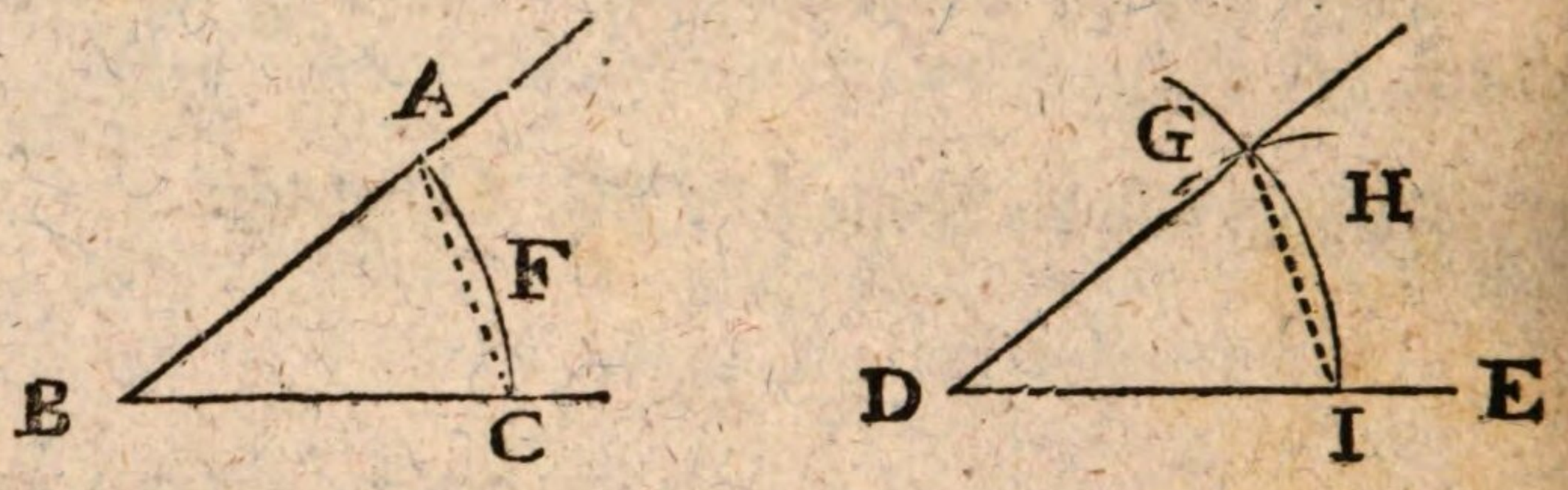
Da nun auch die Seiten AB, BC, CD gleich angenommen werden, so sind die Dreyecke ABG, BCF, CDE ähnlichgleich (§. 23.)

Folglich ist AG = BF = CE, das ist, die Entfernungen der Parallel-Linien sind gleich.

§. 47.

Aufgabe.

Es ist ein Winkel und eine gerade Linie gegeben. Am Ende der geraden Linie soll man einen Winkel stellen, der dem gegebenen gleich sey.



Auflösung. Am Ende D der Linie DE soll ein Winkel gestellet werden, der dem Winkel ABC gleich sey.

Aus dem Scheitel B beschreibe mit einem beliebigen Halbmesser einen Zirkel oder Zirkelbogen AFC.

Mit dem nemlichen Halbmesser beschreibe aus D einen Zirkel oder Zirkelbogen IHG.

Ziehe wirklich oder in Gedanken die gerade Linie AC.

Mit dem Halbmesser AC beschreibe aus I einen Zirkel oder Zirkelbogen, der den anderen irgendwo in G schneiden wird, und ziehe GD. So ist ∠D = ∠B.

Beweis. Ziehe noch zum Beweise die gerade GI.

Weil die Bogen GHI und AFC mit gleichen Halbmessern beschrieben sind, so ist DG = DI = BC = BA.

Weil der andere Bogen in G aus I mit dem Halbmesser CA beschrieben ist, so ist IG = CA (§. 11.)

In den Dreyecken ABC und GDI ist demnach

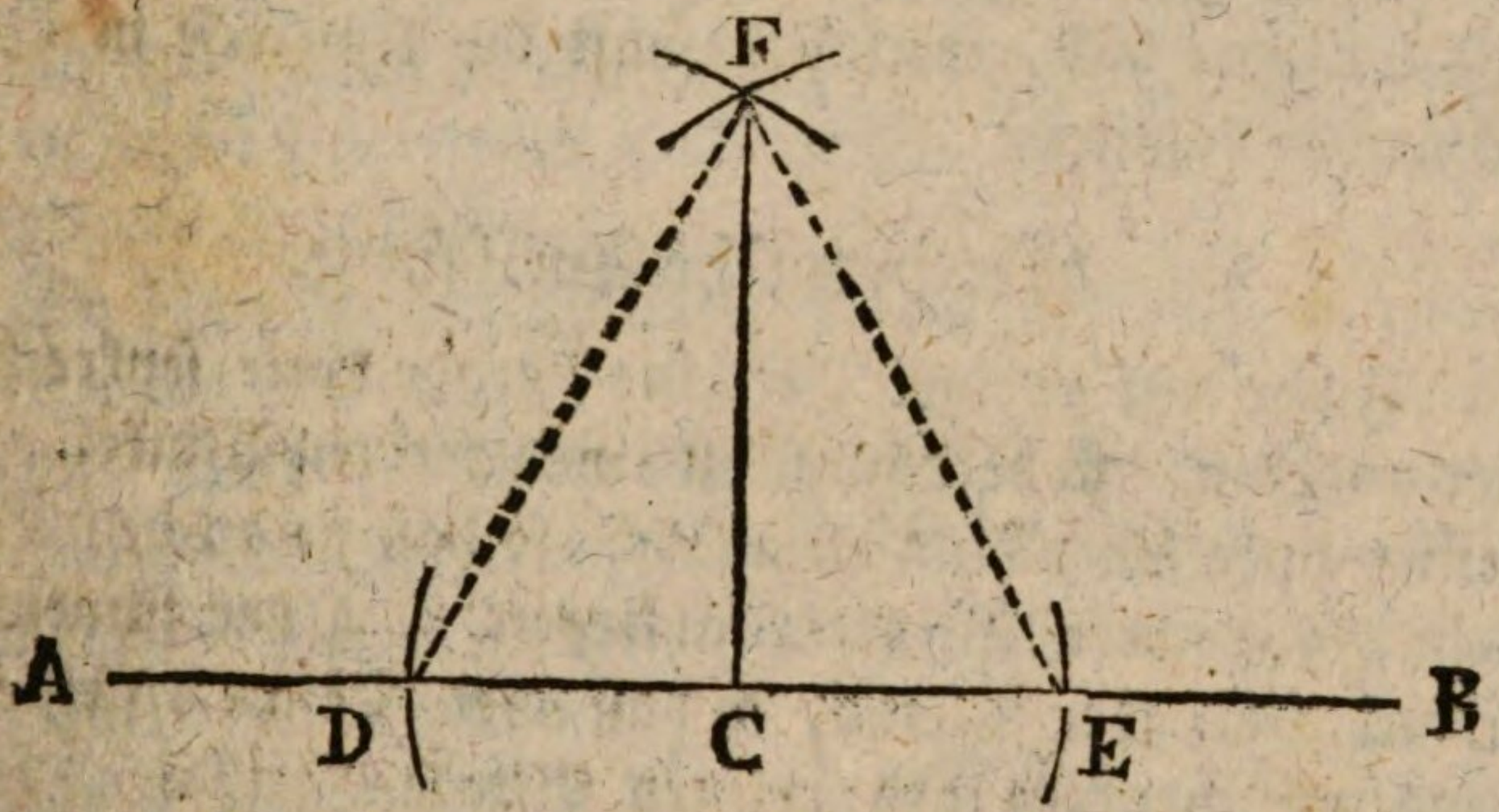
AB = GD
BC = DI
CA = IG

Also ist auch der Gegenwinkel der IG gleich dem Gegenwinkel der CA (§. 26.)
Oder es ist ∠D = ∠B.

§. 48.

Aufgabe.

Es ist eine gerade Linie und ein Punkt in ihr gegeben. Ueber diesem Punkte soll eine Linie senkrecht auf der gegebenen errichtet werden.



Auflösung. Es sey gegeben, der Punkt C in der Linie AB.

Aus C beschreibe mit einem beliebigen Halbmesser einen Zirkel, der die AB irgendwo in D und E schneide, oder merke nur die Punkte D und E, wo der Umkreis durch die AB gehet.

Nimm einen größeren Halbmesser, und beschreibe damit aus D und E Zirkel oder Zirkelbogen, die sich irgendwo schneiden, als in F.

Ziehe FC, so ist FC senkrecht auf AB.

Beweis. Ziehe FE, und FD. CE ist = CD, weil sie beyde Halbmesser des nemlichen Zirkels sind.

EF

FF ist = DF, weil die Bogen oder Zirkel die durch F gehen, mit gleichen Halbmessern beschrieben sind.

In den Dreyecken FCE und FCD ist demnach

FC = FC

CE = CD

EF = DF

Also ist die Gegenecke der EF gleich der Gegenecke der DF, (§. 26.) oder

∠FCE = ∠FCD

Deswegen ist FC senkrecht auf DE oder auf AB (I §. 13.)

Der Halbmesser EF oder DF wird größer genommen als CE oder CD, weil sich sonst die Umkreise in F nicht schneiden könnten.

Mechanische Auflösung.

Ziehe auf voriger Art eine gerade Linie senkrecht auf der anderen so bekömmst du einen rechten Winkel. Befestige zwey Lineale an einander, so daß sie an den Schenkeln des rechten Winkels anliegen. Oder schneide ein Stück Holz oder Metall, so daß zwey Ränder desselben auf beyden Schenkeln des rechten Winkels passen, so hast du einen **Winkelhaken**, das ist, ein Instrument womit rechte Winkel und senkrechte Linien gezogen werden können.

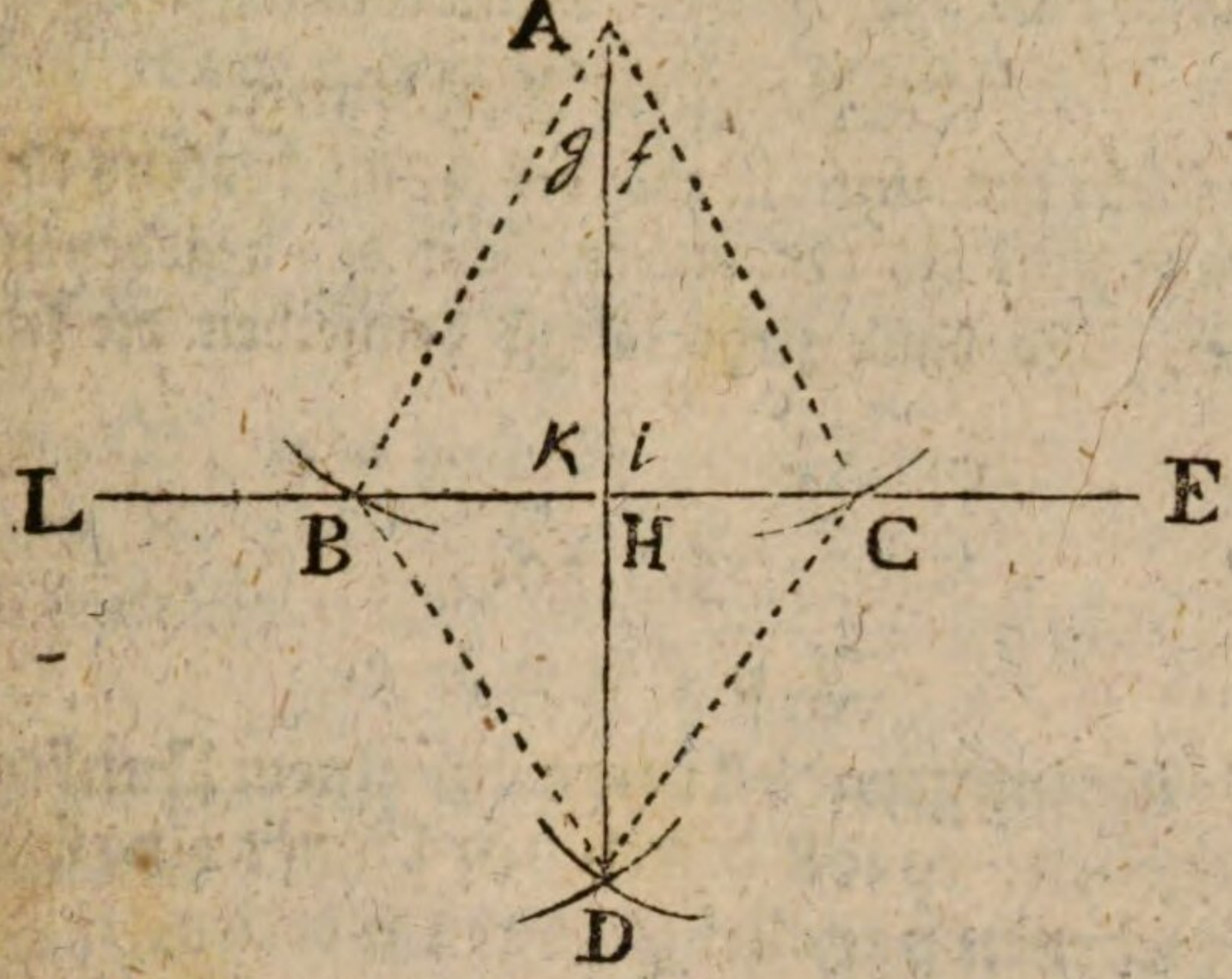
Die Spitze des Winkelhakens lege an den Punkt der in der Linie gegeben ist, den einen Rand an die Linie selbst. Längst dem anderen Rande ziehe die senkrechte Linie.

§. 49.

Aufgabe.

Es ist eine gerade Linie gegeben, und ein Punkt außerhalb derselben. Vom Punkte soll auf die Linie eine senkrechte Linie gefället werden.

Auflö-



Auflösung. Aus dem gegebenen Punkte A beschreibe einen Zirkel mit einem Halbmesser, der bis jenseit der gegebenen Linie reiche.

So schneidet der Umkreis die gerade Linie in zwey Punkten, als in B und C.

Aus B und C beschreibe mit demselben Halbmesser oder mit einem Halbmesser, der größer sey als die Hälfte der BC, zwey Kreise oder nur Bogen, die irgendwo unter BC einander schneiden, als in D.

Ziehe AD, so ist diese AD oder AH senkrecht auf LE.

Beweis. Ziehe AC, AB, DB, DC.

So ist in den Dreyecken ACD und ABD, AD = AD, DC = DB (§. 11), AC = AB (§. 11.)

Folglich $\angle f = \angle g$, weil diese Ecken den gleichen Seiten DC und DB gegenüber liegen. (§. 26.)

In den Dreyecken AHC und AHB ist $\angle f = \angle g$, wie jetzt bewiesen.

AC = AB (§. 11.)

AH = AH

Also ist auch $\angle i = \angle k$, weil sie den gleichen Seiten AC und AB gegenüber stehen. (§. 22.)

Da $\angle i = \angle k$, so ist AH senkrecht auf DE (I §. 13.)

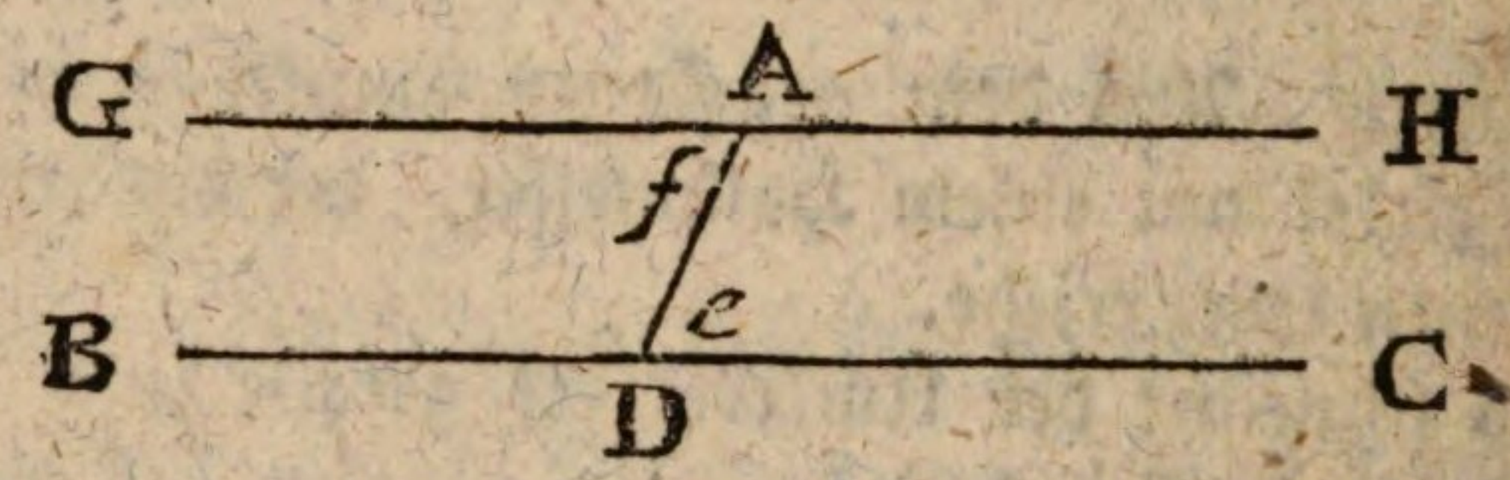
Mechanische Auflösung.

Schiebe den einen Rand des Winkelhakens längst der gegebenen Linie bis der andere Rand den gegebenen Punkt erreichet, und dann ziehe längst demselben die senkrechte Linie.

§. 50.

Aufgabe.

Es ist eine gerade Linie nebst einem Punkte außer ihr gegeben: es soll durch den Punkt eine Linie mit der gegebenen parallel gezogen werden.



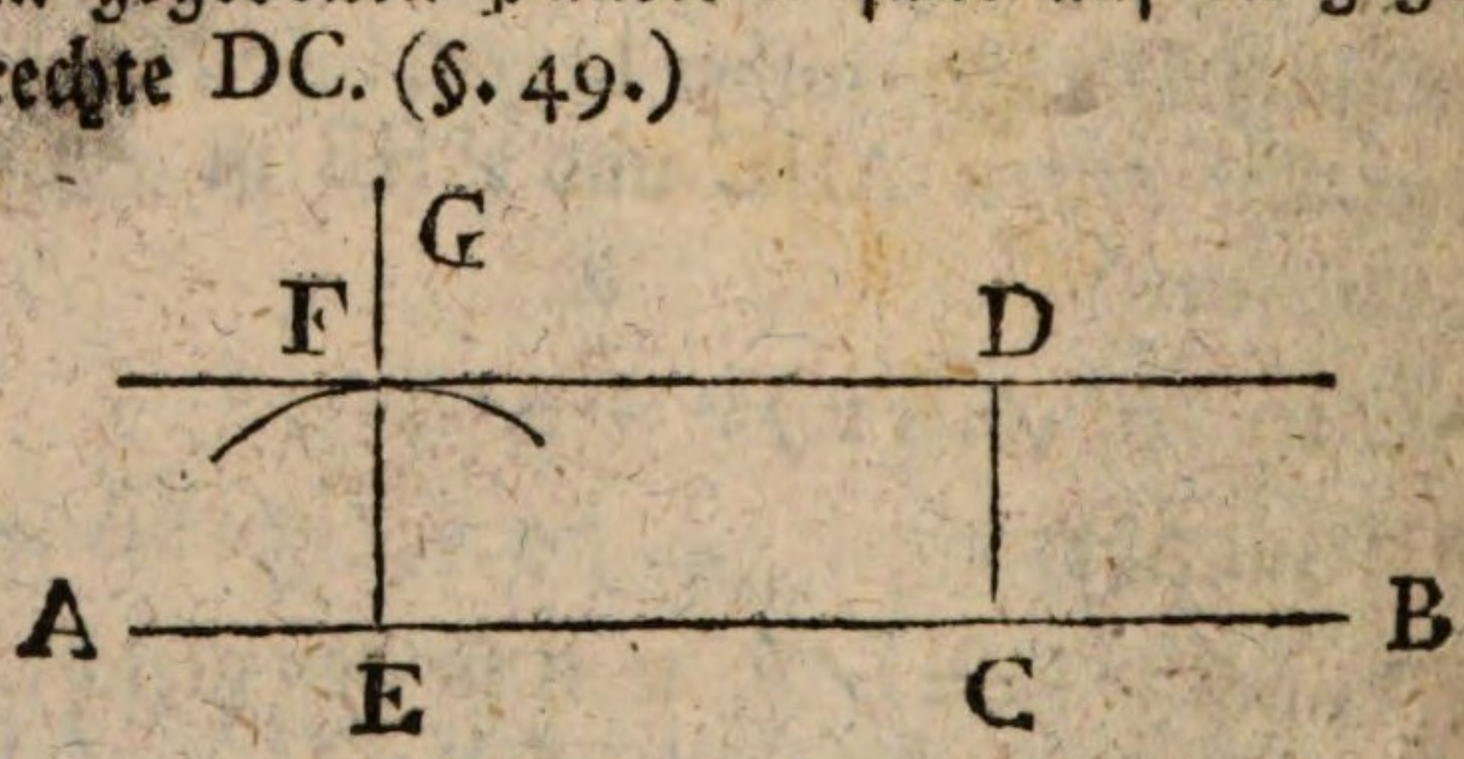
Auflösung und Beweis.

Es seyen die Linie BC und der Punkt A gegeben. Aus A ziehe willkürlich die gerade AD bis zur Linie BC.

Mache $\angle f$ gleich dem $\angle e$ (§. 47.). Verlängere den Schenkel AG so viel du willst, oder als nöthig ist, z. E. in AH, so ist GH parallel mit BC, weil die Wechselwinkel f und e gleich sind. (§. 35.)

Eine andere Auflösung mit Beweis.

Vom gegebenen Punkte D fälle auf die gegebene AB die senkrechte DC. (§. 49.)



Ueber

Ueber einem anderen Punkte in der Linie AB, zum Beyspiele in E, errichte EG senkrecht (§. 48.) und von unbestimmter Länge.

Mit dem Halbmesser CD beschreibe aus E einen Zirkel oder einen Bogen, der die EG irgendwo schneiden wird, als in F.

Ziehe DF, so ist diese DF parallel mit CE oder AB.

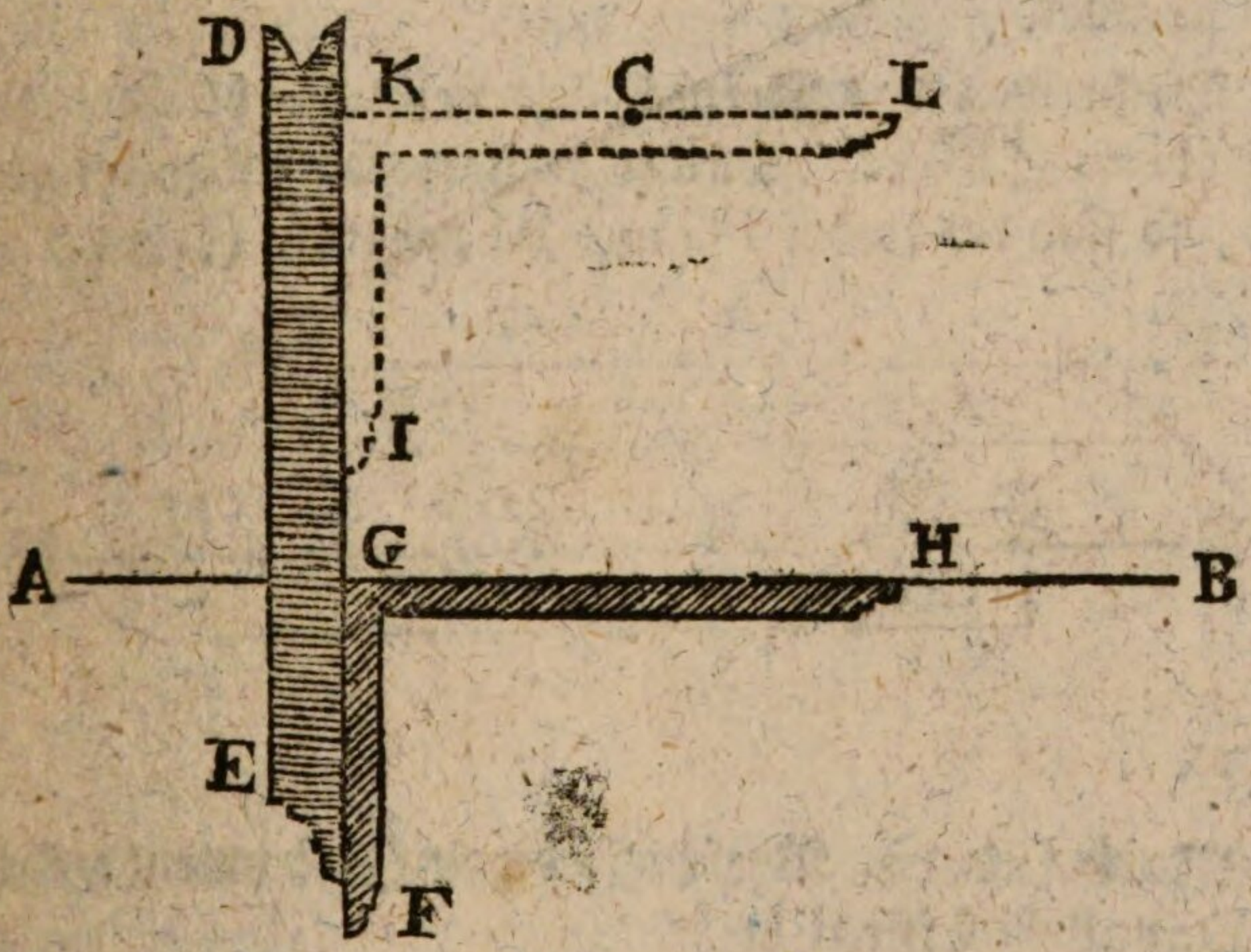
Denn EF ist der CD gleich. (§. 10.) Beyde sind auf AB senkrecht. Also ist DF mit CE parallel (§. 44.)

Mechanische Auflösung.

An die gegebene Linie AB lege den Rand GH eines Winkelhakens HGF.

Am andern Rande GF lege ein Lineal DE, und drücke es fest an die Ebene an.

Schiebe den Rand FG des Winkelhakens längst dem Lineale, bis der andere Rand den Punkt C berühret, und in die Lage KL kömmt.

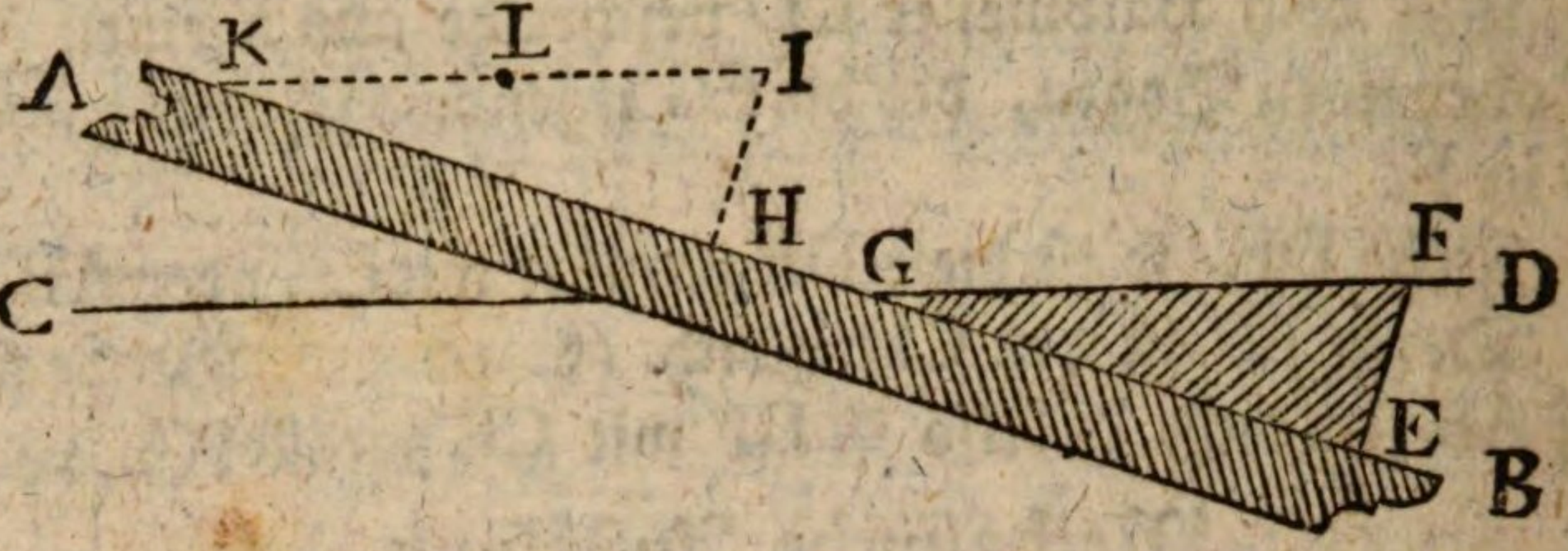


Ziehe eine gerade Linie längst KL, so ist sie parallel mit GH oder AB.

Denn beyde stehen senkrecht auf der grraden DE. (§. 41.)

Anders

Anders. Nimm ein hölzernes Dreyeck EGF, und lege eine Kante desselben, welche es auch sey, als GF an die gegebene CD.

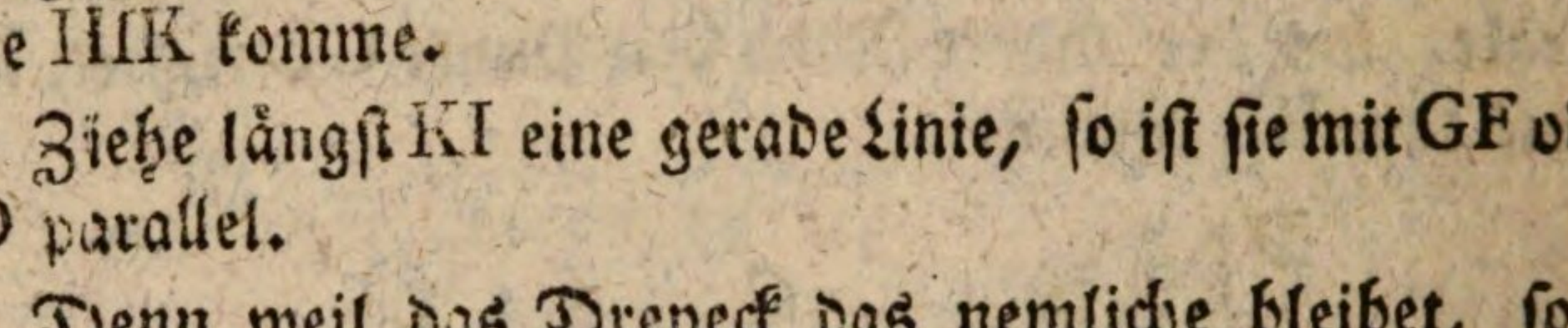


An einer der anderen Kanten, z. E. an GE lege ein Lineal AB.

Schiebe die Kante EG längst dem Lineale, (welches auf der Ebene festgehalten wird), bis die Kante GF den den gegebenen Punkt L erreiche, und das Dreyeck in die Lage IHK komme.

Ziehe längst KI eine gerade Linie, so ist sie mit GF oder CD parallel.

Denn weil das Dreyeck das nemliche bleibet, so ist ∠IKH = ∠FGE. Da also die homologen Winkel gleich sind; so sind die Linien FG und KI parallel. (§. 35.)



Noch anders. Verschaffe dir ein Instrument welches ein Parallel-Lineal heißt.

Es bestehet aus zwey Linealen GH und IK. Auf beyden muß man sich eine gerade Linie AB, CD vorstellen, die mit den Ränden parallel ist. In gleicher Entfernung von einander stehen die Punkte A und B, C und D. Von A

nach

nach C, und von B nach D gehen zwey kleinere Lineale AC und BD, welche von gleicher Länge sind, und mit beyden vorigen in den Punkten A, B, C und D verbunden sind, doch so daß sich die beyden Lineale IK und GH verschieben lassen.

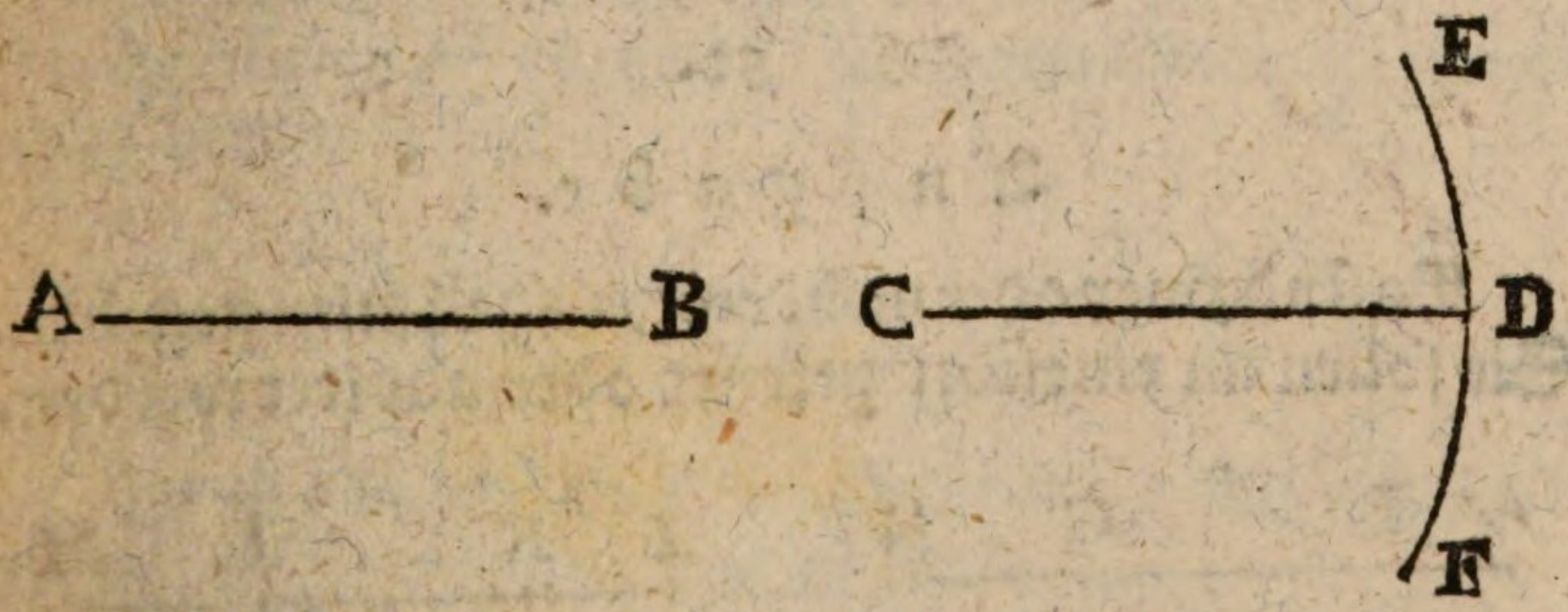
Lege das Lineal GH an die gegebene Linie EF, öffne das Instrument, bis das Lineal IK den gegebenen Punkt L berühret. Ziehe eine gerade Linie längst dem Rande IK, so ist sie mit EF parallel.

Denn weil allemal AB = CD, und AC = BD, so ist AB parallel mit CD, (§. 38. Zus.) und weil der Rand IK mit AB parallel ist, so ist er auch mit CD parallel. Weil ferner CD mit dem Rande GH parallel ist, so ist auch IK parallel mit GH oder mit EF.

§. 51.

Aufgabe.

Es ist eine gerade Linie und ein Punkt gegeben, Am Punkte soll eine gerade Linie geleget werden, die der gegebenen gleich sey.



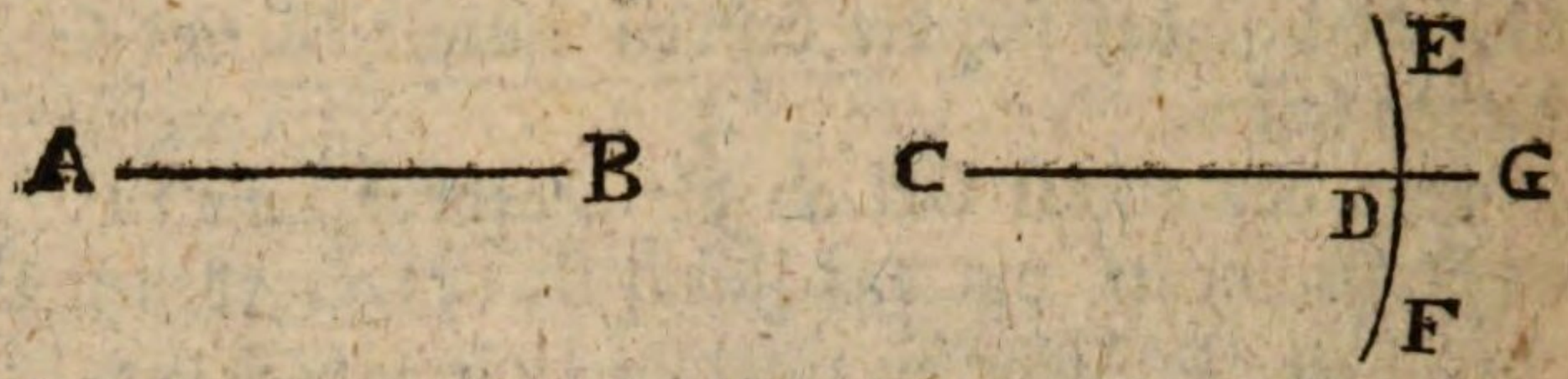
Auflösung. Die gegebene Linie sey AB, der gegebene Punkt sey C.

Mit dem Halbmesser AB, beschreibe aus C einen Zirkel oder nur einen Bogen EF.

Aus C ziehe nach einen beliebigen Punkt D des Umkreises die gerade CD.

So ist CD = AB. (§. 10.)

Anders. Von C aus ziehe die gerade CG von unbestimmter Länge, und nach einen beliebigen Punkt G hin.



Aus C mit dem Halbmesser AB beschreibe einen Umkreis oder Bogen EF, der die CG irgendwo in D schneiden wird.

So ist wiederum CD = AB (§. 10.)

Das Stück DG wird ausgelöschet oder aus der Acht gelassen.

Mechanische Auflösung.

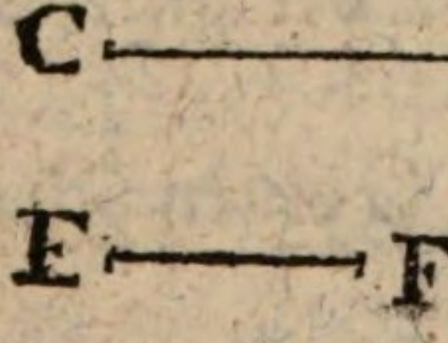
Siehe die vorhergehende Figur.

Ziehe wie vorher CG. Fasse mit den Spitzen des Zirkels die Punkte A und B. Lege die eine Spitze auf C und drücke die andere in D auf die gerade CG, so ist der Punkt D gemerket, und CD = AB.

§. 52.

Aufgabe.

Es sind zwey oder mehrere gerade Linien gegeben. Sie sollen an einander gesetzet oder addiret werden.



Auflö-

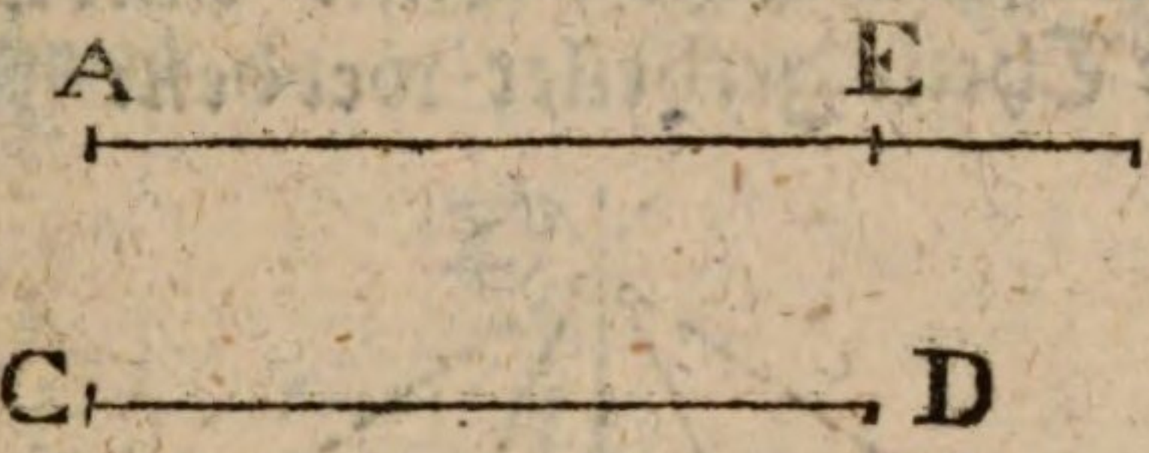
Auflösung. Es seyen gegeben, AB, CD, EF. Verlängere die eine, z. E. AB. Mache BG = CD, GH = EF, so ist AH = AB + CD + EF.

Anstatt AB zu verlängern, kann man auch eine neue Linie von unbestimmter Länge ziehen, und darauf nehmen IK = AB, KL = CD, LM = EF, so ist IM = AB + CD + EF.

§. 53.

Aufgabe.

Es sind zwey gerade Linien gegeben. Die kleinere soll von der größern abgenommen werden, oder es soll der Unterschied beyder Linien gefunden werden.

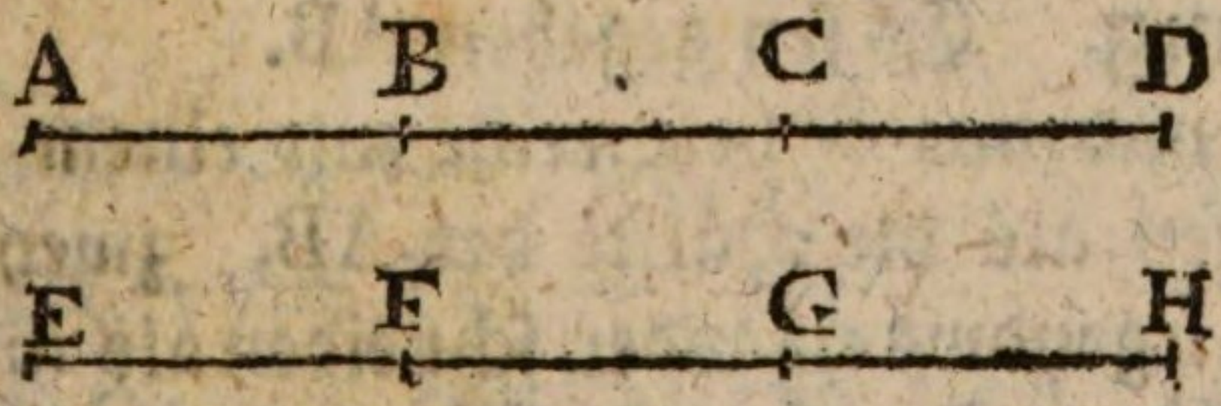


Auflösung. Die größere sey AB, die kleinere CD. Mache AE = CD (§. 51.). So bleibt EB als der Unterschied beyder Linien.

§. 54.

Aufgabe.

Es ist eine gerade Linie gegeben. Es wird ein Vielfaches derselben verlanget.



Auflösung. Es sey gegeben AB, und das Dreyfache derselben verlanget. Verlängere AB, und mache BC = AB, CD = AB. So ist AD = 3AB.

Oder ziehe eine andere gerade Linie, mache auf derselben EF = AB, FG = AB, GH = AB, so ist EH = 3AB.

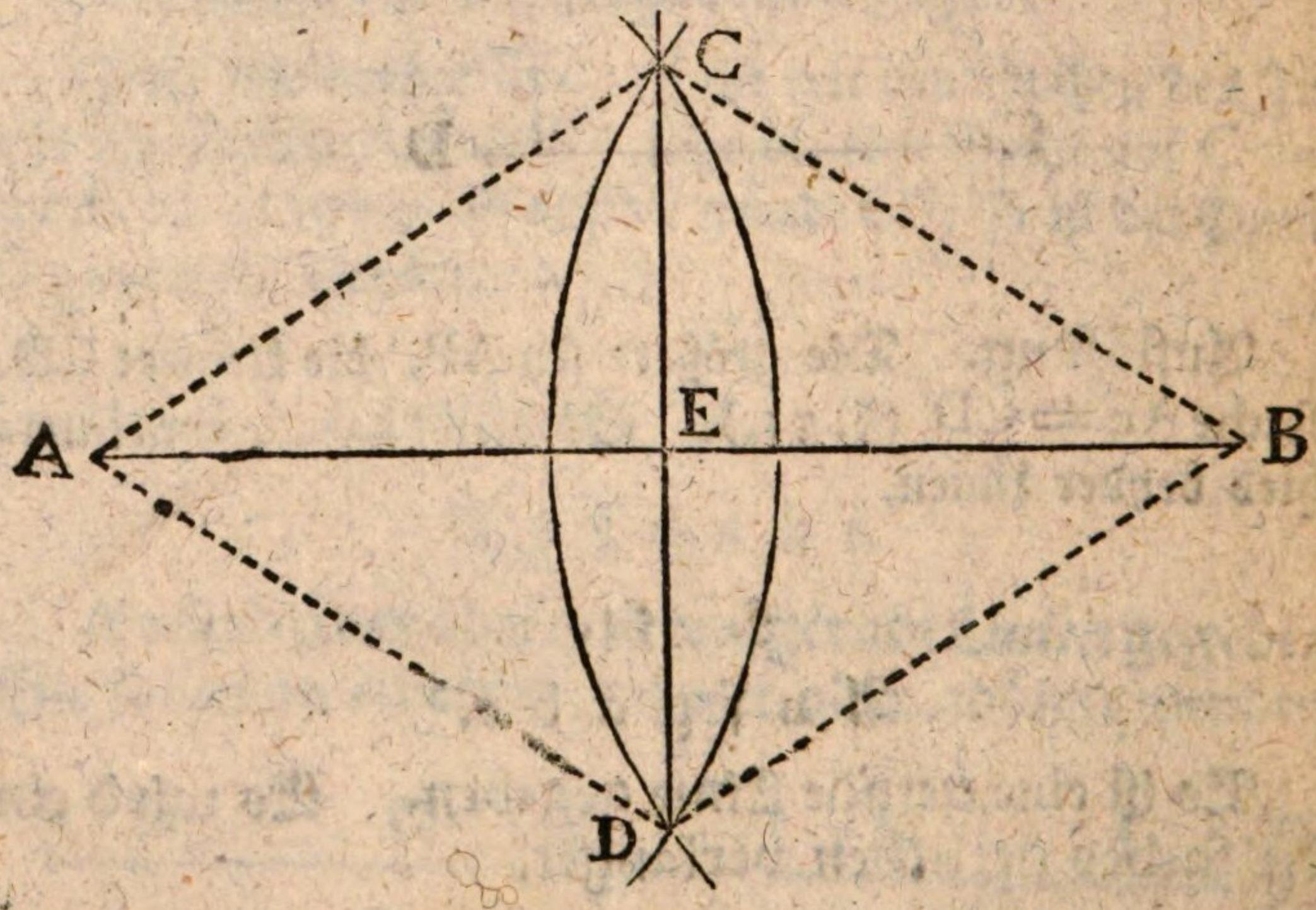
Mechanische Auflösung.

Um die Theile AB, BC, CD, oder EF, FG, GH gleich zu machen, braucht man nur die Spitzen des Zirkels wechselweise anzulegen, z. E. die eine in A, die andere in B, die erste wieder in C, die zweyte in D.

§. 55.

Aufgabe.

Es ist eine gerade Linie gegeben. Sie soll vermittelst einer senkrechten Linie halbiret oder in zwey gleiche Theile getheilet werden.



Auflösung. Es sey gegeben AB.

Aus A und aus B beschreibe mit einem Halbmesser, der größer sey als die Hälfte der AB, zwey Kreise oder Bogen, die irgendwo einander schneiden als in C und in D.

Ziehe CD. So ist diese CD senkrecht auf AB, und theilet AB in zwey gleiche Theile AE = EB.

Beweis.

Beweis. Ziehe CB, CA, DB, DA.

In den Dreyecken CBD und CAD ist BC = AC, BD = AD (§. 11.) und DC = DC.

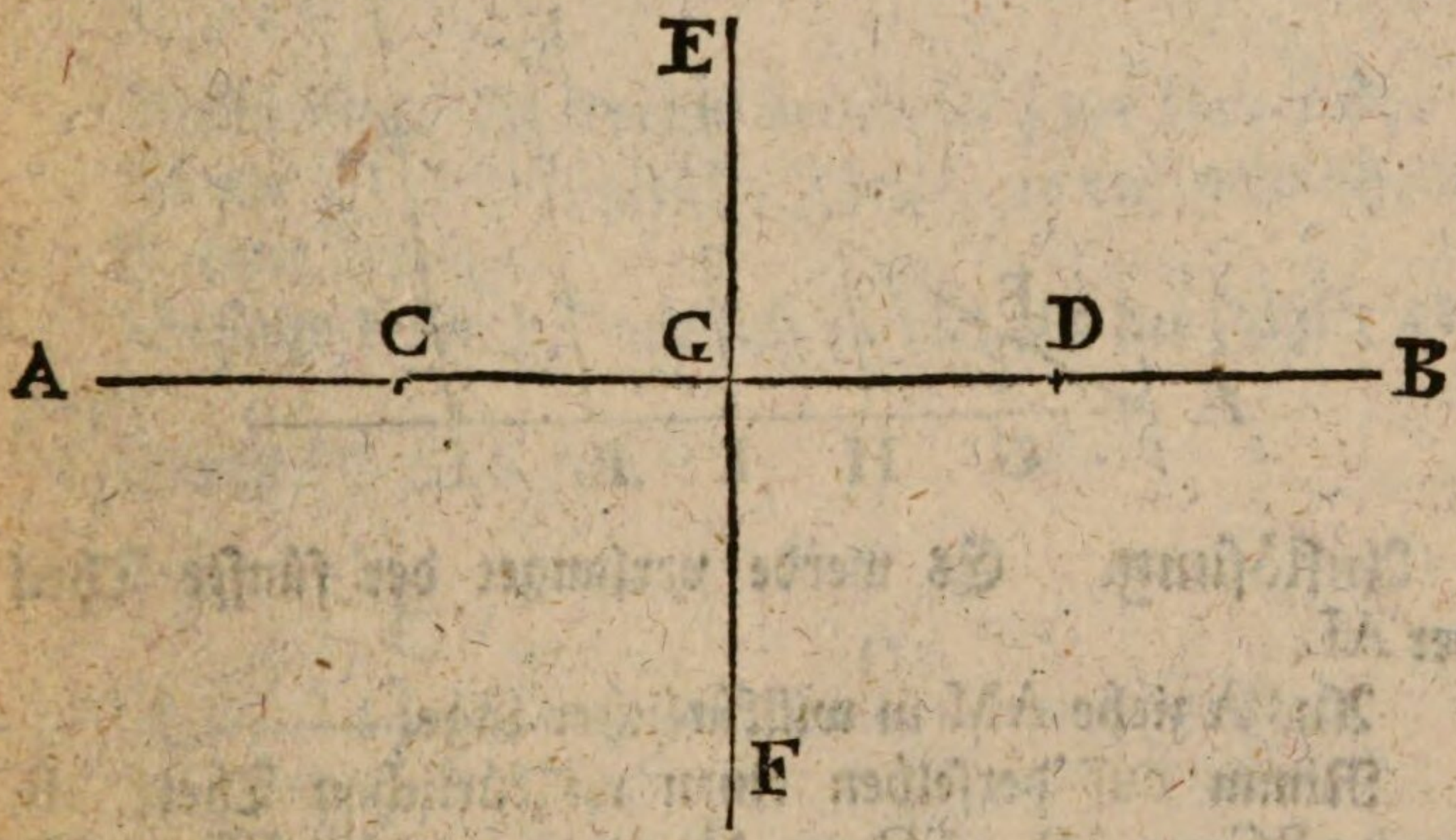
Also ist auch ∠ BCD als Gegenwinkel der BD gleich ∠ ACE, als Gegenwinkel der AD (§. 26.)

In den Dreyecken CEB, CEA ist also ∠ BCE = ∠ ACE. Es ist auch BC = AC (§. 11.), und CE = CE.

Also ist ∠ CEB als Gegenwinkel der BC, gleich ∠ CEA als Gegenwinkel der AC. (§. 22.) Folglich ist CE senkrecht auf AB (I §. 13.)

Es ist ferner EB, als Gegenseite des ∠ BCE gleich AE, als Gegenseite des ∠ ACE. (§. 22.) Also ist AE = EB.

Zusatz *I.* Wenn die Linie AB sehr lang ist, so kann man erstlich an beyden Enden beliebige gleiche Theile BD und AC abnehmen.



Alsdann wird das übrige CD, vermittelst der senkrechten EF in zwey gleiche Theile GC und GD getheilet. Denn

da GC = GD

und CA = DB

so ist GC + CA = GD + DB

oder GA = GB.

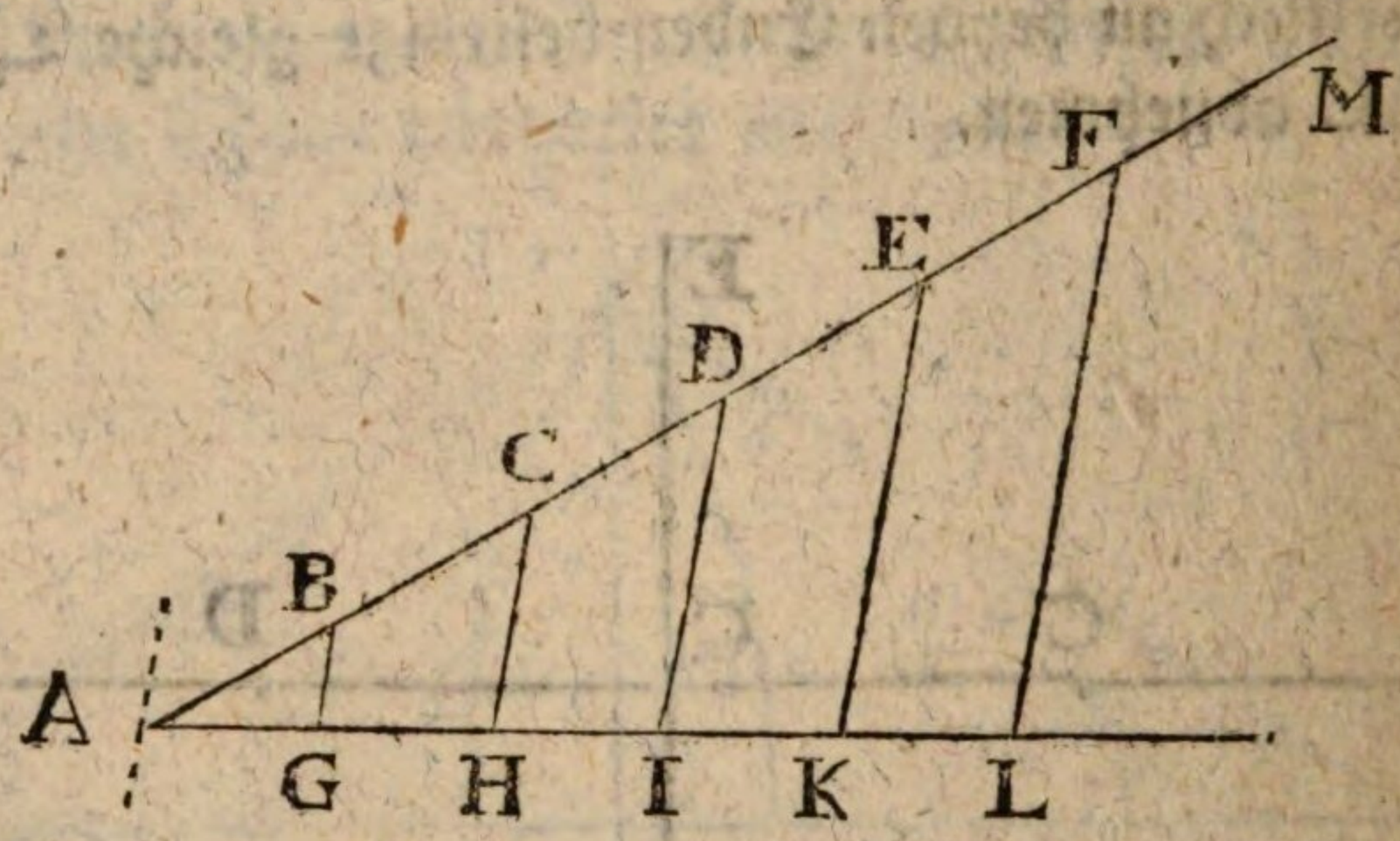
Zusatz *II.* Wenn man das vorgeschriebene Verfahren wiederholet, so kann man eine gerade Linie auf solche Art in 4, 8, 16 gleiche Theile u. s. f. eintheilen.

Zusatz *III.* Wenn der Durchmesser eines Zirkels gegeben ist, so darf man denselben nur halbiren, um den Halbmesser zu bekommen, und den Zirkel zu beschreiben. (I §. 21.)

§. 56.

Aufgabe.

Es ist eine gerade Linie gegeben. Es wird davon ein gewisser Theil verlanget, als die Hälfte, der dritte Theil, der vierte Theil, u. s. f.



Auflösung. Es werde verlanget der fünfte Theil der AL.

Aus A ziehe AM in willkürlicher Lage.

Nimm auf derselben einen willkürlichen Theil AB, mache BC = AB, CD = AB, DE = AB, EF = AB, so daß AF = 5 AB.

Ziehe FL. Durch den nächsten Punkt E ziehe EK parallel mit FL, so ist KL der fünfte Theil der AL.

Willst du auch die übrigen Theile haben, so trage KL in KI, IH, HG, GA.

Oder ziehe durch die übrigen Punkte D, C, B, gerade Linien DI, CH, BG, alle parallel mit FL.

Beweis. Ziehe durch A noch eine Parallel-Linie.

AF

AF bestehet aus fünf gleichen Theilen.

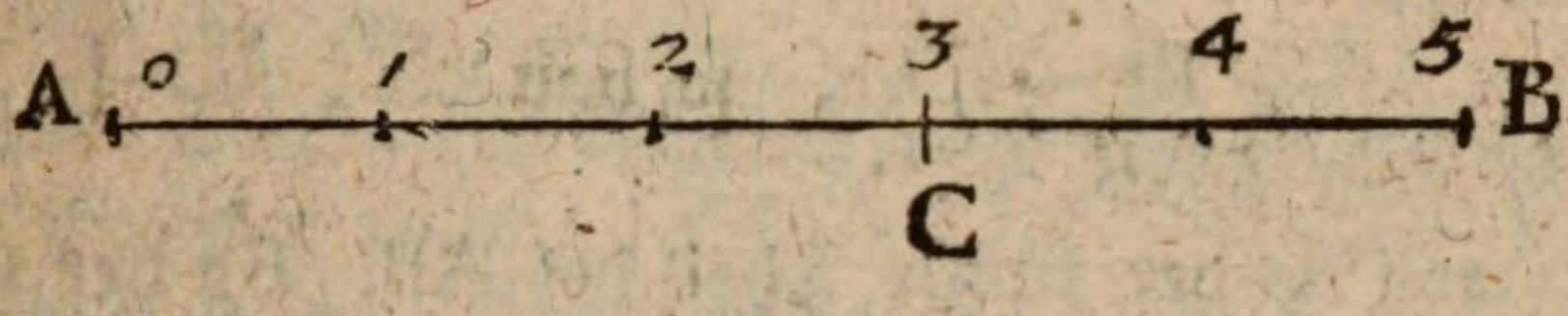
Also sind die Parallel-Linien, die durch F, E, D, C, B, A gehen in gleicher Entfernung (§. 46.)

Da sie in gleicher Entfernung sind, so schneiden sie die gerade AL in gleiche Theile. (§. 45.)

§. 57.

Aufgabe.

Es ist eine gerade Linie gegeben. Es wird ein Bruch derselben verlanget, als $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, u. s. f.

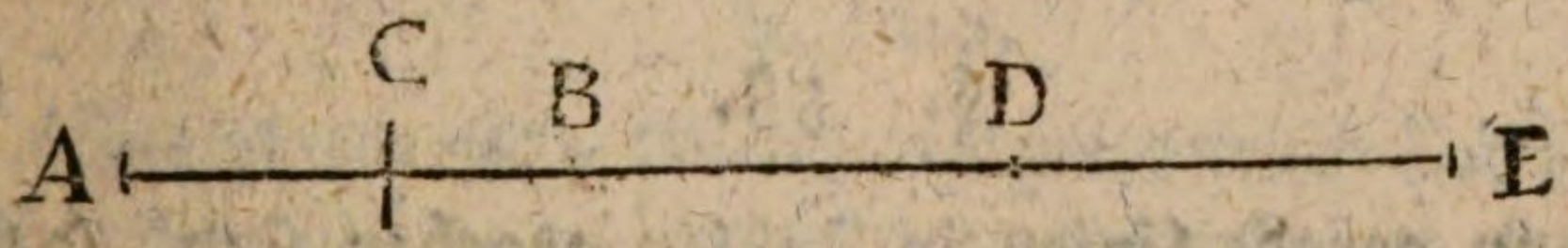


Auflösung. Es werden verlanget $\frac{3}{5}$ der Linie AB.

Theile AB in fünf gleiche Theile, so viel nemlich als der Nenner anzeiget.

Behalte deren 3, nemlich so viel als der Zähler anzeiget.

So ist $AC = \frac{3}{5}$ AB.

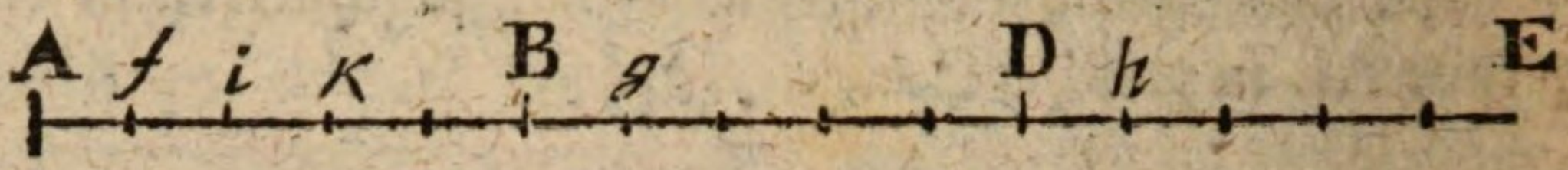


Anders. Mache die gegebene AB dreyfach, nemlich so vielfach, als der Zähler anzeiget, so daß $AB = BD = DE$, und $AE = 3$ AB.

Nimm von diesem Vielfachen, AE, den 5ten Theil AC (§. 56), nemlich den so vielten Theil als der Nenner anzeiget.

So ist $AC = \frac{3}{5}$ AB.

Beweis. Die erste Auflösung hat keine Schwierigkeit. Die zweyte kann man folgendermaßen erklären.



Nachdem gemacht worden AB = BD = DE, so sey jede dieser drey Linien in fünf gleiche Theile getheilet, so daß $Af = \frac{1}{5}$ AB, $Bg = \frac{1}{5}$ BD, $Dh = \frac{1}{5}$ DE.

Weil nun die Linien gleich sind, so sind ihre fünften Theile gleich.

Nimm $Af + Bg + Dh$, so hast du $\frac{1}{5}$ AB + $\frac{1}{5}$ BD + $\frac{1}{5}$ Dh, oder $\frac{3}{5}$ AB.

Und weil Af der fünfte Theil der AB, Bg der fünfte Theil der BD, Dh der fünfte Theil der DE ist, so ist $Af + Bg + Dh$ der fünfte Theil der ganzen AE (= 3AB).

Anstatt nun die Theile Af, Bg, Dh auf den Stücken AB, BD. DE zu nehmen, so nimm sie zusammen in Af, fi, ik, so ist auch Ak oder $\frac{3}{5}$ AB der fünfte Theil der AE.

Es ist also gleich viel, ob ich dreymal den fünften Theil der Linie AB nehmen, oder den fünften Theil der dreyfachen Linie AE.

§. 58.

Wenn gerade Linien in Zahlen gegeben sind, so wird deren Summe, Differenz, Vielfaches und Vieltheil auf arithmetischer Art gefunden.

Z. E. Eine Linie ist 5 Zoll und die andern 8 Zoll lang, so macht deren Summe 13 Zoll, und deren Differenz 3 Zoll.

Eine Linie ist 5 Fuß lang, so macht deren dreyfaches 15 Fuß, deren dritter Theil $1\frac{2}{3}$ Fuß.

Es werden $\frac{2}{3}$ von einer Linie verlanget, die 24 Zoll lang ist, so wird entweder 24 durch 3 dividiret, und der

Quozient

Quozient mit 2 multiplicirt, oder es werden 24 erstlich mit 2 multipliciret, und das Produkt durch 3 diviret. In beyden Fällen kommen 16 Zoll.

§. 59.

Wenn gerade Linien in Buchstaben gegeben sind, so wird deren Summe, deren Differenz, deren Vielfaches, deren Vieltheil, auf algebraischer Art durch Zeichen ausgedrücket.

Z. E. eine Linie a soll zu einer Linie b addirt oder zugesetzet werden, so ist die Summe die Linie $a + b$.

Eine Linie a soll von einer Linie b abgezogen werden, so bleibet die Linie $b - a$.

Eine Linie a soll dreymal vergrößert werden, so entstehet die Linie $3a$.

Von einer Linie a wird der dritte Theil verlanget, so ist dieser $\frac{1}{3}a$ oder $\frac{a}{3}$.

Von einer Linie a werden $\frac{3}{5}$ gefordert, so hat man $\frac{3}{5}a$ oder $\frac{3a}{5}$.

§. 60.

Eine algebraische Gleichung geometrisch konstruiren, heißt, die unbekannte Linie die darin enthalten ist, finden. Gleichungen, wo weiter nichts als einzelne Größen, mit bestimmten Koeffizienten und mit den Zeichen + und — vorkommen, können vermittelst obiger Aufgaben konstruirt werden.

Es sey $x = a + b + c$, so erhält man x, wenn man die Linien a, b, c geometrisch summiret, oder ein ganzes daraus machet.

Es sey $x = a - b + c - d$, so wird erstlich von der Linie a die Linie b abgenommen, zum Uebrigen wird c

angesetzet. Zuletzt wird wiederum d abgenommen, und was endlich herauskömmt ist x.

Oder man setzet erstlich die positiven Theile a nnd c an einander, desgleichen die negativen b und d. Zuletzt nimmt man die Summe der negativen Theile von den positiven ab.

Es sey $x = 5a$, so wird das fünffache der Linie a genommen.

Es sey $x = \frac{1}{5}a$ oder $x = \frac{a}{5}$, so wird der fünfte Theil der Linie a genommen.

Es sey $x = \frac{2}{3}a$ oder $x = \frac{2a}{3}$, so wird der dritte Theil der a zweymal genommen; oder a wird gedoppelt und von diesem Doppelten wird der dritte Theil genommen.

Es sey $x = \frac{2\,(a + \frac{1}{2}b - 2c)}{15}$, so wird zu a die Hälfte der b angesetzt, hernach die doppelte c abgenommen, vom übrigen wird der 15te Theil zweymal genommen, oder das Uebrige wird gedoppelt, und hernach der 15te Theil des Doppelten genommen.

61.

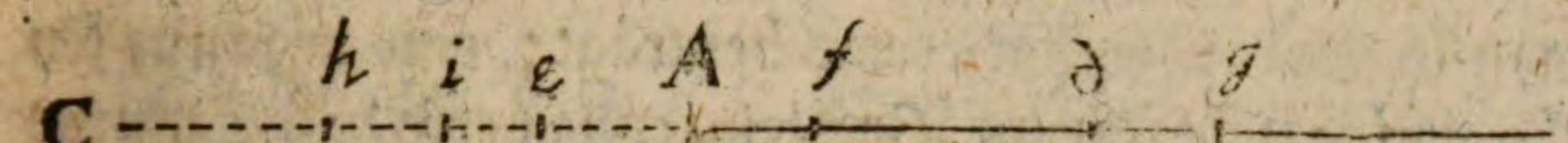
Weil positive und negative Größen beständig in den Gleichungen vorkommen, so hat man eine allgemeine Methode erdacht, um beyderley Größen, wenn sie Linien sind, gehörig auszudrücken und zu unterscheiden.

$+a$ ——————
$-b$ ——————————
$+c$ ————
$+d$ ——————
$-e$ ————————————————
$+f$ ——

Es sey $x = a - b + c + d - e + f$ wo die Buchstaben alle Linien andeuten.

Ziehe

Ziehe eine Linie AB von unbestimmter Länge, und ver-



längere sie nöthigenfalls rückwärts nach C. Trage nun die gegebenen Linien auf AB, eine am Ende der anderen, doch so, daß die positiven alle von A nach B zu, und die negativen rückwärts von B nach A zu, genommen werden.

Also mache $Ad = +a$

$de = -b$

$ef = +c$

$fg = +d$

$gh = -e$

$hi = +f$

So ist $x = -iA$, weil der letzte Punkt i linker Hand hinter A gefallen ist. Wäre der Punkt i rechter Hand gekommen, so würde x oder der Werth des ganzen Ausdruckes positiv geworden seyn. Wäre i auf A gefallen, so wäre $x = o$, oder der Werth des ganzen Ausdruckes wäre so viel als nichts, welches geschiehet wenn die negativen Größen zusammen so viel ausmachen als die positiven.

Dieses kann nicht besser erkläret werden, als wenn man sich einen Körper vorstellet der in der Linie AB vorwärts und rückwärts gehet. Gesetzt der Körper gehet von A aus, und machet erstlich vorwärts den Weg Ad oder $+a$, ferner rückwärts den Weg de oder $-b$, vorwärts den Weg ef oder $+c$, noch vorwärts den Weg fg oder $+d$, rückwärts den Weg gh oder $-e$, vorwärts den Weg hi oder $+f$, so ist der Körper zuletzt entweder wirklich vorwärts gekommen oder rückwärts, oder auf seine erste Stelle, nachdem der Punkt i in Betrachtung des ersten Punktes A nach B zu, oder nach C zu, oder gar auf A lieget.

Wir

Wir haben in unserer Algebra gesagt, eine positive Große sey eine jede, die zur Vergrößerung einer Summe die man in Gedanken hat etwas beyträgt; eine negative sey hingegen eine jede die zu Verkleinerung derselben Summe beyt ägt; also sey im Grunde eine posititze oder addirte Größe einerley, desgleichen eine negative oder subtrahirte.

Will man also die Summe des Weges wissen, den der Körper vorwärts von A nach B machet; so ist jeder Gang, der diese Richtung hat, positiv oder addirt, hingegen jeder Weg, der die umgekehrte Richtung von B nach A oder von A nach C zu hat, ist negativ oder subtrahiret.

Und die letzte Entfernung *i* A des Körpers von seinem Platze A ist entweder positiv oder negativ oder null, nachdem der Körper wirklich dem Punkt B näher gekommen ist, oder sich davon entfernet hat, oder in seine erste Lage gekommen ist.

Hätte man die Absicht gehabt zu erfahren, um wie weit der Körper rückwärts gekommen sey, so würden die Rückgänge positiv und die Gänge vorwärts negativ gewesen seyn.

Drittes

Drittes Hauptstück.

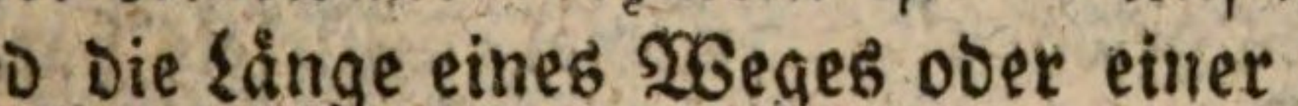
Von den Verhältnissen der geraden Linien.

§. 1.

Es wäre eine weitläuftige und überflüßige Sache, wenn wir hier alles wiederholen wollten, was in der Arithmetik und in der Algebra von geometrischen Verhältnissen überhaupt gelehret zu werden pfleget. Wir nehmen es also als bekannt an, und wollen nur kürzlich zeigen, wie es auf wirkliche geometrische Größen, nemlich auf Linien, Flächen und Körper angewandt werden kann.

§. 2.

Wenn man sich von einer Größe einen deutlichen Begriff machen will, so pfleget man dieselbe mit einer bekannten Größe ihrer Art zu vergleichen, um zu erfahren, wie oft diese letzte in der ersteren enthalten ist. Wenn man zum Exempel die Länge eines Stückes Leinewand wissen will, so mißt man solche Länge mit der Elle, das heißt, man versuchet, wie oft die bekannte Länge der Elle in der Länge der Leinewand enthalten ist. Auf einer ähnlichen Art wird die Länge eines Weges oder einer Linie auf dem Felde mit der Ruthe gemessen, und zu mehrerer Genauigkeit wird dieselbe in 12 Fuß, und der Fuß wiederum in 12 Zolle eingetheilet. Anstatt der Elle, der Ruthe, oder jedes anderen gangbaren Längenmaaßes, könnte man auch ein willkürliches Maaß annehmen, wenn man es nur vorher sorgfältig bestimmte. Z. E. mit dieser willkürlichen Länge AB



kann

kann ich jede andere Länge ausmessen, und davon einen deutlichen Begriff geben. Ein jeder wird mich verstehen, wenn ich sage, mein Schreibetisch ist lang 30AB, oder dessen Länge enthält 30mal die Länge AB. Jedoch da schon einmal gewisse Längenmaaße fast allgemein bekannt sind, so ist es allemal bequemer sich daran zu halten.

§. 3.

Eine Fläche kann nicht anders gemessen werden, als vermittelst einer Fläche von bestimmter Größe. Zu solcher Ausmessung ist das Quadrat am bequemsten, weil es eben so breit als lang ist. Man stelle sich demnach ein Quadrat vor, das eine Elle, oder eine Ruthe, oder einen Fuß u. s. f. in der Länge und Breite hat, so kann damit jede Ebne gemessen werden, indem man versuchet oder ausrechnet, wie vielmal die Quadratelle oder die Quadratruthe, oder der Quadratzoll, in der gegebenen Ebene enthalten ist. Auch könnte die Grundlinie des Quadrats, welche zugleich die Länge und Breite desselben zu erkennen giebt, wie beym Längenmaaße, willkürlich angenommen werden.

§. 4.

Die Größe der Körper muß durch einen bestimmten Körper gemessen werden. Hierzu dienet am füglichsten der **Würfel** oder **Kubus**. Dieses ist ein Körper, welcher die Gestalt eines gewöhnlichen Spiel-Würfels hat. Die Länge ist der Breite und Tiefe oder Höhe gleich. Man bilde sich demnach einen Würfel ein, der eine Elle, oder eine Ruthe, oder einen Fuß lang, breit und hoch sey; so läßt sich damit jeder Körper ausmessen, wenn man erfahren kann, wieviel derselbe Kubikellen, oder Kubikruthen, oder Kubikfuß u. s. f. enthalte. Die Länge des Würfels, welche zugleich seine Breite und Höhe ist, kann hier ebenfalls willkürlich angenommen werden. Auch ist es eben nicht nöthig, daß das Körpermaaß würfelförmig sey. Im gemein-

gemeinen Leben pfleget man vielmehr runde Maaße zu gebrauchen, als z. E. den Scheffel, womit das Getreide gemessen wird.

§. 5.

Aus allem diesen erhellet, daß man sich jede geometrische Größe als eine Zahl vorstellen kann, welche aus gleichen und bestimmten Einheiten zusammen gesetzt ist. Folglich kann alles, was in der Arithmetik und Algebra von der Proporzion der Zahlen gelehret wird, füglich auf die Proporzion der Linien, der Ebenen oder der Körper angewandt werden.

§. 6.

Ein Exempel wird die Sache noch begreiflicher machen. Laßt uns setzen man messe folgende vier Linien.

A ——— B

C ——— D

E ——— F

G ——— H

und man finde AB = 8 Maaß, CD = 11 Maaß, EF = 10 Maaß, GH = $13\frac{3}{4}$ Maaß. Durch Maaß verstehen wir hier eine willkührliche oder gebräuchliche Einheit. So kann man anstatt der vier Linien die vier gefundene Zahlen schreiben, nemlich:

8 anstatt AB

11 anstatt CD

10 anstatt EF

$13\frac{3}{4}$ anstatt GH.

Da nun die vier Zahlen im geometrischem Verhältnisse stehen, so stehen auch die vier Linien im geometrischen Verhältnisse, und alles was sich vom Verhältnisse der vier

Zahlen

Zahlen beweisen läßt, gilt auch vom Verhältnisse der vier Linien. Z. E.

Weil 8, 11 :: 10, $13\frac{3}{4}$

so ist auch 8, 10 :: 11, $13\frac{3}{4}$

desgleichen (8 + 11), 11 :: (10 + $13\frac{3}{4}$), $13\frac{3}{4}$

(11 — 8), 11, ($13\frac{3}{4}$ — 10), $13\frac{3}{4}$ u. s. f.

Also, wenn die Linen an der Stelle der Zahlen gesetzt werden, so ist:

AB, CD :: EF, GH

AB, EF :: CD, GH

(AB + CD), CD :: (EF + GH), GH

(CD — AB), CD :: (GH — EF), GH u. s. f.

§. 7.

Da die geometrischen Größen durch Zahlen, die Zahlen aber im allgemeinen durch einzelne Buchstaben ausgedrückt werden, so können auch die geometrischen Größen auf algebraische Art dnrch einzelne Buchstaben angedeutet werden. Wenn man also sagt, die Linie *a*, die Linie *b*, u. s. f., oder weun man annimmt, AB = *a*, CD = *b*, u. s. f. so verstehet man durch *a* und *b* eine gewisse Anzahl von Maaßen oder Einheiten die in den Linien enthalten sind. Auch können in manchen Fällen diese Größen *a*, *b* u. s. f. selbst als Einheiten angesehen werden, wodurch andere Größen gemessen werden.

§. 8.

Wir haben bisher vorausgesetzt, es lasse sich jede geometrische Größe durch eine bestimmte Einheit oder durch einen Bruch dieser Einheit genau ausmessen. Dieses hat nun seine völlige Richtigkeit, wenn nur von einer einzigen Größe und von einem willkührlichen Maaße die Rede ist. Denn in solchem Falle läßt sich allemal die Einheit

oder

oder das Maaß so einrichten, daß es ein gewisser Vieltheil (pars aliquota) der zu messenden Größe sey, z. E. der dritte, vierte, fünfte, hunderte Theil, u. s. f. Ist aber das Maaß nicht willkührlich, sondern gegeben, so lehrt die Erfahrung, daß es sehr oft die auszumessende Größe nie genau erschöpft, sondern daß allemal etwas fehlet oder übrig bleibt, man mag nun das ganze Maaß beybehalten, oder es in Brüche eintheilen. Z. E. man wird selten eine Länge finden, die sich ganz genau und ohne dem geringsten Unterschiede in Ruthen oder Füßen oder Zollen ausdrücken läßt.

Desgleichen, wenn zwey oder mehrere Größen gegeben sind, so läßt sich nicht allemal ein gemeinschaftliches Maaß finden, wodurch beyde genau ausgemessen werden können; sondern ein Maaß, wodurch die eine Größe genau gemessen wird, mißt nicht die übrigen ganz genau.

Eine Größe, die nicht durch eine gewisse Einheit genau ausgemessen werden kann, wird eine *irrazionale* Größe genannt. Zwey oder mehrere Größen, wozu sich kein gemeinschaftliches Maaß finden läßt, sind *inkommensurable* Größen. Eine *razionale* Größe hingegen ist diejenige, welche sich durch die gegebene Einheit oder deren Brüche genau ausmessen läßt, und *kommensurable* Größen sind diejenigen, welche ein gemeines Maaß haben.

§. 9.

Im Grunde haben die Worte *irrazional* und *inkommensurabel* einerley Bedeutung. Denn, wenn eine Größe irrazional ist, so ist sie mit der gegebenen Einheit inkommensurabel, und wenn zwey Größen inkommensurabel sind, so wird die eine irrazional, wenn die andere zur Einheit oder zum Maaße angenommen wird.

Ich sage erstlich, eine irrazionale Größe sey mit der Einheit inkommensurabel. Denn wären sie kommensurabel, so müste ein Maaß möglich seyn, welches sowohl die Einheit als die andere Größe ausmessen könnte. Ein solches

Maaß aber wäre ein Bruch der Einheit. Folglich ließe sich die andre Größe durch Brüche der Einheit ausdrücken, und wäre nicht irrazional, welches der Voraussetzung zuwider ist.

Ich sage ferner, daß wenn von zwey inkommensurabeln Größen die eine zur Einheit angenommen wird, die andere irrazional werde. Denn würde sie razional, so müste sie von der ersten, als nnnmehriger Einheit, oder vor deren Vieltheilen, als nunmehrigen Brüchen gemessen werden. Es wäre also ein gemeinschaftliches Maaß vorhanden, welches der Voraussetzung widerspricht.

§. 10.

Wir haben gesagt, es lasse sich jede geometrische Größe durch eine Zahl ausdrücken (§. 5.). Nun möchte es beym ersten Anblicke scheinen, dieses gienge nicht mehr an, wenn von irrazionalen oder inkommensurablen Größen die Rede ist. Allein auch hier muß man die vollkommene Uebereinstimmung der Rechenkunst und Meßkunst bewundern. Denn, so wie es in der Meßkunst irrazionale und inkommensurable Größen giebt, so findet man auch in der Rechenkunst irrazionale und inkommensurable Zahlen, wodurch sie ausgedrücket werden können. Dergleichen sind die Wurzeln der Zahlen die nicht vollkommene Potenzen sind, wie auch die meisten Logarithmen, für welche Basis es auch seyn mag. Z. E. $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, u. s. f. sind irrazionale Zahlen, die sich nie in Brüchen oder Theilen der Einheit genau ausdrücken lassen. Desgleichen, wenn 10 zur Basis angenommen wird, so sind alle Logarithmen irrazional, ausgenommen die Logarithmen der verschiedenen Potenzen von 10, nemlich die Logarithmen von 10, von 100, von 1000, von 10000, u. s. f.

Aus razionalen und irrazionalen Zahlen, (oder auch oft aus zwey irrazionalen) entstehen inkommensurable Zahlen, z. E. 2 und $\sqrt{7}$, 3 und Log. 5499 sind inkommensurable

surable Zahlen, weil eine von beyden durch die Einheit gemessen wird, die andre aber nicht.

§. 11.

Wenn zwey Größen inkommensurabel sind, so kann ihr Verhältniß nicht anders, als durch eine irrazionale Zahl ausgedrücket werden. Z. E. es seyen die Linien AB

A ——————— B

C ——————————— D

und CD inkommensurabel, so daß z. E. AB = 3 und CD = $\sqrt{14}$, so ist die Verhältnißzahl $\frac{\sqrt{14}}{3}$, oder $\sqrt{\frac{14}{9}}$ oder $\sqrt{(1\frac{5}{9})}$, welche Zahl irrazional ist, und sich nie genau in Theilen der Einheit ausdrücken läßt.

Ein solches Verhältniß, was nicht anders als durch eine irrazionale Zahl ausgedrücket werden kann, heißt ein surdes Verhältniß. Jedes Verhältniß hingegen, was in razionalen Zahlen ausgedrückt werden kann; wird zum Unschiede ein Zahlenverhältniß genannt.

§. 12.

Zwey surde Verhältnisse können einander gleich seyn, und folglich eine geometrische Proporzion bilden. Es sey z. E.

A ⊢——⊣ B

C ⊢———⊣ D

E ⊢————⊣ F

G ⊢————— H

AB = 3, CD = $\sqrt{14}$, EF = 5, GH = $\sqrt{(38\frac{8}{9})}$, so ist

$$\frac{CD}{AB} = \frac{\sqrt{14}}{3} = \sqrt{\left(1\frac{5}{9}\right)}$$

$$\frac{GH}{EF} = \frac{\sqrt{(38\frac{8}{9})}}{5} = \sqrt{\left(1\frac{5}{9}\right)}$$

Also ist $\frac{CD}{AB} = \frac{GH}{EF}$, oder es ist

AB, CD : : EF, GH.

Und da in der Lehre von den Proporzionen nicht nothwendig vorausgesetzt wird, daß die Razion oder Verhältnißzahl razional sey, so gilt bey solchen surdischen Proporzionen alles dasjenige, was von geometrischen Proporzionen überhaupt bewiesen wird. Es mag also die Verhältnißzahl razional oder irrazional seyn, so läßt sich allemal schließen:

wenn AB, CD : : EF, GH

so ist AB, EF : : CD, GH

ferner $(CD \pm AB)$, CD : : $(GH \pm EF)$, GH u. s. f.

§. 13.

Bey voriger Proporzion wurde angenommen, daß der erste und dritte Satz razional wären. Es können aber auch drey oder alle vier Sätze irrazional seyn. Es sey AB = 3, CD = $\sqrt{14}$, EF = $\sqrt{11}$, GH = $\sqrt{(17\frac{1}{9})}$, so ist:

$$\frac{CD}{AB} = \frac{\sqrt{14}}{3} = \sqrt{\left(1\frac{5}{9}\right)}$$

$$\frac{GH}{EF} = \frac{\sqrt{17\frac{1}{9}}}{\sqrt{11}} = \sqrt{\left(1\frac{5}{9}\right)}$$

also ist wiederum

AB, CD : : EF. GH.

Es sey $AB = \sqrt{2}$, $CD = \sqrt{5}$, $EF = \sqrt{9}$, $GH = \sqrt{(22\frac{1}{2})}$, so ist

$$\frac{CD}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\left(2\frac{1}{2}\right)}$$

$$\frac{GH}{EF} = \frac{\sqrt{22\frac{1}{2}}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\left(2\frac{1}{2}\right)}$$

Also ist auch hier

AB, CD :: EF, GH.

In diesem letzten Falle kann es sich treffen, daß die Verhältnisse razional werden, ob gleich die Größen selbst irrazional sind. Es sey $AB = \sqrt{2}$, $CD = \sqrt{18}$, $EF = \sqrt{3}$, $GH = \sqrt{27}$, so ist

$$\frac{CD}{AB} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\frac{GH}{EF} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$$

Also ist AB, CD :: EF, GH, und die Razion ist 3. Hierbey merke man sich also überhaupt, daß zwey irrazionale Größen ein razionales Verhältniß haben können.

§. 14.

Was in der Geometrie durch surde Verhältnisse erkläret werden kann, läßt sich oft noch deutlicher durch die Lehre von den Gränzen der Größen erläutern, welche wir also an diesem Orte kürzlich vortragen wollen.

§. 15.

Eine veränderliche Größe ist diejenige, die, mit Beybehaltung desselbigen Namens, und derselbigen Bestimmungen, unendlich viel Werthe annehmen kann. Jede Größe hingegen, die so bestimmt ist, daß sie nur einen

Werth oder einige Werthe haben kann, ist eine beständige Größe.

Z. E. Wenn ich überhaupt von der Sehne eines Zirkels spreche, so kann diese Sehne unendlich viel größere oder kleinere Werthe bekommen, nachdem sie dem Mittelpunkte näher oder von demselben entfernter ist. Rede ich aber vom Halbmesser eines Zirkels, so ist dieses eine beständige Größe, die im nemlichen Zirkel nur einen Werth haben kann.

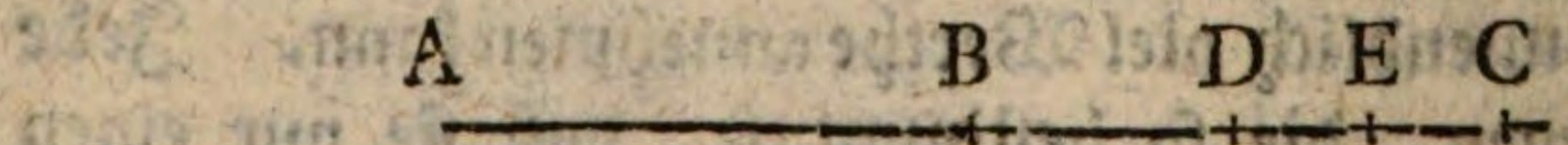
§. 16.

Die Gränze einer veränderlichen Größe ist eine beständige Größe, welcher die veränderliche beym Zunehmen oder Abnehmen am Werthe so nahe kommen kann als man will, ohne ihr jedoch völlig gleich zu werden.

Z. E. wenn ein spitziger Winkel allmählig größer wird, so kann er einem rechten so nahe kommen als man will. Er kann aber dem rechten nie gleich werden. Denn sonst würde er anthören spitzig zu seyn. Der rechte Winkel ist also die Gränze des zunehmenden spitzigen Winkels.

Wenn von einer geraden Linie die Hälfte, und ferner beständig die Hälfte des übrigen abgenommen wird, so wird das übrige ohne Ende immer kleiner und kleiner. Es kann aber nie zu nichts oder null werden, weil der letzte Rest allemal die Hälfte des vorigen Restes seyn soll, und die Hälfte einer wirklichen Linie allemal eine wirkliche Linie ist. Also ist in diesem Falle, und unter dieser Bedingung, null oder nichts die Gränze des beständig abnehmenden Restes.

Man nehme hingegen an, eine gerade Linie nehme erstlich um ihre Hälfte zu, hernach allemal um die Hälfte des vorigen Zusatzes, so kann sie nie doppelt so groß werden als sie Anfangs war. Denn es sey AB = BC, oder

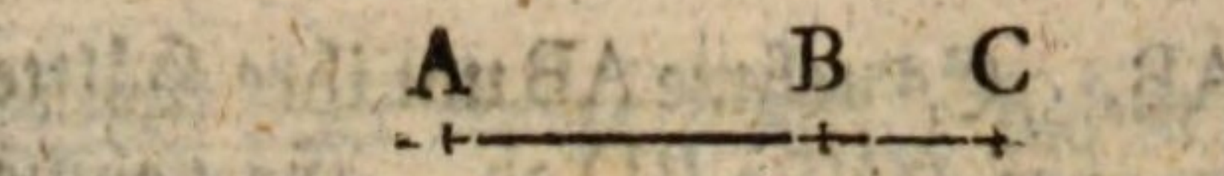


AC das Doppelte der AB, Es nehme AB um ihre Hälfte BD zu, so nimmt BC um ihre Hälfte BD ab. Es nehme AD noch um die Hälfte DE der BD zu, so nimmt DC um ihre Hälfte DE ab, und es bleibt EC. Die BC nimmt also beständig um die Hälfte ab, und es ist kurz vorher bewiesen worden, daß der Rest nie zu nichts werden kann. Also kann auch nie der Punkt B oder D oder E auf C fallen, oder die unter der vorgeschriebenen Bedingung zunehmende Linie kann nie ihren doppelten Werth erreichen, ob sie ihm gleich so nahe kommen kann als man will. Dieses Doppelte des anfänglichen Werths ist also hier die Gränze der zunehmenden Größe.

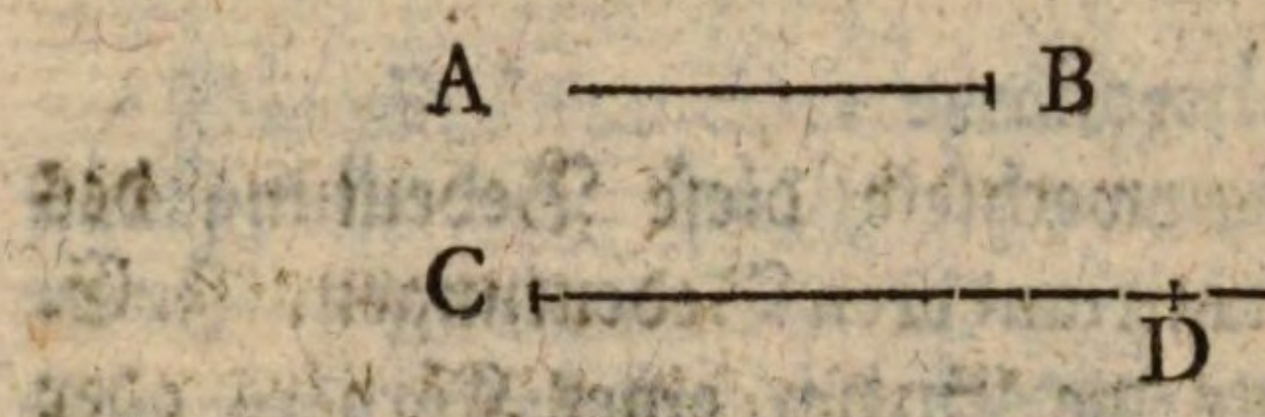
Anmerkung. Man verwechsele diese Bedeutung des Wortes Gränze nicht mit anderen Bedeutungen. Z. E. es heißt oft so viel als die Enden eines Körpers oder einer Ebne. Man verwechsele auch nicht die Gränzen einer Größe mit ihrem größten oder kleinsten Werthe. Z. E. die größte Sehne die im Zirkel gezogen werden kann, ist der Durchmesser. Weil aber die Sehne zum Durchmesser werden kann, so ist der Durchmesser nicht eigentlich die Gränze der Sehne, sondern ihr größter Werth.

§. 17.

Das Verhältniß zwischen zwey veränderlichen Größen, oder zwischen einer beständigen und einer veränderlichen Größe wird größer oder kleiner, nachdem der Unterschied beyder Quantitäten zunimmt oder abnimmt. Weil aber die veränderlichen Größen ihren Gränzen nicht gleich werden können, so kann auch das Verhältniß dem Verhältnisse der Gränzen nicht gleich werden. Die Gränze des Verhältnisses zweyer Größen ist also nichts anders als das Verhältniß welches unter den Gränzen zweyer veränderlichen Größen, oder einer beständigen und einer veränderlichen Statt findet.



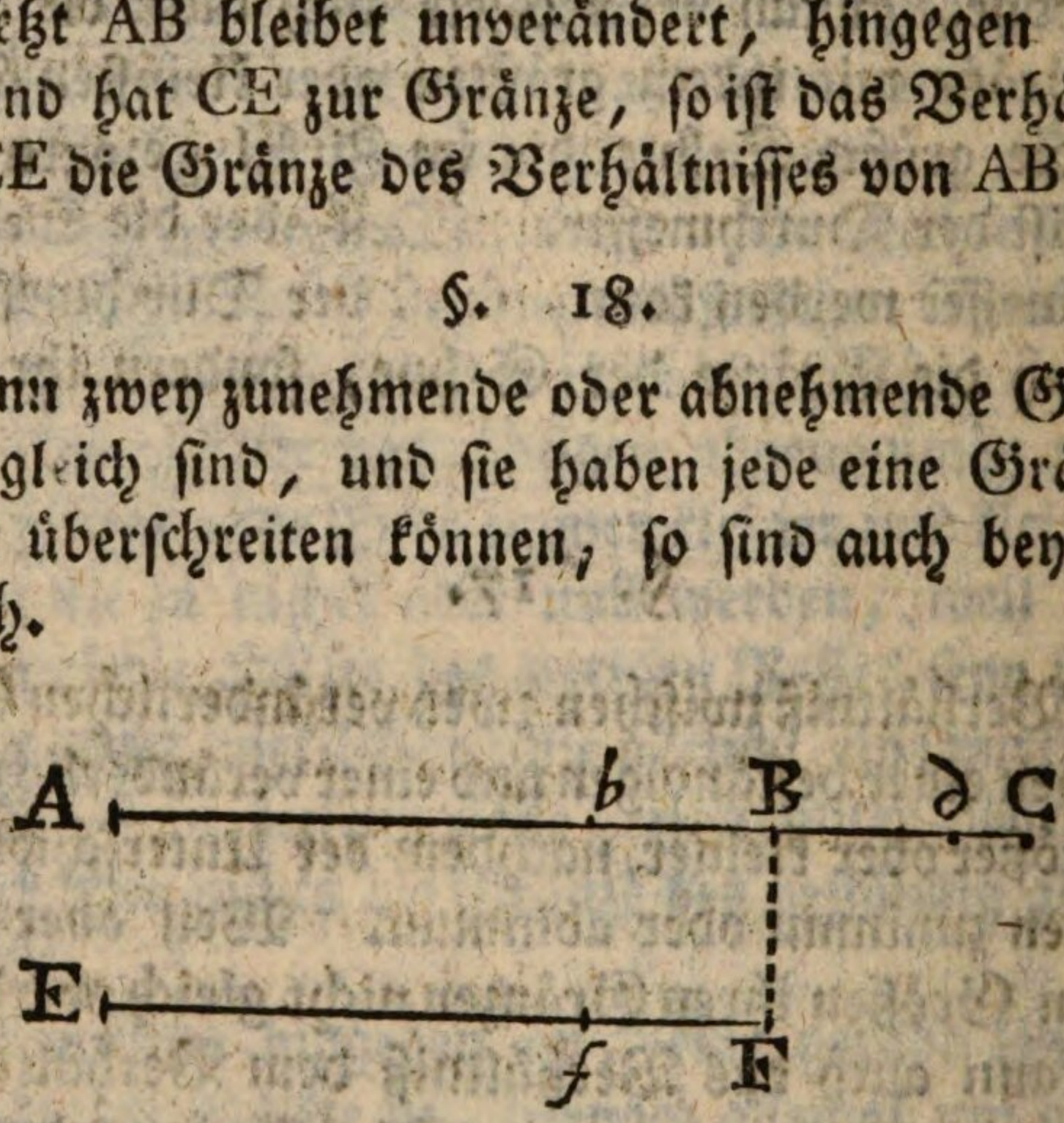
Gesetzt die Linie AB nimmt zu, und AC ist ihre Gränze, DE nimmt auch zu, und DF ist ihre Gränze. Gesetzt ferner, das Verhältniß von AB zn DE verändert sich, und wird größer oder kleiner, so kömmt es allmählig dem Verhältnisse von AC zu DF näher, oder das Verhältniß von AC zu DF ist die Gränze des Verhältnisses von AB zu DE.



Gesetzt AB bleibet unverändert, hingegen CD wird größer und hat CE zur Gränze, so ist das Verhältniß von AB zu CE die Gränze des Verhältnisses von AB zu CD.

§. 18.

Wenn zwey zunehmende oder abnehmende Größen beständig gleich sind, und sie haben jede eine Gränze, die sie nicht überschreiten können, so sind auch beyde Gränzen gleich.



Gesetzt die Größen A*b* und E*f* nehmen beständig zu, jedoch so daß sie bey ihrer Veränderung allemal gleich bleiben. Die Gränze der Größe E*f* sey EF. Nimm AB = EF, so kann die Gränze der A*b* keine andere seyn als AB.

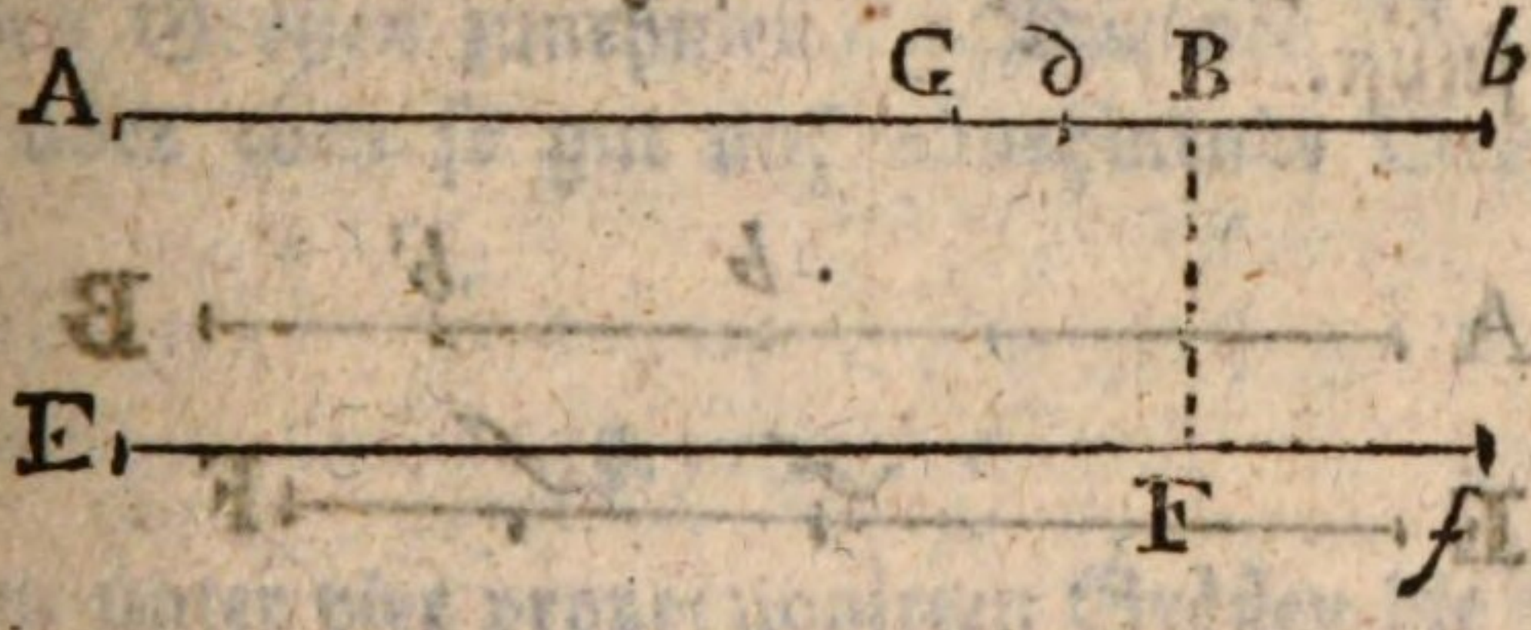
Denn

Denn gesetzt, die Gränze der A*b* könnte größer seyn als AB, und z. E. = AC. Da sich jede Größe ihrer Gränze nähern kann so viel man will, so sey A*b* geworden A*d*, folglich A*d* ⊳ AB, oder A*d* ⊳ EF.

Weil nun beyde wachsende Größen allemal gleich bleiben, so muß auch werden E*f* = A*d*, folglich E*f* ⊳ EF, welches aber der Voraussetzung zuwider ist, da E*f* ihre Gränze EF nicht überschreiten kann. Also ist es unmöglich, daß die Gränze der A*b* größer sey, als die Gränze der E*f*.

Sie kann auch nicht kleiner seyn. Denn wäre die Gränze der A*b* kleiner als die Gränze der E*f*, so wäre diese letzte größer, und es kann auf vorige Art bewiesen werden, daß dieses unmöglich ist.

Laßt uns nun annehmen, daß beyde veränderliche Größen nicht zunehmen sondern abnehmen.



Die abnehmende und gleichbleibende Größen mögen wiederum seyn A*b* und E*f*. Die Gränze der E*f* sey EF, so daß E*f* nie kleiner werden könne als EF. Nimm AB = EF, so sage ich es ist AB die Gränze der A*b*. Gesetzt sie sey es nicht, sondern vielmehr AG, die kleiner ist als AB, so nehme ich an, es habe sich A*b* der Gränze AG genähert bis in *d*, so daß A*d* ⊲ AB, oder A*d* ⊲ EF. Da nun die E*f* der A*b* beständig gleich bleibet, so muß auch werden E*f* ⊲ EF, welches der Voraussetzung zuwider ist. Also kann die Gränze der A*b* nicht kleiner seyn als die Gränze der E*f*.

Sie kann auch nicht größer seyn. Denn in diesem Falle wäre die Gränze der Ef kleiner, welches eben so wie das vorige unmöglich ist.

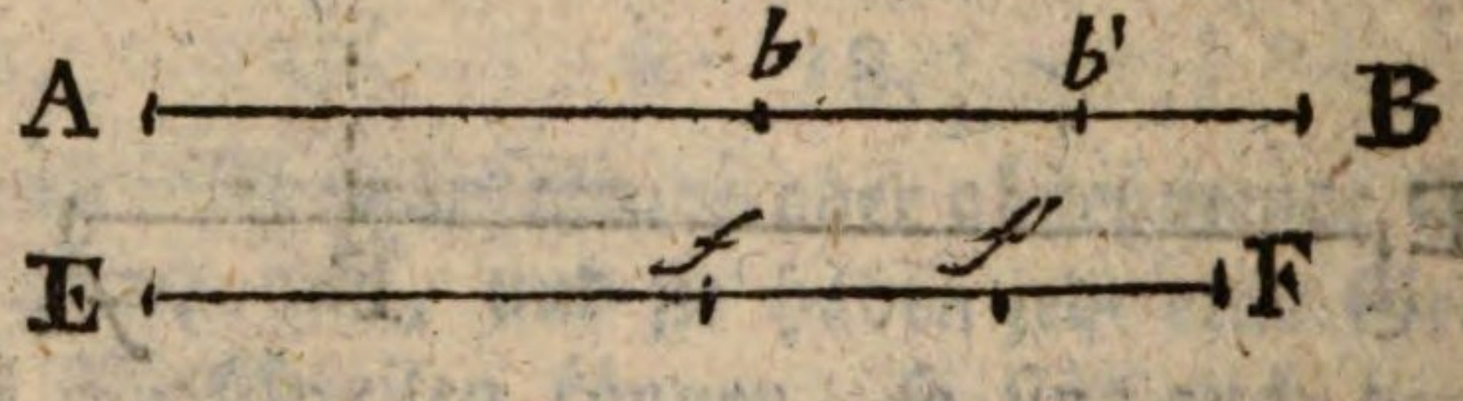
§. 19.

Wenn zwey veränderliche Verhältnisse beständig einander gleich bleiben, so sind auch ihre Gränzen gleich (wenn sie welche haben.)

Denn veränderliche Verhältnisse oder Verhältnißzahlen sind veränderliche Größen. Folglich wenn sie beständig gleich sind, so sind auch ihre Gränzen gleich. (§. 18.)

§. 20.

Wenn zwey veränderliche Größen beständig in einerley Verhältnisse bleiben, so haben ihre Gränzen auch das nemliche Verhältniß. Oder die Gränzen zweyer veränderlichen Größen verhalten sich wie die veränderlichen Größen selbst.



Gesetzt die veränderliche Größen Ab und Ef behalten allemal das nemliche Verhältniß, so haben sie noch das nemliche Verhältniß, wenn aus Ab, Ab' und aus Ef, Ef' geworden, also ist $Ab, Ef :: Ab', Ef'$

folglich $Ab, Ab' :: Ef, Ef'$

Gesetzt die Gränze der Ab sey AB, nnd die Gränze der Ef sey EF; und Ab, Ef seyen zwey unveränderte Werthe der Ab und der Ef, so wird das Verhältniß von Ab zu Ab' immer größer und größer, je nachdem Ab' größer wird. Es kann sich aber die Ab' der Gränze AB nähern so viel man will, also kann sich das Verhältniß von Ab zu Ab' dem Verhältnisse von Ab zu AB nähern so viel man will.

will. Folglich ist das Verhältniß von A*b* zu AB die Gränze des Verhältnisses von A*b* zu A*b'*. Eben so wird gezeiget, daß das Verhältniß von E*f* zu EF die Gränze des Verhältnisses von E*f* zu E*f'* ist, wenn E*f* unverändert bleibet.

Da nun die Verhältnisse von A*b* zu A*b'* und von E*f* zu E*f'* allemal gleich sind, so sind auch deren Gränzen gleich (§. 19.), nemlich das Verhältniß von A*b* zu AB ist gleich dem Verhältnisse von E*f* zu EF, oder

A*b*, AB :: E*f*, EF

oder AB, EF :: A*b*, E*f*

oder AB, EF :: A*b'*, E*f'*

das heißt, die Gränzen AB und EF verhalten sich wie die veränderliche Größen A*b'*, E*f'* oder A*b*, E*f*.

Wir haben in der Figur angenommen, daß die veränderlichen Größen zunehmen. Der nemliche Beweis läßt sich aber eben so gut auf abnehmende Größen anwenden.

§. 21.

Wenn unter vier proporzionirten Größen die erste und dritte beständig, die zweyte und vierte aber veränderlich sind, so verhält sich die erste zur Gränze der zweyten, wie die dritte zur Gränze der vierten.

Dieses läßt sich folgendermaaßen beweisen.

Es sey A, X :: B, Z

Es seyen A und B beständig, hingegen seyen X und Z veränderlich.

Es nehmen X und Z beständig zu, so nehmen die Verhältnisse $\frac{X}{A}$ und $\frac{Z}{B}$ auch zu, sie bleiben aber allemal gleich, sonst würde die Proporzion nicht statt finden. Es sey M die Gränze der X und N die Gränze der Z, so hat das

Ver-

Verhältniß $\frac{X}{A}$ zur Gränze $\frac{M}{A}$, und $\frac{Z}{B}$ hat zur Gränze $\frac{N}{B}$.

Da nun die Verhältnisse $\frac{X}{A}$ nnd $\frac{Z}{B}$ beständig gleich sind, so sind auch ihre Gränzen gleich (§. 19.), und es ist

$$\frac{M}{A} = \frac{N}{B}$$

oder A, M :: B, N.

§. 22.

Wenn vier veränderliche Größen beständig proporzionirt sind, so sind auch ihre Gränzen proporzionirt.

Es sey

V, X :: Y, Z

wo V, X, Y, Z veränderlich sind. Es sey M die Gränze von V, N die Gränze von X, P die Gränze von Y, und Q die Gränze von Z.

Das Verhältniß von V zu X bleibe unverändert, so bleibet auch das Verhältniß von Y zu Z unverändert. Nun ist (§. 20.)

M, N :: V, X

P, Q :: Y, Z

oder da V, X :: Y, Z, so ist

nicht nur M, N :: V, X

sondern auch P, Q :: V, X

folglich M, N :: P, Q.

Gesetzt aber das Verhältniß $\frac{X}{V}$ nimmt zu, so nimmt auch das Verhältniß $\frac{Y}{Z}$ zu. Beyde Verhältnisse bleiben

ben allemal gleich. Ihre Gränzen sind die Verhältnisse $\frac{N}{M}$ und $\frac{Q}{P}$. Diese sind also gleich (§. 19.) und es ist

$$\frac{N}{M} = \frac{Q}{P}$$

oder M, N :: P, Q.

Das nemliche gilt auch wenn beyde Verhältnisse abnehmen.

§. 23.

Was von Größen und Verhältnissen gesaget worden, die beständig zunehmen oder abnehmen, gilt auch von solchen, die wechselsweise zunehmen oder abnehmen. Denn gesetzet sie nehmen mehr zu als ab, so lasse man das Abnehmen aus der Acht, und betrachte nur das Zunehmen. Gesetzt sie nehmen mehr ab als zu, so sind es in der That abnehmende Größen. Sollten sie aber so viel zu als abnehmen, so wären es nicht mehr veränderliche Größen, sondern sie müsten als beständige betrachtet werden.

Folglich sind die vorhergehenden Sätze auch wahr, wenn die veränderlichen Größen wechselsweise zunehmen und abnehmen.

§. 24.

Um nun kürzlich die Lehre von den Gränzen zu wiederholen, so wollen wir die veränderlichen Größen durch Z, Y, X, V ausdrücken, die beständigen aber durch andere Buchstaben. Der deutsche Buchstabe G vor einer veränderlichen Größe soll die Gränze derselben anzeigen.

I.) Wenn

$$X = Y$$

so ist $GX = GY$ (§. 18.)

II) Wenn

II) Wenn

$$\frac{X}{Y} = M$$

so ist $\frac{GX}{GY} = M$ (§. 20)

oder es ist X, Y :: GX, GY.

III) Wenn

A, X :: B, Y

so ist A, GX :: B, GY. (§. 21.)

IV) Wenn

X, Y :: Z, V

so ist GX, GY :: GZ, GV. (§. 22.)

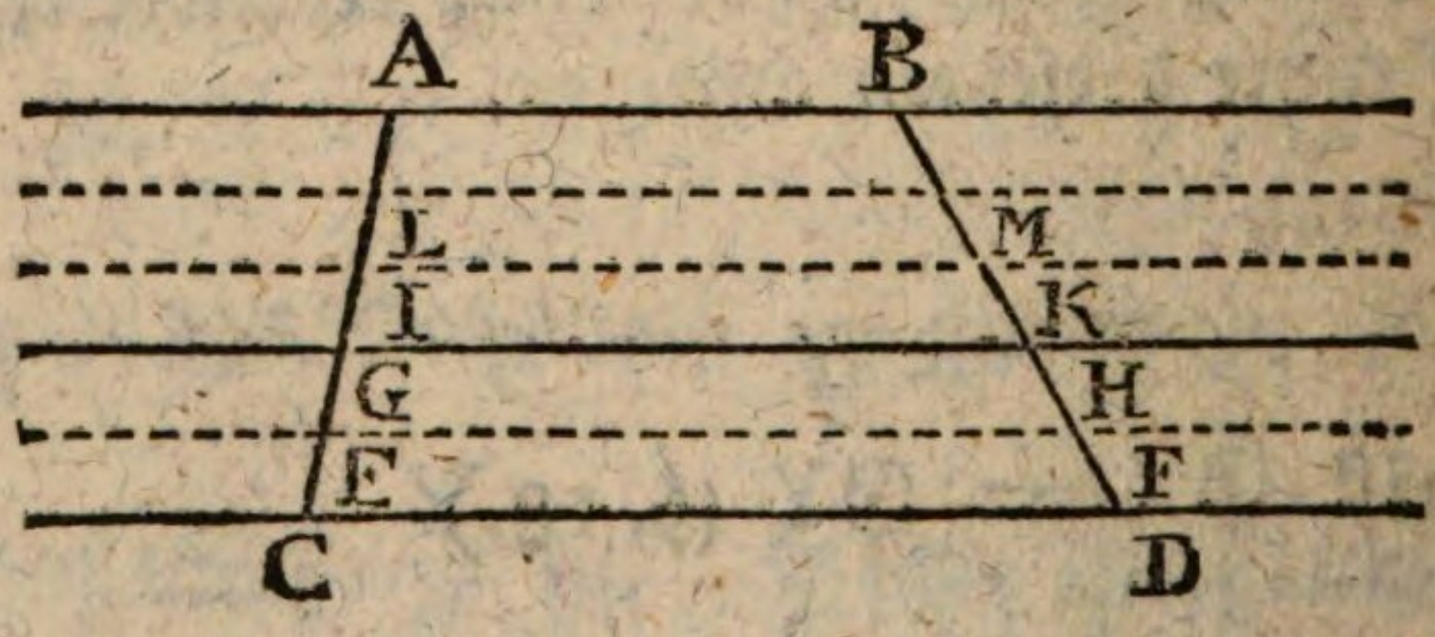
§. 25.

Da wir nun den Leser zur Lehre von den Proporzionen der geraden Linien hinlänglich vorbereitet haben, so schreiten wir zu dieser Lehre selbst, und führen erstlich die nöthigen Lehrsätze an, worauf dann die Aufgaben folgen sollen.

§. 26.

Wenn zwey gerade Linien von drey Parallel-Linien geschnitten werden, so sind die abgeschnittenen Theile proporzionirt.

Es seyen die Linien AC und BD von den drey Parallel-Linien AB, GH, CD geschnitten.



Gesetzt

Gesetzt es sey ein gemeinschaftliches Maaß CE möglich, das so wohl CG als GA messe, und z. E. zweimal in CG und dreymal in GA enthalten sey, so daß CE = EG = GI = IL = LA.

Durch die Punkte E, I und L ziehe gerade Linien parallel mit CD oder GH oder AB.

Weil die Linie AC durch die Parallel-Linien AB, LM, IK, GH, EF, CD in gleiche Theile geschnitten wird, so sind diese Parallel-Linien in gleicher Entfernung. (II. §. 46)

Weil sie in gleicher Entfernung sind, so schneiden sie auch die BD in eben so viel gleiche Theile (II. §. 45), so daß DF = FH = HK = KM = MB.

So vielmal CG die CE übertrifft, so vielmal übertrifft also DH die DF, oder

CE, CG :: DF, DH

oder CE, DF :: CG, DH.

Aus dem nemlichen Grunde ist

GI, GA :: HK, HB

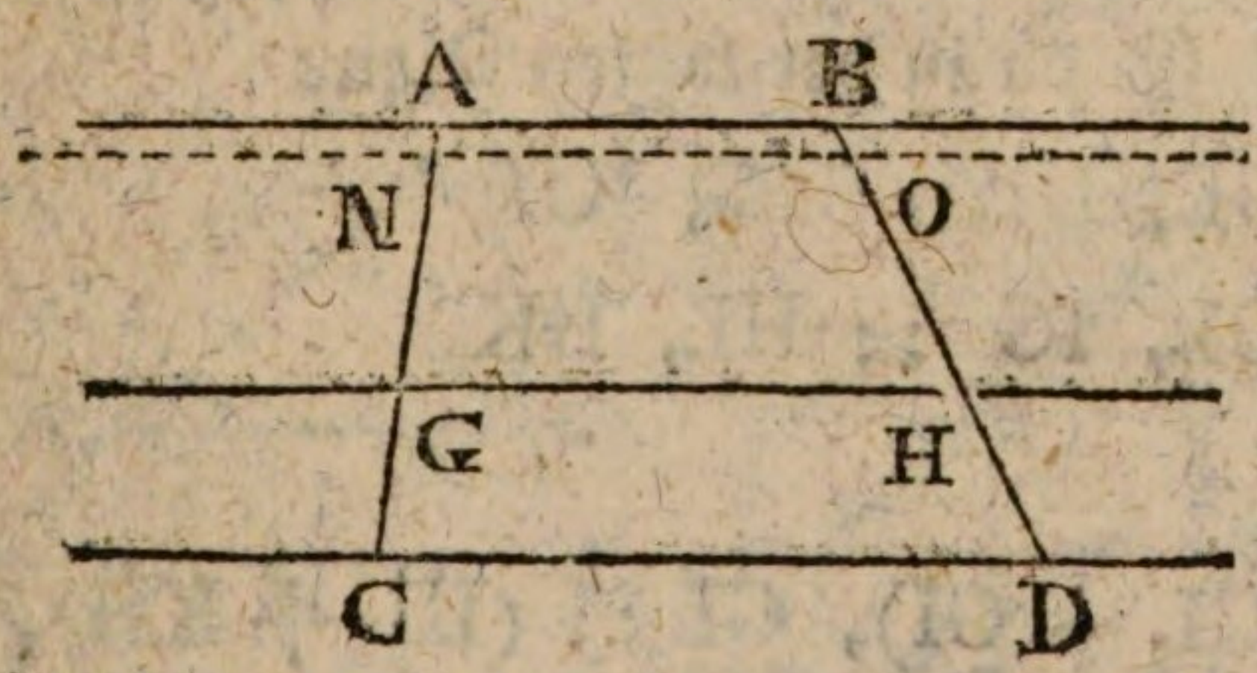
oder GI, HK :: GA, HB.

Es ist aber GI = CE, und HK = DF, folglich

CE, DF :: GA, HB

da nun auch CE, DF :: CG, DH

so ist GA, HB :: CG, DH.



Gesetzt man kann für CG und GA, folglich auch für DH und HB kein gemeinschaftliches Maaß finden, so theile CG in viel kleine Theile, und trage dergleichen Theile auf

GA

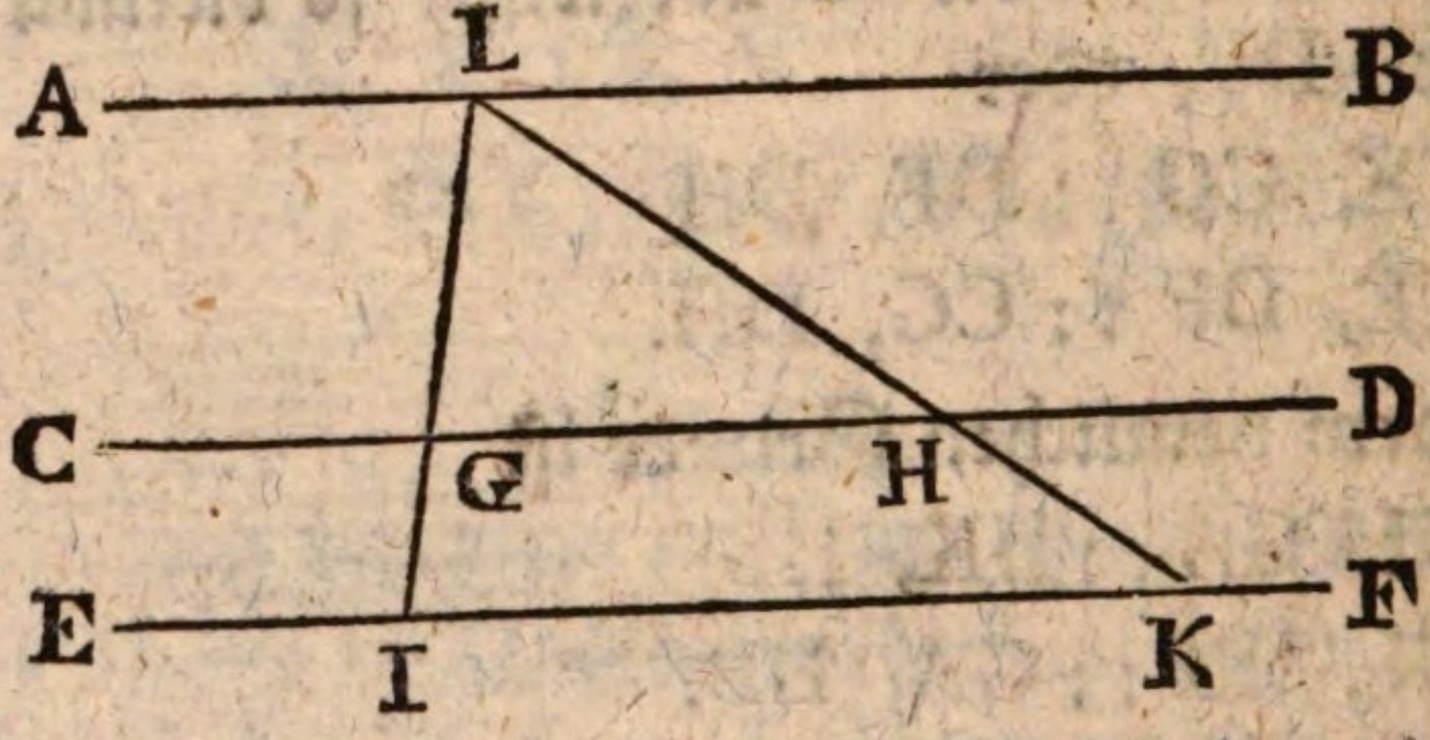
GA bis GN, wo noch NA übrig bleibet. Ziehe NO parallel mit GH und CD. Alsdenn ist aus vorigem Beweise

GN, HO :: CG, DH,

Je kleiner man die Theile nimmt, desto näher kömmt GN der GA und HO der HB, Also sind GA und HB die Gränzen von GN und HO, und (§. 20.)

GA, HB :: CG, HD.

Zusatz. Der nemliche Lehrsatz gilt auch wenn eine der Parallel-Linien durch den Punkt gehet, wo sich zwey gerade Linien schneiden.



Wenn also AB, CD und EF parallel sind, so ist

GL, HL :: IG, KH.

Zusatz. Aus der Proporzion der geschnittenen Theile können nun verschiedene andere Proporzionen hergeleitet werden. Z. E. da in der letzten Figur

GL, HL :: IG, KH

so folgt GL, IG :: HL, HK

ferner

(GL + GI), GL :: (HL + KH), HL

oder IL, GL :: KL, HL

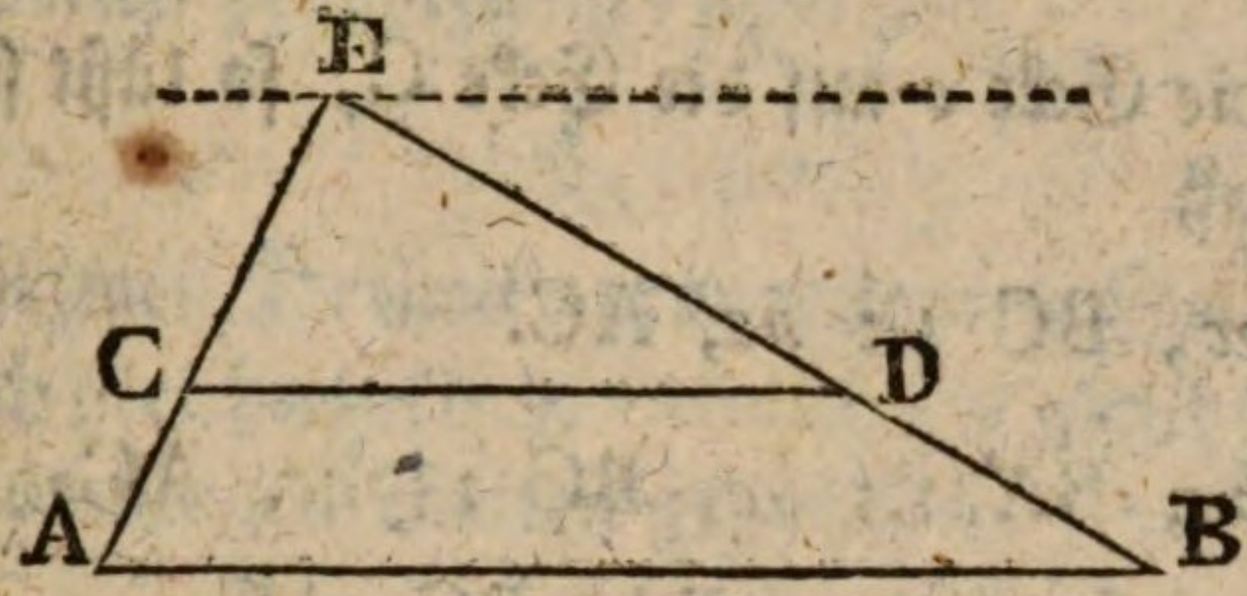
desgleichen (GL + GI), GI :: (HL + KH), KH

oder IL, GI :: KL, KH u. s. w.

§. 27.

§. 27.

Wenn in einem Dreyecke eine gerade Linie mit einer Seite des Dreyecks parallel gezogen wird, so schneidet sie die beyden anderen Seiten nach einerley Verhältniß.

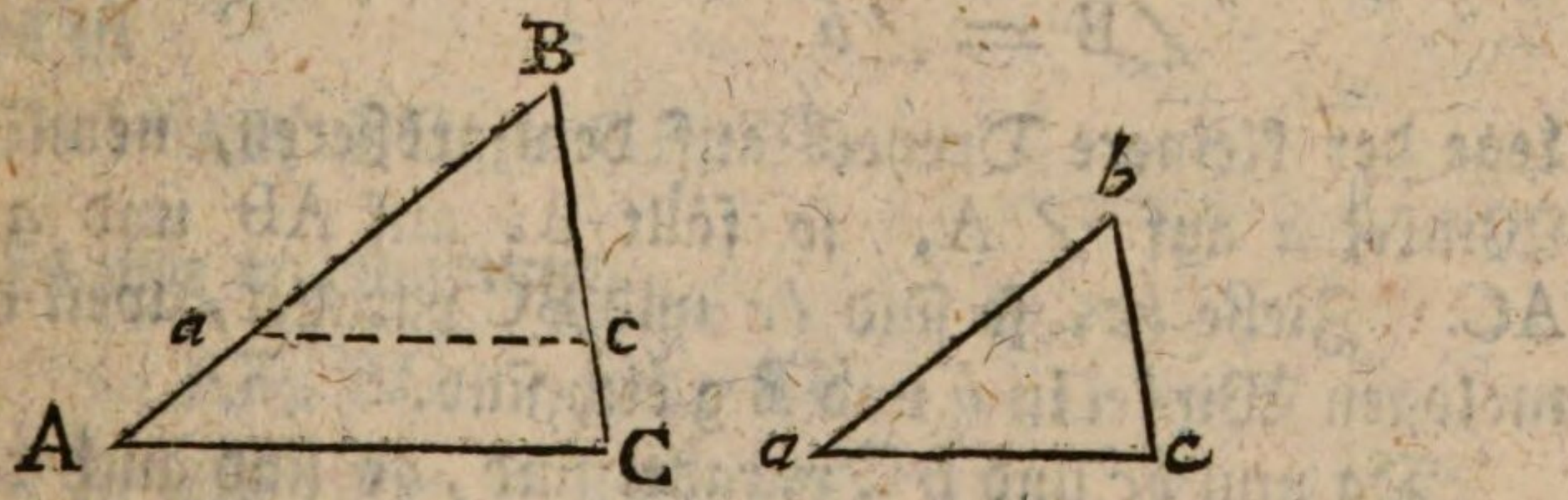


Es sey im Dreyecke AEB die gerade Linie CD mit AB parallel gezogen, so stelle man sich durch E eine dritte Parallel-Linie vor. Alsdann wird nach §. 26. Zusatz I.

EC, ED :: AC, BD
oder EC, AC :: ED, BD
auch EC, EA :: ED, EB.

§. 28.

Wenn zwey Dreyecke einerley Winkel haben, so stehen die Gegenseiten der gleichen Winkel in einerley Verhältniß, und beyde Dreyecke sind ähnlich.



Es sey $\angle B = \angle b$, $\angle A = \angle a$, $\angle C = \angle c$. Lege in Gedanken das kleinere Dreyeck auf dem größeren, so decket $\angle b$ den $\angle B$, die Linie *bc* einen Theil der Linie BC, die Linie *ba* einen Theil der Linie BA. Und *ac* wird parallel mit AC Denn weil die homologen Winkel *Bac* und

BAC, desgleichen B*ca* und BCA gleich sind, so ist *ac* parallel mit AC. Daraus folget nun (§. 27.), daß

B*a*, BA :: B*c*, BC

oder *b a*, BA :: *bc*, BC.

Leget man die Ecke *c* auf die Ecke C, so läßt sich eben so beweisen, daß

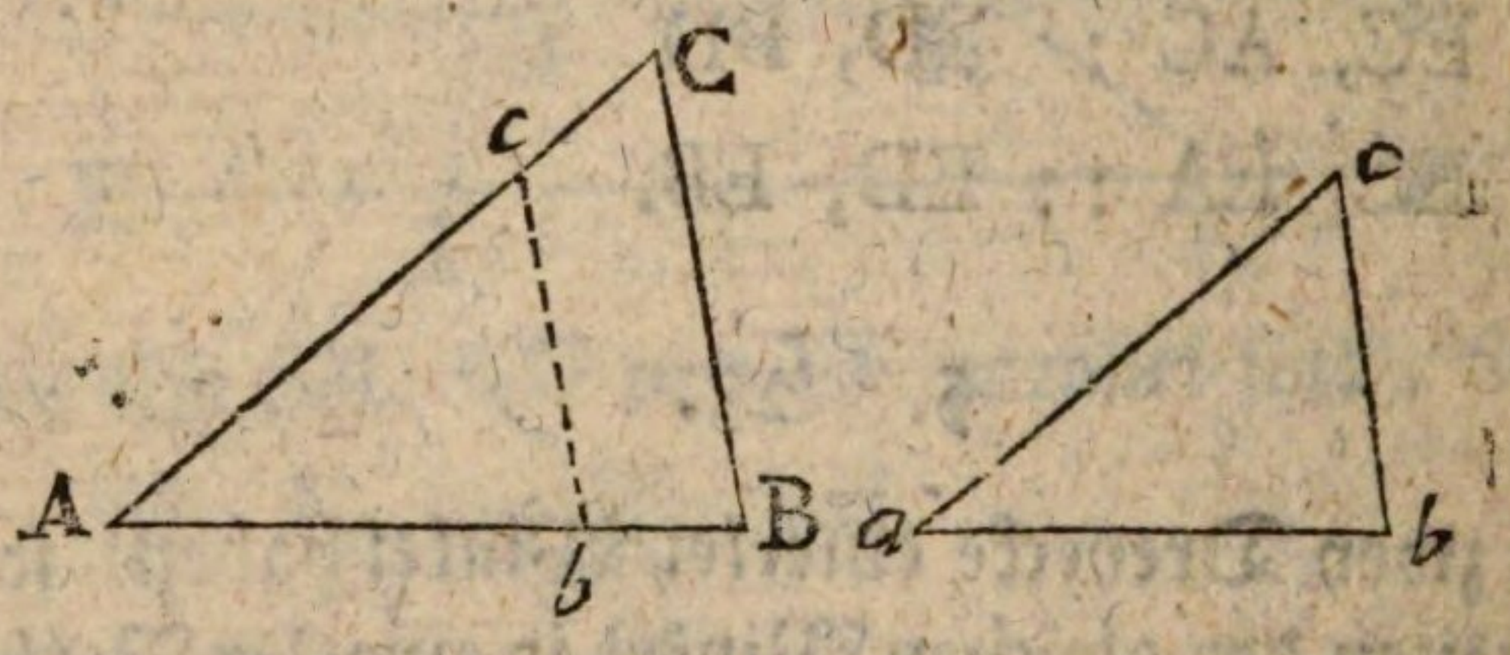
bc, BC :: *ac*, AC.

Also ist *ba*, BA :: *bc*, BC :: *ac*, AC

oder *ba*, *bc*, *ac* :: BA, BC, AC.

§. 29.

Wenn in zwey Dreyecken ein Winkel dem einen, und der andere dem andern gleich ist, so ist auch der dritte dem dritten gleich.



Es sey $\angle A = \angle a$

$\angle B = \angle b$

Lege der kleinere Dreyeck auf dem größeren, nemlich den Winkel *a* auf $\angle$ A, so fällt *ab* auf AB und *ac* auf AC. Ziehe *bc*, so sind *bc* und BC parallel, weil die homologen Winkel in *b* und B g eich sind.

Da nun *bc* und BC parallel sind, so sind auch die homologen Winkel in *c* und C gleich.

Also ist $\angle c = \angle C$.

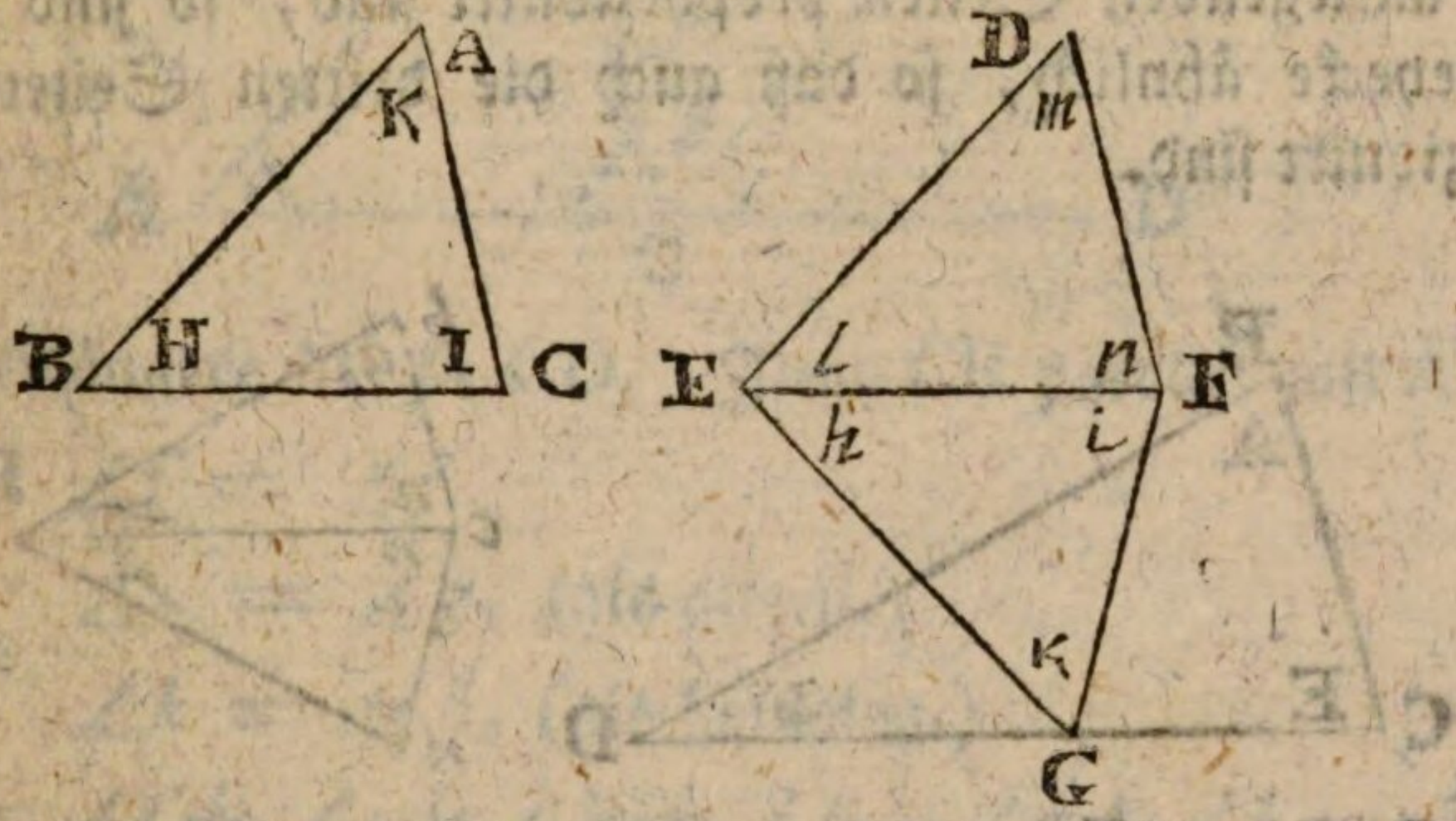
Zusatz. Sind die drey Winkel in beyden Dreyecken einerley, so sind auch die homologen Seiten proporzionirt

(§. 28.),

(§. 28.), und folglich sind die Dreyecke ähnlich. Sobald also nur zwey Winkel eines Dreyeckes zweyen Winkel eines andern gleich sind, jeder mit jedem verglichen, so läßt sich daraus schließen, daß beyde Dreyecke ähnlich, und die Seiten proporzionirt sind.

§. 30.

Wenn zwey Dreyecke proporzionirte Seiten haben, so sind sie auch gleichwinklich, nemlich die gleichen Winkel liegen den homologen Seiten gegenüber.



Es seyen in den Dreyecken BAC und EDF die gleichliegenden Seiten proporzionirt.

Mache $\angle h = \angle H$, $\angle i = \angle I$, so ist auch $\angle k = \angle K$. (§. 29.) Folglich ist $\triangle$ EGF $\sim \triangle$ ABC, und es ist

AB, BC :: GE, EF.

Es war angenommen

AB, BC :: DE, EF

also ist GE, EF :: DE, EF

oder GE, DE :: EF, EF.

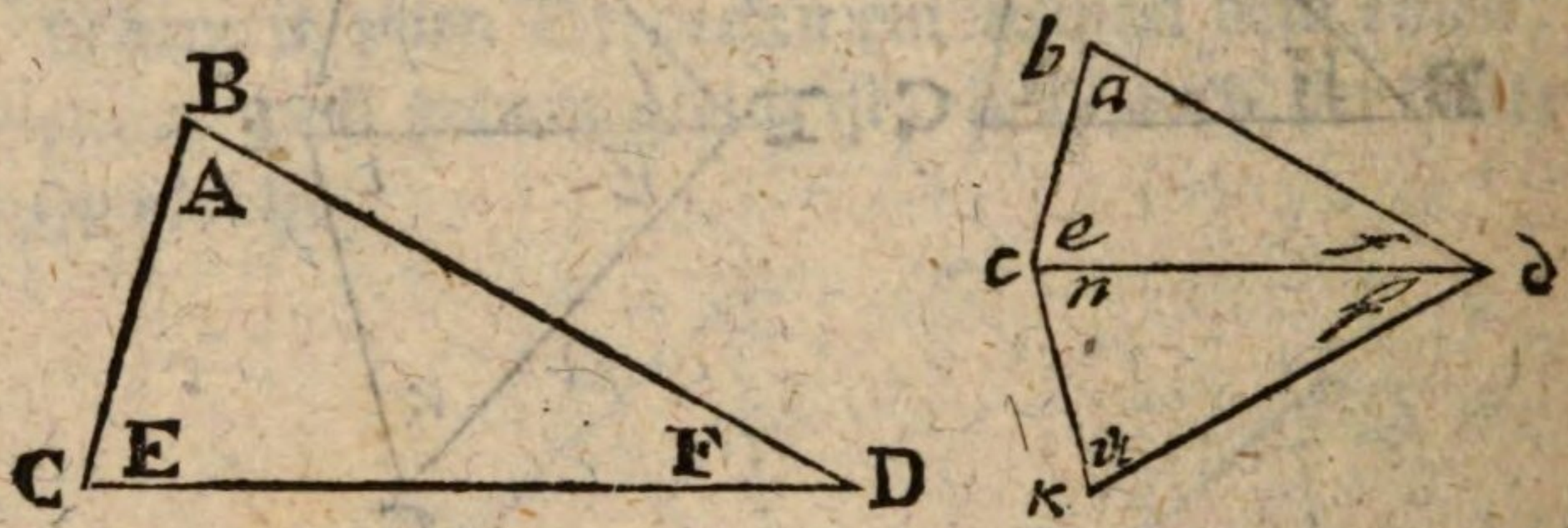
Daher ist GE = DE.

Auf ähnlicher Art kann man beweisen, daß GF = DF. Es ist EF beyden Dreyecken EDF und EGF gemein. Also sind die Dreyecke DEF und GEF ähnlichgleich, folglich ist

$$\angle l = \angle h = \angle H,$$
$$\angle m = \angle k = \angle K$$
$$\angle n = \angle i = \angle I.$$

§. 31.

Wenn in zwey Dreyecken der nemliche Winkel ist, und die anliegenden Seiten proporzionirt sind, so sind beyde Dreyecke ähnlich, so daß auch die dritten Seiten proporzionirt sind.



Es sey $\angle E = \angle e$
und BC, CD :: *bc*, *cd*.

Mache $\angle f = F$, $\angle e = \angle E$, so ist $\angle a = \angle A$ (§. 29.) Folglich sind die Dreyecke CBD, *ckd* gleicheckig.

Also ist BC, CD :: *kc*, *cd*

es war angenommen

BC, CD :: *bc*, *cd*

also ist *kc*, *cd* :: *bc*, *cd*

oder *kc*, *bc* :: *cd*. *cd*.

Also ist *kc* = *bc*.

Da nun *kc* = *bc*, *cd* = *cd*, und $\angle e = \angle e$, so ist $\triangle cbd \cong \triangle ckd$.

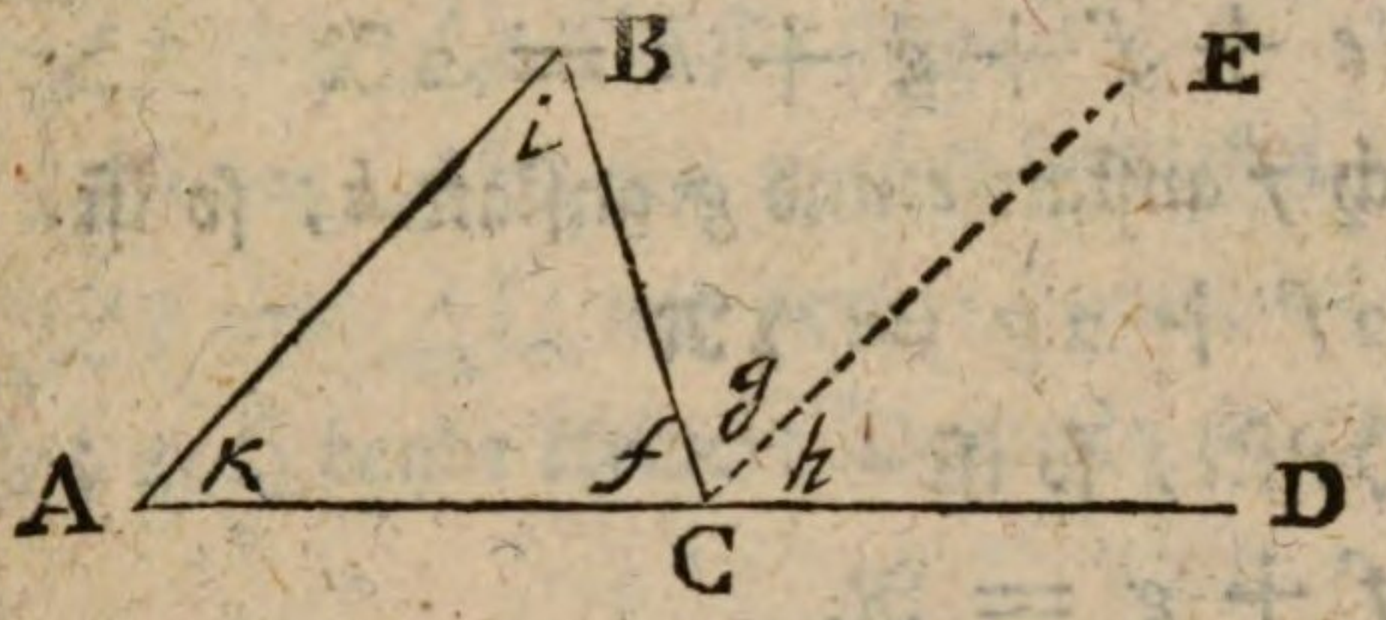
Also ist $\angle f = \angle f = \angle F$

$\angle a = \angle a = \angle A$

und BD, *bd* :: BC, *bc* :: CD, *cd*,

§. 32.

Die drey Winkel eines Dreyecks machen zusammen allemal so viel als 2 rechte.



Verlängere AC in CD. Ziehe CE parallel mit AB,

So ist $\angle f = \angle f$

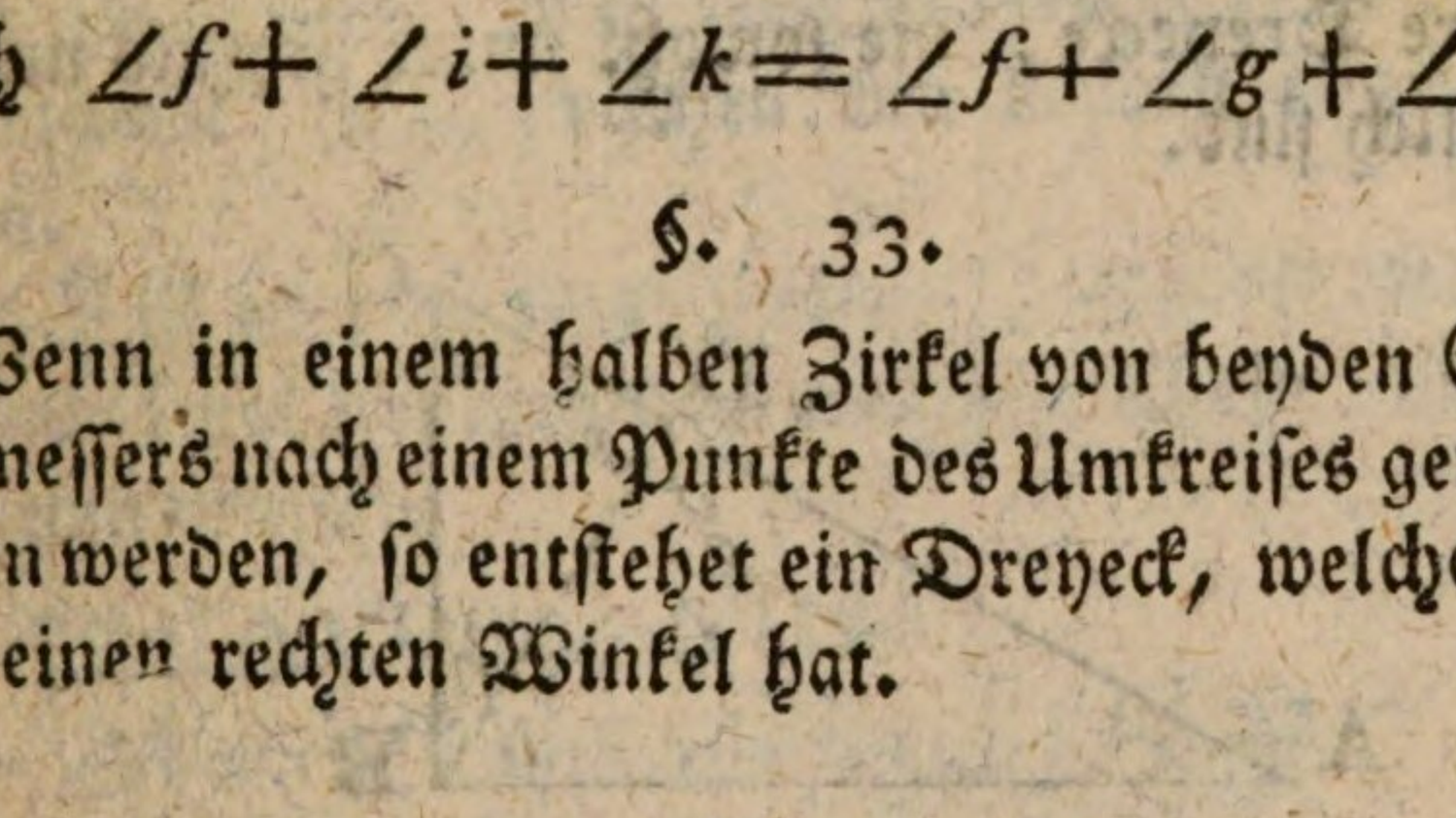
$\angle i = \angle g$, (als altern.)

$\angle k = \angle h$, (als homolog.)

folglich $\angle f + \angle i + \angle k = \angle f + \angle g + \angle h = 2\,\mathfrak{R}$.

§. 33.

Wenn in einem halben Zirkel von beyden Enden des Halbmessers nach einem Punkte des Umkreises gerade Linien gezogen werden, so entstehet ein Dreyeck, welches am Umkreise einen rechten Winkel hat.



Im Dreyecke ADB ist

$$\angle e + \angle (f + g) + \angle h = 2\,\Re \text{ (§. 32.)}$$

oder $e + f + g + h = 2\,\Re$.

Im Dreyecke DCB ist CD = CB folglich $\angle e = \angle f$.

Im Dreyecke DCA ist CD = CA folglich $\angle h = \angle g$.

In der Gleichung

$$e + f + g + h = 2\,\Re$$

setze demnach f anstatt e und g anstatt h, so ist

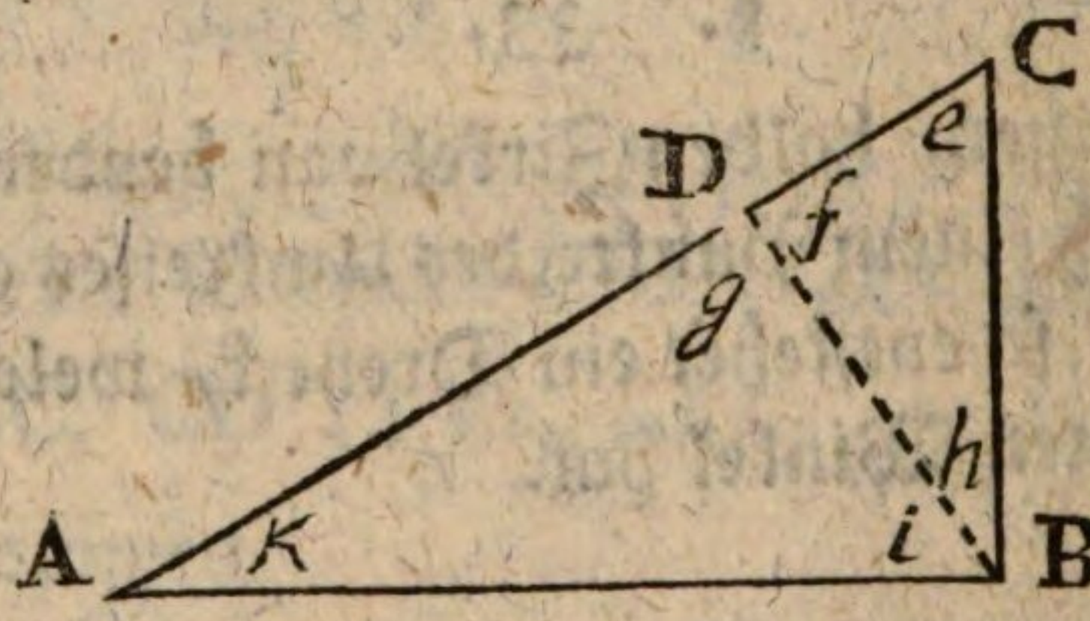
$$2f + 2g = 2\,\Re$$

nimm die Hälfte, so ist

$$f + g = \Re.$$

§. 34.

Wenn in einem Dreyecke, welches einen rechten Winkel hat, vom Scheitel desselben auf die Gegenseite eine Perpendikular-Linie gezogen wird, so entstehen zwey kleinere Dreyecke, die sowohl unter sich als mit dem ganzen ähnlich sind.



Es sey das Dreyeck ABC rechtwinklich in B, und es werde gezogen BD senkrecht auf AC, so ist in den Dreyecken CDB und CBA

$\angle f = \angle (h + i)$ (beyde rechte.)

$\angle e = \angle e$ (beyden Dreyecken gemein.)

folglich $\angle h = \angle k$

also ist das Dreyeck CDB mit dem ganzen ABC ähnlich.

In

In den Dreyecken BDA und CBA ist

$\angle (h + i) = \angle g$ (beyde rechte.)

$\angle k = \angle k$ (beyden gemein.)

folglich $\angle e = \angle i$.

Also ist auch das Dreyeck ADB ähnlich mit dem ganzen ABC.

In beyden kleineren Dreyecken ist

$\angle f = \angle g$ (beyde rechte)

$\angle h = \angle k$, wie vorher bewiesen.

$\angle e = \angle i$, wie vorher bewiesen.

Folglich sind auch beyde kleinere Dreyecke ADB und BDC ähnlich.

§. 35.

(Siehe die vorhergehende Figur.)

Wenn ein Dreyeck einen rechten Winkel hat, und es wird vom Scheitel desselben auf die Gegenseite eine senkrechte Linie gezogen, so ist diese senkrechte Linie die mittlere Proporzional-Linie zwischen den beyden abgeschnittenen Theilen.

Auch ist jede der ungetheilten Seiten die mittlere Proporzional-Linie zwischen dem nächsten Theile und der ganzen dritten Seite.

I) Weil $\triangle$ CDB $\backsim \triangle$ DBA

indem $\angle h = \angle k$ und $\angle e = \angle i$, so ist

CD, Gegenseite des $\angle h$

zu DB, Gegenseite des $\angle k$.

Wie DB, Gegenseite des $\angle e$

zu DA, Gegenseite des $\angle i$

oder CD, DB :: DB, DA

oder $\div$ CD, DB, DA.

II) Weil $\triangle DCB \sim \triangle BCA$ (§. 34), und $\angle h = \angle k$, $\angle f = \angle (h + i)$ so ist

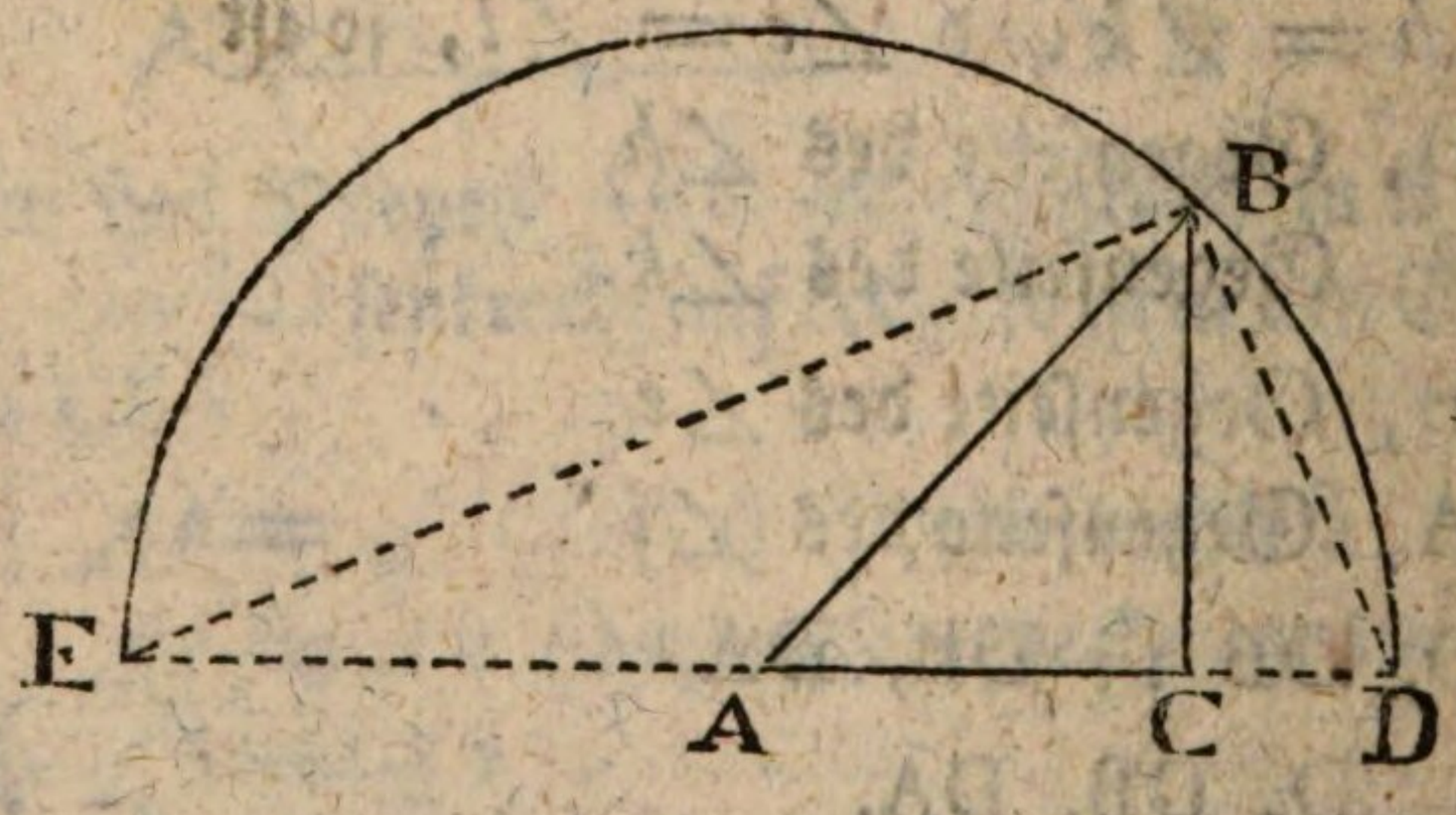
DC, Gegenseite des $\angle h$
zu CB, Gegenseite des $\angle k$.
Wie BC, Gegenseite des $\angle f$
zu CA, Gegenseite des $(h + i)$
oder DC, CB :: CB, CA
oder $\div$ DC, CB, CA.

Desgleichen weil $\triangle DAB \sim \triangle BAC$ (§. 34.) und $\angle i = \angle e$, $\angle g = \angle (h + i)$, so ist

AD, Gegenseite des $\angle i$
zu AB, Gegenseite des $\angle e$.
Wie AB, Gegenseite des $\angle g$
zu AC, Gegenseite des $\angle (h + i)$
oder AD, AB :: AB, AC
oder $\div$ AD, AB, AC.

§. 36.

Wenn ein Dreyeck einen rechten Winkel hat, so ist jede an demselben liegende Seite die mittlere Proporzional-Linie zwischen der Summe und der Differenz der beyden übrigen Seiten.



Es

Es habe das Dreyeck ACB einen rechten Winkel in C. Aus A mit dem Halbmesser AB beschreibe einen Zirkel. Verlängere beyderseits AC bis an den Umkreis in D und in E, Ziehe BD und BE. So hat das Dreyeck EBD auch einen rechten Winkel in B (§. 33.), und weil BC auf ED senkrecht stehet, so ist (§. 35.)

$$\div\div \text{ EC, BC, CD}$$

Es ist aber $EC = AE + AC$, $= AB + AC$, weil $AB = AE$.

Es ist auch $CD = AD - AC = AB - AC$, weil $AD = AB$.

Setze in der Proporzion $AB + AC$ anstatt EC, und $AB - AC$ anstatt CD, so ist

$$\div\div (AB + AC), BC, (AB - AC)$$

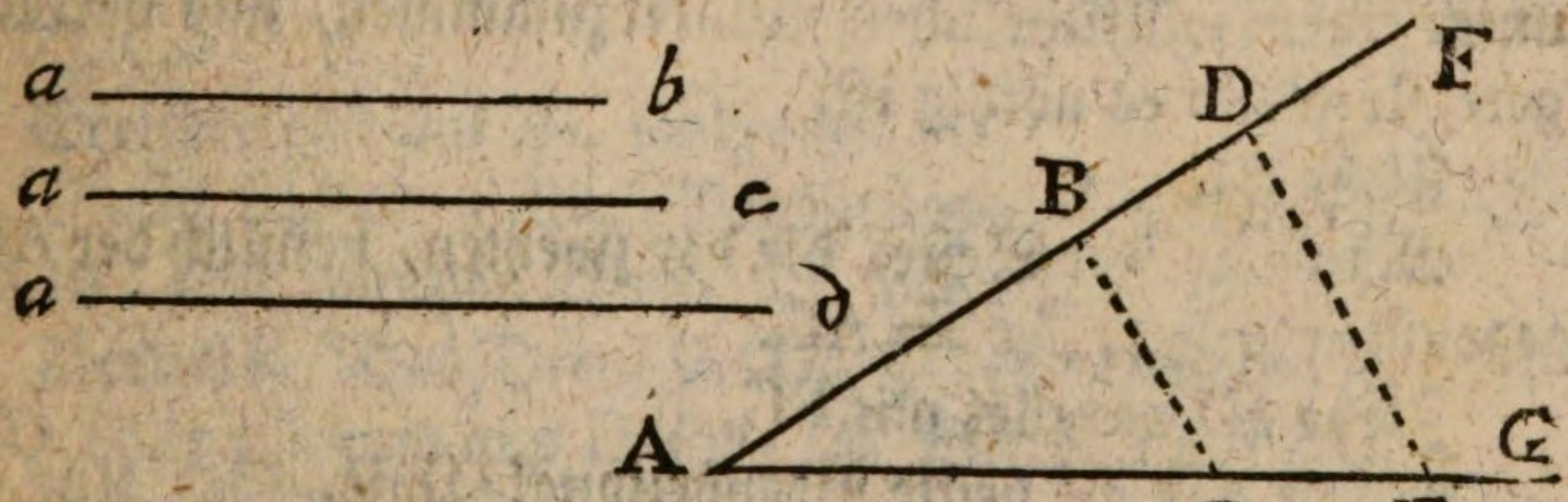
Wenn man den Zirkel aus B durch A ziehet und BC verlängert, so kann man ebenfalls beweisen, daß

$$\div\div (AB + BC), AC, (AB - BC)$$

§. 37.

Aufgabe.

Es sind drey gerade Linien gegeben. Man soll die vierte Proporzional-Linie finden.



Auflösung. Ziehe zwey unbestimmte Linien AG, AF unter welchem Winkel du willst.

Mache $AB = ab$ der ersten gegebenen, $AC = ac$ der zweyten gegebenen, und ziehe BC.

Mache AD = *ad* der dritten gegeben, auf der nemlichen AF wo die erste angebracht worden, und ziehe DE parallel mit BC.

So ist AE die vierte Proporzional-Linie.

Beweis. Es wird wie bey §. 28. bewiesen, daß die Dreyecke ABC und ADE gleiche Winkel haben, und ähnlich sind.

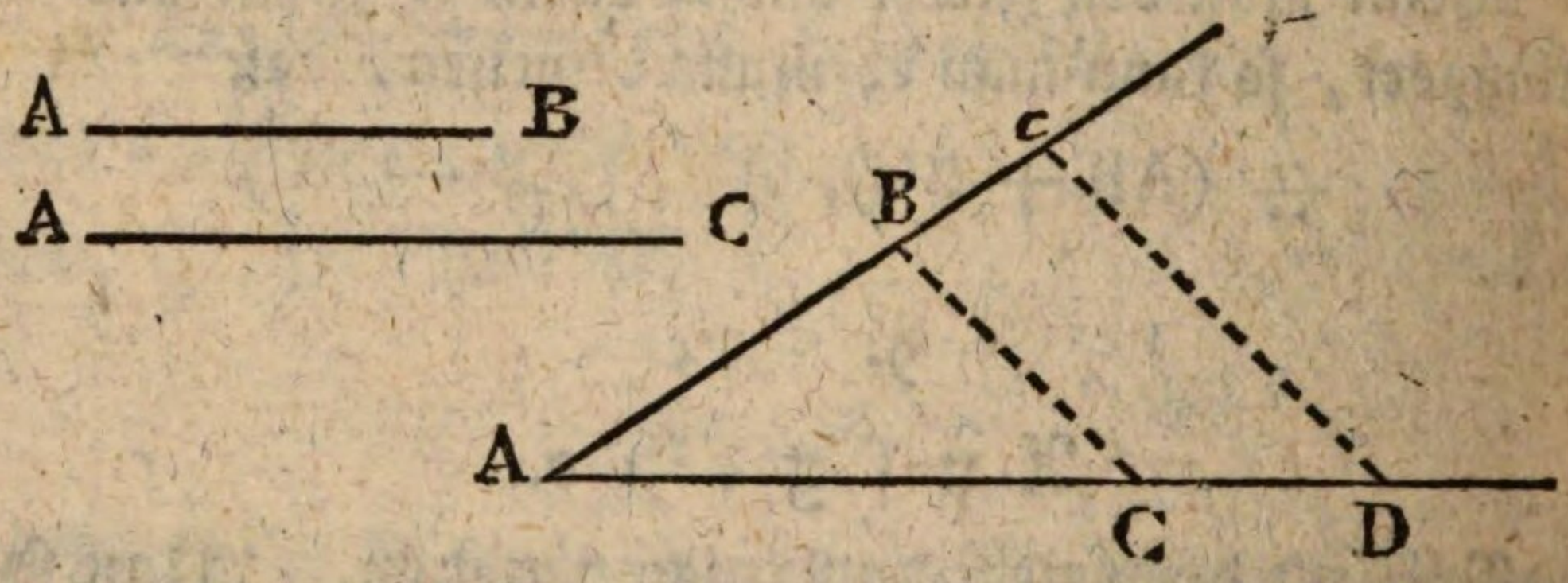
Also ist AB, AC :: AD, AE.

oder *ab*, *ac* :: *ad*, AE.

§. 38.

Aufgabe.

Es sind zwey gerade Linien gegeben. Man soll die dritte Proporzional-Linie finden.



Auflös. Bringe beyde gegebene Linien AB und AC unter einem willkührlichen Winkel zusammen, und verlängere sie wenn es nöthig ist.

Ziehe CB.

Mache auf der Seite, die der zweyten, nemlich der AC gegenüber stehet, Ac = AC.

Ziehe *c*D parallel mit BC.

So ist AD die dritte Proporzional-Linie.

Beweis. Denn weil *c*D mit BC parallel ist, so sind die homologen Winkel bey B und *c*, desgleichen bey C und D einander gleich.

Beyde Dreyecke ABC und A*c*D haben auch den gemeinschaftlichen Winkel A.

Also

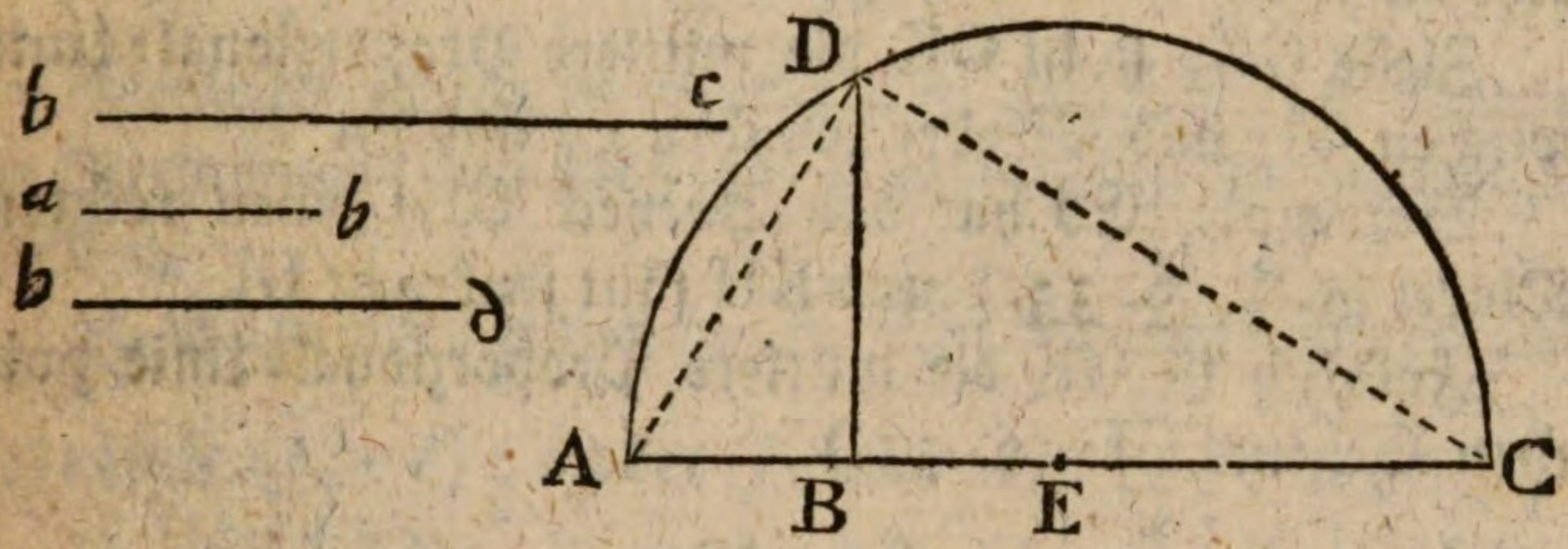
Also (§. 29.) ist AB zu AC, wie Ac zu AD, oder, weil Ac = AC, so ist

∴ AB, AC, AD.

§. 39.

Aufgabe.

Es sind zwey gerade Linien gegeben. Man soll die mittlere Proporzional-Linie finden.



Auflösung. Es seyen gegeben *ab* und *bc*, und es solle gefunden werden *bd*, so daß

ab, *bd*, :: *bd*, *bc*

oder ∴ *ab*, *bd*, *bc*

Mache AB = *ab* und BC = *bc*. Halbire AC in E, und aus dem Mittelpunkte E beschreibe den halben Zirkel ADC.

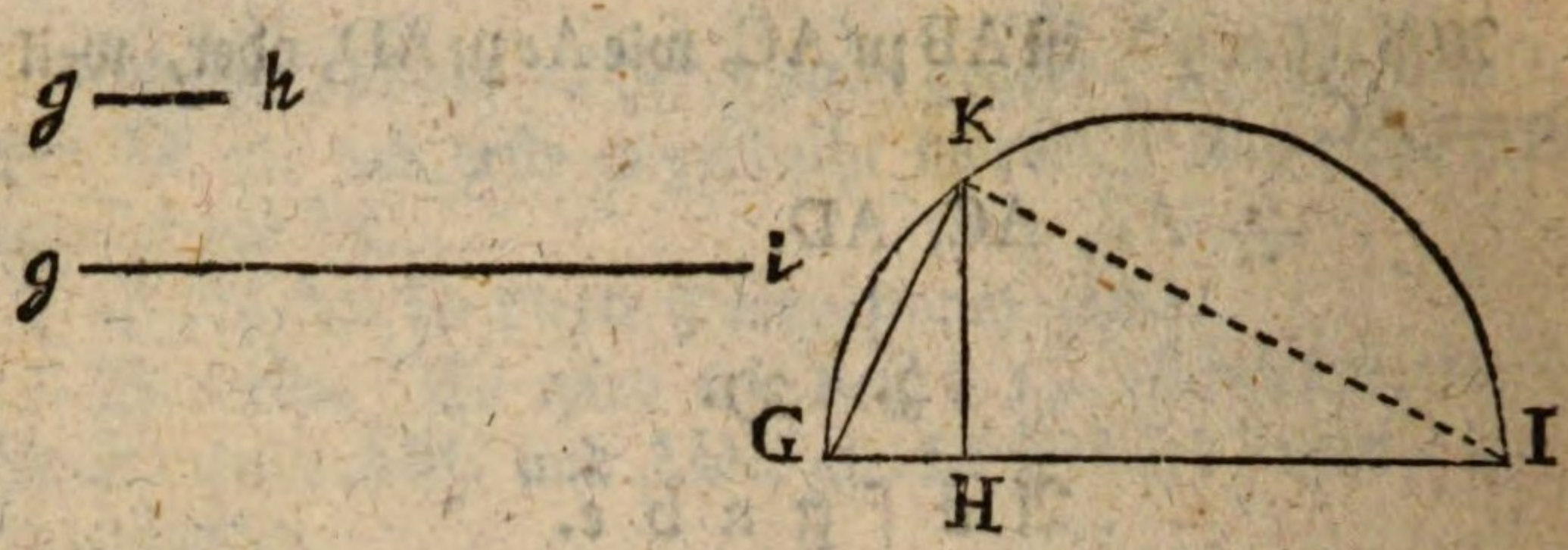
Errichte DB auf AC senkrecht.

So ist BD die mittiere Proporzional-Linie zwischen AB und BC oder zwischen *ab* und *bc*, das ist, *bd* = BD.

Beweis. Das Dreyeck ADC hat einen rechten Winkel in D (§. 33.) und aus D fällt DB senkrecht auf AC.

Also ist DB die mittlere Proporzional-Linie zwischen AB und BC. (§. 34.)

Anders. Es soll zwischen *gh* uud *gi* die mittlere Proporzional-Linie gefunden werden.



Mache GI = *gi* und GH = *gh*. Beschreibe über GI einen halben Zirkel, und errichte HK senkrecht auf GI.

Ziehe GK, so ist GK die mittlere Proporzional-Linie zwischen GH und GI oder zwischen *gh* und *gi*.

Beweis. Es hat das Dreyeck GKI einen rechten Winkel in K (§. 33.) und KH fällt senkrecht GI.

Folglich ist GK die mittlere Proporzional-Linie zwischen GH und GI. (§. 35.)

§. 40.

Wenn die Linien in Zahlen gegeben sind, so wird zu drey derselben die vierte Proporzional-Linie gefunden, indem man die zweyte und dritte mit einander multiplizirt und das Produkt durch die erste dividiret.

Z. E. Es sey die erste von 3 Fuß, die zweyte von 7 Fuß, die dritte von 4 Fuß, so ist die vierte $(4 \times 7) : 3$ oder $28 : 3$ oder $9\frac{1}{3}$ Fuß.

Soll zu zwey Linien die dritte Proporzional-Linien gefunden werden, so wird die zweyte mit sich selbst multiplizirt, und das Produkt durch die erste dividiret. Es sey die erste 8, die andere 12, so ist die dritte $(12 \times 12) : 8$ oder $144 : 8$ oder 18.

Wird zwischen zwey Linien die mittlere Proporzional-Linie verlanget, so wird die erste mit der letzten multiplicirt, und aus dem Produkte die Quadratwurzel gezogen. Dieses wird in der Algebra bewiesen. Wie aber die Quadratwurzel einer Zahl gefunden wird, lehret ebenfalls die Rechenkunst.

Es werde zwischen einer Linie von 9 Fuß und einer andern von 17 Fuß die mittlere Proporzional-Linie verlanget, so ist solche $\sqrt{(9 \times 17)}$ oder $\sqrt{153}$, und wenn man wirklich die Quadratwurzel suchet, so findet man 12, 369.... das ist $12 + \frac{3}{10} + \frac{6}{100} + \frac{9}{1000} +$ &c. Dieses ist eine irrazionale Zahl, die sich nicht durch die Einheit messen läßt: je weiter man aber die Rechnung fortsetzt, desto mehr nähert man sich dem wahren Werthe der mittleren Proporzional-Linie.

§. 41.

Sind die Linien in Buchstaben gegeben, so können die Rechnungen nur bloß auf algebraischer Art angezeiget werden.

Z. E. zu drey Linien a, b, c ist die vierte Proporzional-Linie $(b \times c) : a$ oder $(bc) : a$ oder $\frac{bc}{a}$, das heißt

$$a, b :: c, \frac{bc}{a}$$

Zu zwey Linien d und f ist die dritte Proporzional-Linie $(ff) : d$ oder $\frac{ff}{d}$ oder $\frac{f^2}{d}$. Es ist nemlich

$$\therefore d, f, \frac{f^2}{d}$$

oder $d, f :: f, \frac{f^2}{d}$

Zwischen zwey Linien g und h ist die mittlern Proporzional-Linie $\sqrt{(gh)}$, so daß

$$g, \sqrt{(gh)}, :: \sqrt{(gh)}, h$$

oder $\therefore g, \sqrt{(gh)}, h.$

§. 42.

Gleichungen vom ersten Grade können vermittelst proporzionirter Linien konstruiret werden, wie aus folgenden Exempeln erhellet.

I) Es sey $x = \frac{ab}{c}$, so ist

$$c,\ a :: b,\ \frac{ab}{c}\ (= x)$$

Es wird demnach x gefunden, wenn man zu c, a und b die vierte Proporzional-Linie suchet.

II) Es sey $x = \frac{abc}{de}$.

Man sage erstlich

$$d,\ a :: b,\ \frac{ab}{d}$$

Ferner $e,\ \frac{ab}{d} :: c,\ \frac{abc}{de}\ (= x)$.

Es wird also x gefunden, indem man erstlich zu d, a und b die vierte Proporzional-Linie, hernach zu e, zur gefundenen $\frac{ab}{d}$ und zu c wiederum die vierte Proporzional-Linie suchet.

III) Es sey $x = \frac{ab \pm cd}{e} = \frac{ab}{e} \pm \frac{cd}{e}$ so suche vermittelst des ersten Falles $\frac{ab}{c}$ und $\frac{cd}{e}$, nimm hernach die Summe oder die Differenz beyder gefundener Linien.

IV) Es

IV) Es sey $x = \frac{abc \pm def}{gh}$

$$= \frac{abc}{gh} \pm \frac{def}{gh}$$

so suche vermöge des zweyten Falles $\frac{abc}{gh}$ und $\frac{def}{gh}$, nimm die Summe oder die Differenz.

V) Es sey $x = \frac{ab}{c \pm d}$

Nimm die Summe oder Differenz von c und d, hernach sage

$$(c \pm d),\ a :: b,\ \frac{ab}{c \pm d}\ (= x)$$

VI) Es sey $x = \frac{abc}{de \pm fg}$

Dividire den Nenner durch eine der Größen, die darin enthalten sind, als durch d, und multiplizire ihn wiederum mit der nemlichen Größe, so ist

$$x = \frac{abc}{d\left(e \pm \frac{fg}{d}\right)}$$

Suche vermöge des ersten Falles $\frac{fg}{d}$, setze e hinzu, oder nimm $\frac{fg}{d}$ von e ab, so hast du

du $e \pm \frac{fg}{d}$. Nun sage

$$\left(e \pm \frac{fg}{d}\right),\ a :: b,\ \frac{ab}{e \pm \frac{fg}{d}}$$

Ferner

Ferner

$$d, \frac{ab}{e \pm fg} :: c, \frac{abc}{d\left(e \pm \frac{fg}{d}\right)} \quad (= x)$$

Anders. Dividire Zähler und Nenner durch einen Faktor drs Zählers, z. E. durch a, so ist

$$x = \frac{\frac{bc}{}}{\frac{de}{a} \pm \frac{fg}{a}}$$

Suche vermöge des ersten Falles $\frac{de}{a}$ und $\frac{fg}{a}$, mache die Summe oder Differenz.

Sage nun

$$\left(\frac{de}{a} \pm \frac{fg}{a}\right), b :: c, \frac{\frac{bc}{}}{\frac{de}{a} \pm \frac{fg}{a}} \quad (= x)$$

VII) Es sey $x = \frac{ab \pm cd}{e \pm f}$

oder $x = \frac{ab}{e \pm f} \pm \frac{ed}{e \pm f}$

Suche vermöge des fünften Falles beyde Theile des Bruches, und mache die Summe oder Differenz.

VIII) Es sey $x = \frac{abc + def}{gh \pm ki}$

oder $x = \frac{abc}{gh \pm ki} \pm \frac{def}{gh \pm ki}$

Suche

Suche beyde Theile des Bruches vermöge des sechsten Falles, und mache die Summe oder Differenz.

IX) Es sey $x = \frac{a^2}{b}$

so sage $b,\ a :: a,\ \frac{a^2}{b}\ (= x)$

X) Es sey $x = \frac{a^3}{bc}$

sage $b,\ a :: a,\ \frac{a^2}{b}$

ferner $c,\ \frac{a^2}{b} :: a,\ \frac{a^3}{bc}\ (= x)$

XI) Es sey $x = \frac{a^2 \pm b^2}{c} = \frac{a^2}{c} \pm \frac{b^2}{c}$

so suche vermöge des neunten Falles $\frac{a^2}{c}$ und $\frac{b^2}{c}$, und setze beyde zusammen, oder nimm die Differenz.

§. 43.

Gleichungen vom zweyten Grade lassen sich durch den Zirkel und das rechtwinkliche Dreyeck konstruiren.

I) Es sey $x^2 = ab$, oder $x = \sqrt{(ab)}$

so ist $a,\ x :: x,\ b$

oder x, ist die mittlere Proporzional-Linie zwischen a und b, welche nach §. 39 gefunden werden kann.

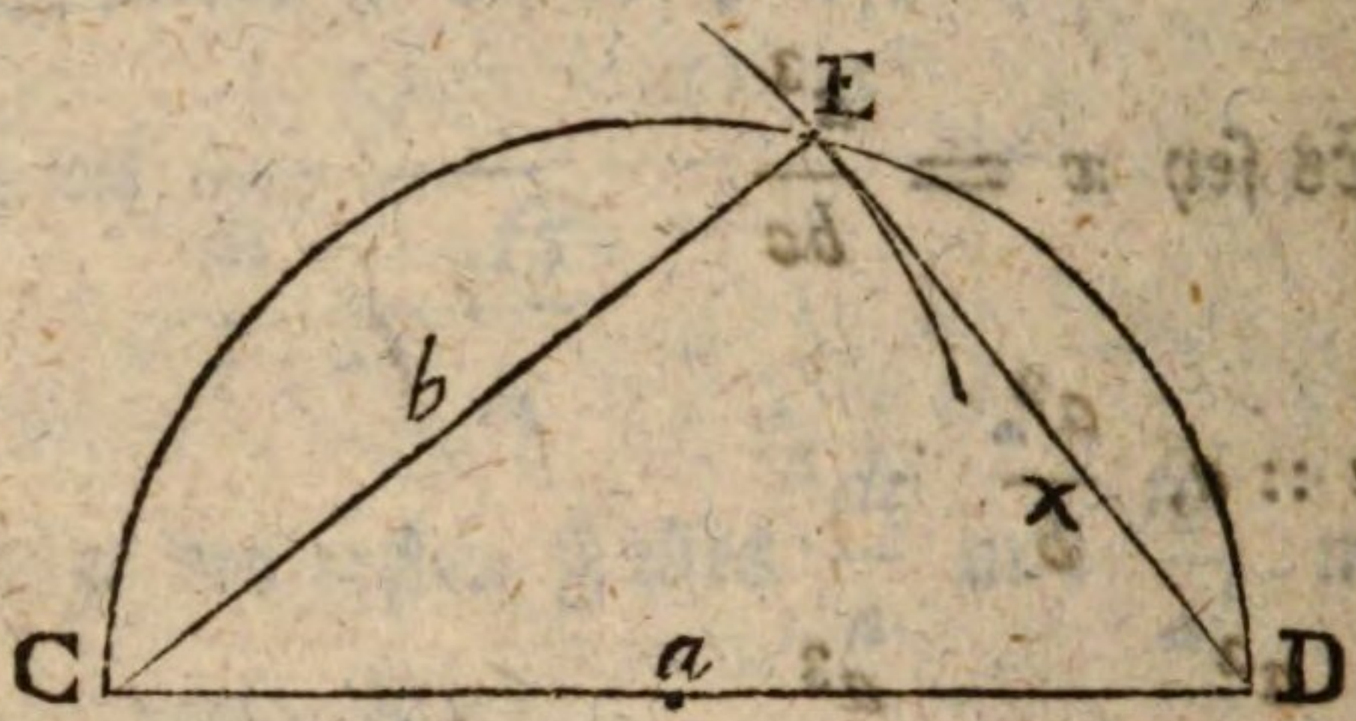
II) Es sey $x^2 = a^2 - b^2$

so merke daß $a^2 - b^2$ das Produkt ist von $(a+b)$, $(a-b)$, also ist

$$x^2 = (a+b).(a-b)$$

oder $(a-b),\ x :: x,\ (a+b)$

Es ist demnach x die mittlere Proporzional-Linie zwischen der Summe und der Differenz von a und b.

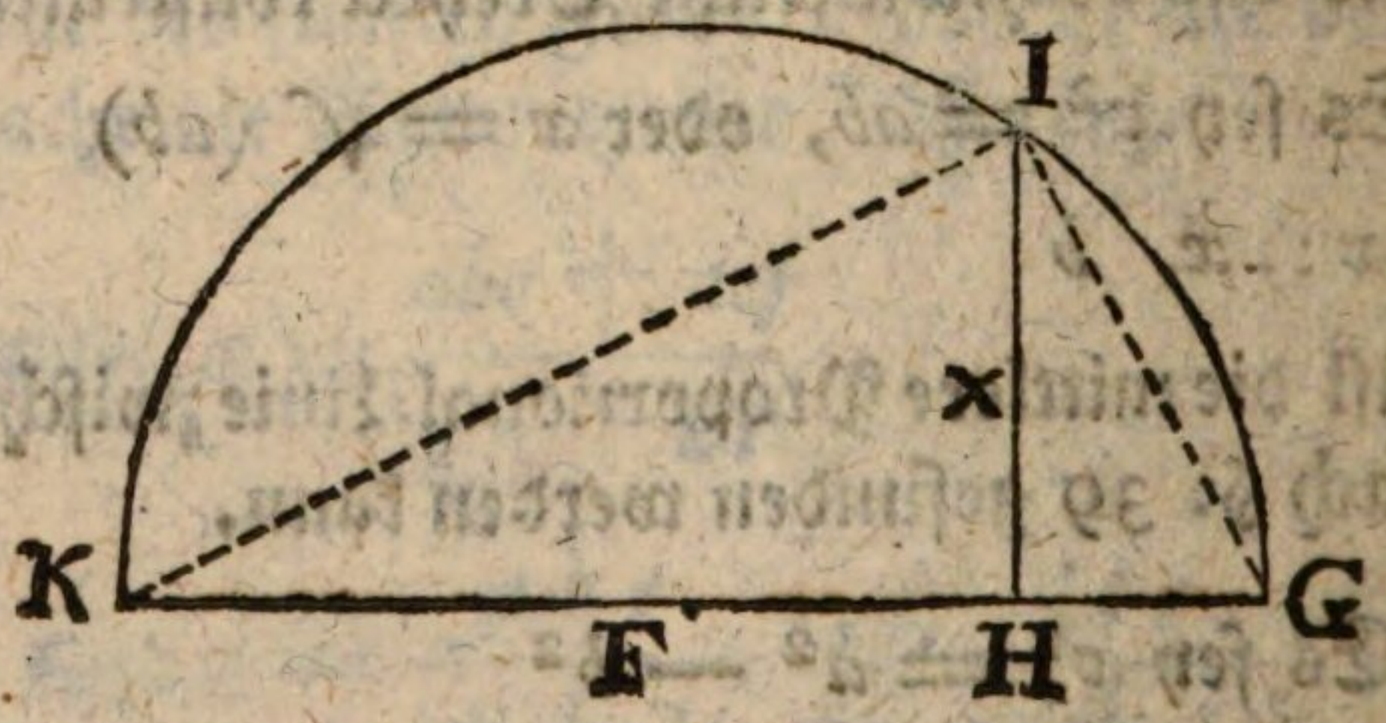


Mache CD $= a$. Halbire CD im Punkt a, und beschreibe aus a durch C oder D einen halben Zirkel über CD.

Aus C mit einem Halbmesser $= b$, beschreibe einen Zirkel oder Bogen, der den vorigen Umkreis irgendwo in E schneiden wird, so ist CE $= b$.

Ziehe ED, so ist ED $= x$.

Denn das Dreyeck CED hat einen rechten Winkel in E (§. 33.). Also ist ED oder x die mittlere zwischen CD + CE und CD — CE oder zwischen $a+b$ und $a-b$ (§. 36.), wie es die gegebene Gleichung erfordert.



Anders.

Anders. Nimm FG = A, und FH = b. Verlängere FG nach K zu. Aus F mit dem Halbmesser FG beschreibe über GK einen halben Zirkel. Ziehe HI senkrecht auf KG.

So hat das Dreyeck KIG eine rechte Ecke in I (§. 33.) und weil IH senkrecht ist auf KG, so ist HI die mittlere zwischen KH und HG, oder zwischen KF + FH und FG — FH, oder weil KF = FG (II. §. 10) = a, und FH = b, zwischen $a+b$ und $a-b$.

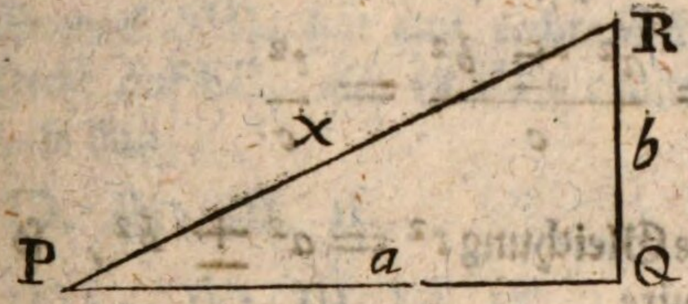
III) Es sey $x^2 = a^2 + b^2$,

so ist $x^2 - b^2 = a^2$

oder $(x+b)(x-b) = a^2$

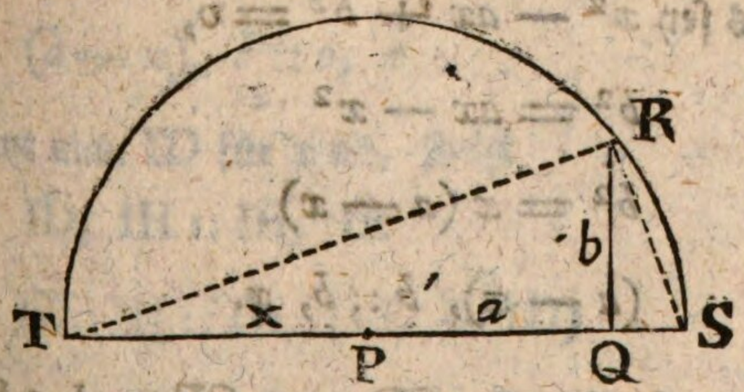
oder $(x-b), a :: a, (x+b)$

das heißt x muß so beschaffen seyn, daß a die mittlere sey zwischen $x-b$ und $x+b$



Mache PQ = a, QR = b und senkrecht auf PQ. Ziehe PR, so ist PR = x.

Denn es ist, wie es die Gleichung erfordert, PQ oder a die mittlere zwischen PR + QR und PR — QR, oder zwischen $x+b$ und $x-b$ (§. 36).



Anders. Mache wie vorher PQ = a, QR = b und senkrecht auf PQ. Verlängere PQ beyderseits nach S und nach T.

Aus P durch den Punkt R beschreibe über TS einen halben Kreis, so ist der Halbmesser PS oder PT $= x$.

Denn das Dreyeck TRS hat eine rechte Ecke in R und QR ist senkrecht auf TS.

Also ist QR oder b die mittlere zwischen TQ und QS, das ist zwischen TP + PQ und PS — PQ oder zwischen $x+a$ und $x-a$. Daher ist $b^2 = (x+a)\ (x-a) = x^2 - a^2$ und $x^2 = a^2 + b^2$.

Anmerkung. Vermittelst beyder vorigen Fälle können auch einige Gleichungen vom ersten Grade konstruiret werden.

Es sey $x = \frac{a^2 \pm b^2}{c}$, so setze anfänglich, es sey $a^2 \pm b^2 = t^2$, so ist

$$x = \frac{a^2 \pm b^2}{c} = \frac{t^2}{c}$$

Konstruire die Gleichung $t^2 = a^2 \pm b^2$, so findest du t, nun konstruire

$$x = \frac{t^2}{c}$$

vermöge des neunten Falles im vorigen Paragraph.

IV) Es sey $x^2 - ax + b^2 = o$,

oder $b^2 = ax - x^2$

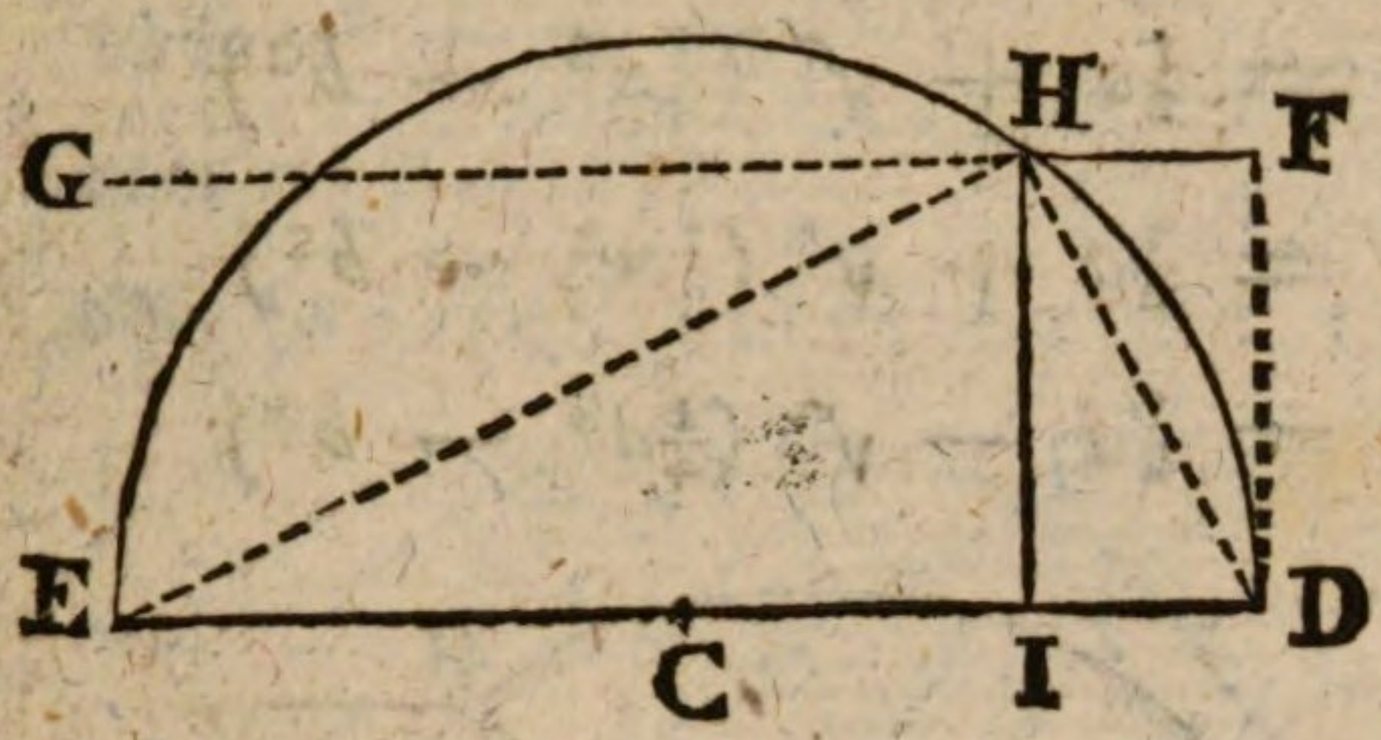
oder $b^2 = x\,(a-x)$

oder $(a-x),\ b :: b,\ x.$

Mit dem Halbmesser CD oder CE $= \frac{1}{2}\,a$ beschreibe einen Zirkel und ziehe den Durchmesser ED $= a$.

In

In D errichte DF = *b* und senkrecht auf ED. Ziehe FG parallel mit ED.



Vom Punkte H, wo die Parallel-Linie den Umkreis schneidet, ziehe HI senkrecht auf CD.

So ist DI oder auch IE = *x*.

Denn es ist HI = DF.

Das Dreyeck EHD hat eine rechte Ecke in H, und HI ist senkrecht auf ED, also ist HI die mittlere zwischen EI und ID, so daß

ID, IH :: IH, IE

oder (ED — IE), IH, IH, IE

oder weil ED = *a*, und IH = *b*

(*a* — IE), *b* :: *b*, IE

oder wenn man IE für *x* annimmt

(*a* — *x*), *b* :: *b*, *x*

Nimmt man ID für *x* an, so ist

ID, IH :: IH, IE

oder ID, IH :: IH, (ED — ID)

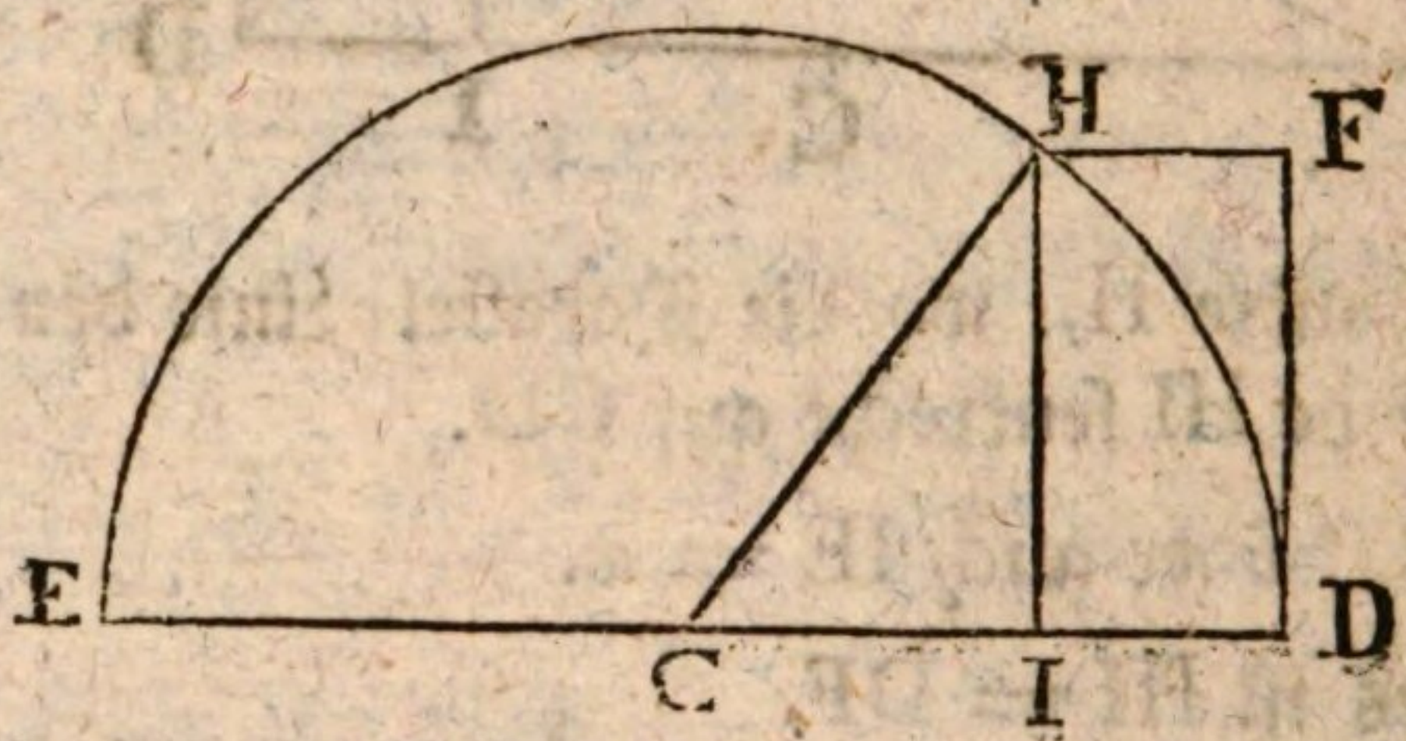
oder *x*, *b* :: *b*, (*a* — *x*)

Daß aber x zwey Werthe haben muß, erhellet auch aus der Algebra. Denn die Gleichung $x^2 - ax + b^2 = o$ giebt

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)}$$

oder $x = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)}$

und $x = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)}$



Und diese beyden Werthe sind die nehmlichen, die vermittelst der geometrischen Konstrukzion gefunden worden.

Es war CD = CE = CH (II. §. 10.) = $\tfrac{1}{2}a$, und es ist gefunden worden DI = x und IE = x, oder CD — CI = x und CE + CI = x, oder $\tfrac{1}{2}a$ — CI = x und $\tfrac{1}{2}a$ + CI = x oder

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \text{CI}.$$

Nun ist CI die mittlere zwischen CH + HI und CH — HI (§. 36.), das ist zwischen $\tfrac{1}{2}a + b$ und $\tfrac{1}{2}a - b$, oder es ist

$$(\tfrac{1}{2}a - b),\ \text{CI} :: \text{CI},\ (\tfrac{1}{2}a + b)$$

daher ist $\text{CI}^2 = (\tfrac{1}{2}a - b) \cdot (\tfrac{1}{2}a + b)$

oder $\text{CI}^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - b^2$

und $\text{CI} = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)}$.

Setzet man diesen Werth der CI in die Gleichung

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \text{CI}$$

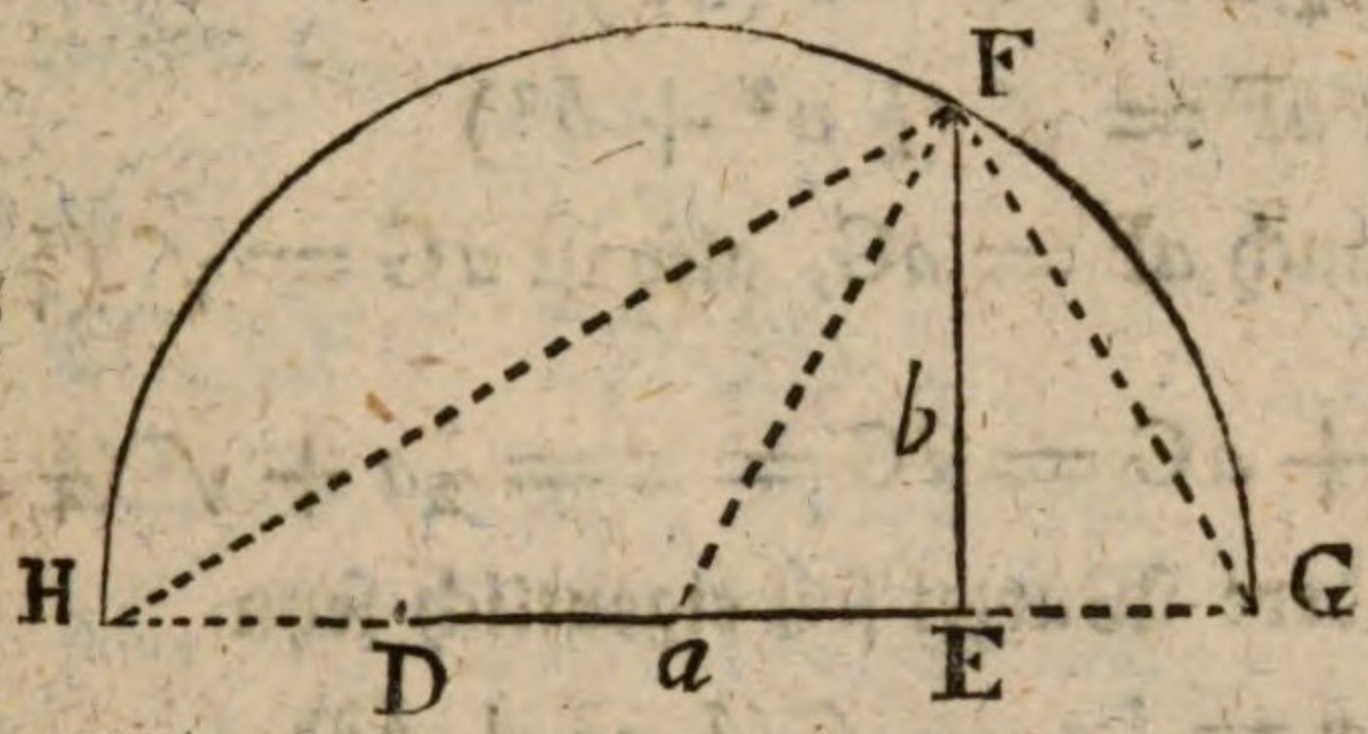
so ist $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$

V) Es sey $x^2 - ax - b^2 = 0$,

oder $x^2 - ax = b^2$

oder $x\,(x - a) = b^2$

oder $(x - a),\ b :: b,\ x.$



Mache DE $= a$, EF $= b$ und senkrecht auf DE. Verlängere beyderseits DE. Halbire DE in a. Aus a beschreibe durch den Punkt F oder mit dem Halbmesser aF einen halben Zirkel über HG oder der verlängerten DE. Nun ist aG $= a$H, aD $= a$E, also aG $+ a$D oder DG $= a$H $+ a$E $=$ HE. Und es ist DG $=$ HE $= x$.

Denn im Dreyeck HFG ist in F eine rechte Ecke (§. 33.) und FE ist senkrecht auf HG, also ist

GE, EF :: EF, EH

(DG — DE), EF :: EF, EH

$(x - a),\ b :: b,\ x.$

Dieser Werth stimmet mit der algebraischen Wurzel der Gleichung überein.

$$x^2 - ax - b^2 = 0$$

giebt $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$

oder $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$

und $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$

Es ist EF oder b die mittlere zwischen $aF + aE$ und $aF - aE$, oder b ist die mittlere zwischen $aF + \frac{1}{2}a$ und $aF - \frac{1}{2}a$,

also ist $(aF - \frac{1}{2}a)$, $b :: b$, $(aF + \frac{1}{2}a)$

oder $b^2 = (aF)^2 - \frac{1}{4}a^2$

oder $\frac{1}{4}a^2 + b^2 = (aF)^2$

daher ist $aF = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$

Es ist auch $aF = aG$, also ist $aG = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$

und

$$D a + aG = \overset{D}{a}G = x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$$

Die andere Wurzel soll eigentlich seyn

$$x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$$

oder $x = aE - aG$

Es ist aber aG oder $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$ allemal größer als aE oder $\frac{1}{2}a$. Es kann also aG von aE nicht abgezogen werden, es müsse denn nach algebraischer Art der Rest als negativ angesehen werden, dann wäre,

$$x = -(aG - aE)$$

oder $x = -EG$

oder $EG = -x$.

Dann ist $ED + DH = EH = -x - a$, und die Proporzion ist

$$(-HE),\ EF :: EF,\ (-EG)$$

oder $(-x - a),\ b :: b,\ (-x)$.

Im Grunde aber gehöret die negative Wurzel EG nicht eigentlich zur Gleichung $x^2 - ax - b^2 = o$, sondern sie ist die propositive Wurzel der Gleichung $x^2 + ax - b^2 = o$, wie wir bald sehen werden. Denn wird x negativ in der Gleichung $x^2 - ax - b^2 = o$, so hat man $(-x)^2 - (a.-x) - b^2 = o$ oder $x^2 + ax - b^2 = o$.

VI) Es sey $x^2 + ax - b^2 = o$, so ist

$$x^2 + ax = b^2$$

$$x\,(x + a) = b^2$$

oder $x,\ b :: b,\ (x + a)$

Konstruire die Gleichung wie im vorigen Falle, so ist EG oder HD $= x$.

Denn es ist

EG, EF :: EF, EH

oder EG, EF :: EF, HD + DE

oder EG, EF :: EF, (EG + DE)

das ist $x,\ b :: b,\ (x + a)$

Die algebraische Wurzel der Gleichung

$$x^2 + ax - b^2 = o$$

ist $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$

nemlich $x = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)} - \frac{1}{2}a$

und $x = -\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)} - \frac{1}{2}a$

Die erste Wurzel ist $=$ EG $=$ aG $-$ aE $=$ aF $-$ aE $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)} - \frac{1}{2}a$.

Die andere soll negativ seyn, nemlich $x = -$ HE $= -$ aH $-$ aE $= -\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)} - \frac{1}{2}a$, und es ist in der That

(— HE), EF :: EF, (— EG)

das ist $-x,\ b :: b,\ (-x + a)$

Im Grunde aber ist, wenn x oder EG negativ angenommen wird, die Gleichung nicht mehr $x^2 + ax - b^2 = o$, sondern

$$(-x)^2 + (a.-x) - b^2 = o$$

oder $x^2 - ax - b^2 = o$

alsdann entstehet der vorhergehende Fall, und x oder EB wird eine positive Wurzel dieser letzten Gleichung.

VII) Es sey $x^2 + ax + b^2 = o$.

Diese Gleichung kann keine positive Wurzel haben, denn es ist unmöglich, daß die drey positiven Sätze x^2, ax und b^2 zusammen o oder nichts machen. Es sind also beyde Wurzeln negativ. Wird also x in der Gleichung negativ angenommen, so entstehet

$$x^2 - ax + b^2 = o$$

Das ist der vierte Fall. Die gegebene Gleichung hat demnach die nemlichen Wurzeln als $x^2 - ax + b^2 = o$, nur daß sie alle beyde negativ sind, da die andern alle beyde positiv sind. Dieses zeiget auch die Rechnung. Denn

$$x^2 + ax + b^2 = o$$

$$\text{giebt } x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)}$$

Es ist aber $(\frac{1}{4}a^2 - b^2) < \frac{1}{4}a^2$

$$\text{folgt } \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)} < \tfrac{1}{2}a$$

Deswegen ist

$$-\tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)}$$

eine negative Größe, weil vom kleineren $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$ das größere $\frac{1}{2}a$ abgezogen wird. Noch vielmehr ist

$$-\tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)}$$

negativ, weil zwey negative Größen zusammen genommen werden.

VIII.

VIII) Es sey $x^2 \pm ax \pm bc = o$.

Suche zwischen b und c die mittlere, welche m seyn mag, so ist $m = \sqrt{bc}$ oder $m^2 = bc$, dann hat man

$$x^2 \pm ax \pm m^2 = o$$

und diese Gleichung kann vermittelst voriger Konstrukzionen aufgelöset werden.

Viertes Hauptstück.

Von Dreyecken und Parallelogrammen.

§. 1.

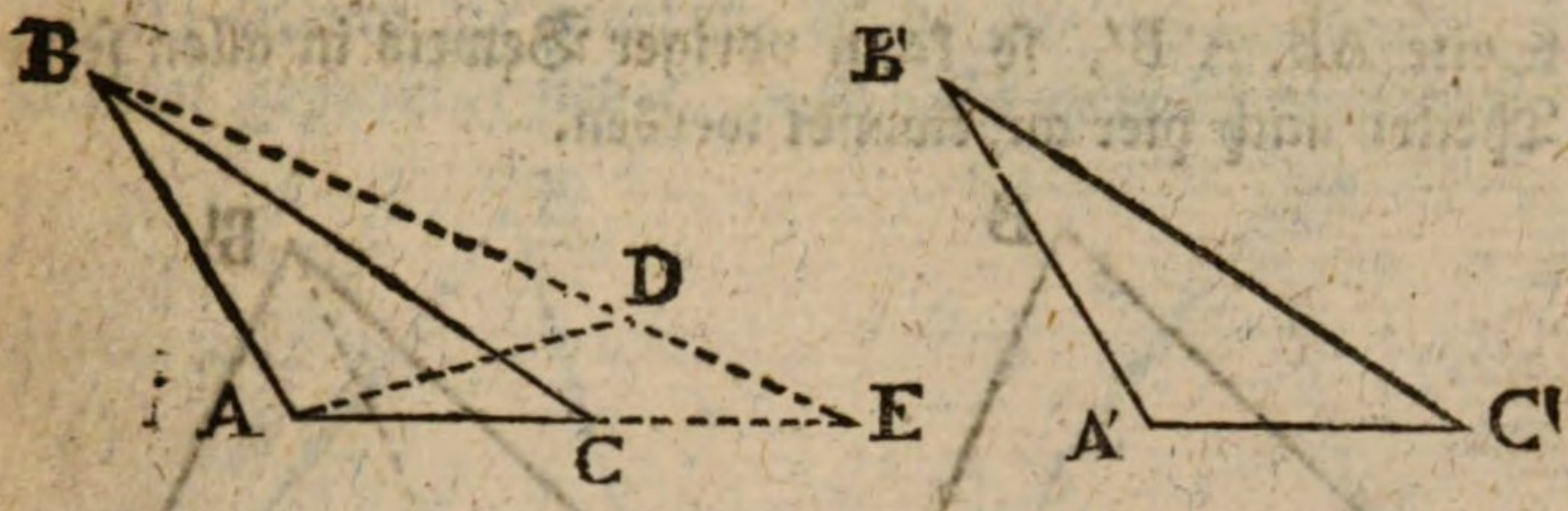
Die Eigenschaften der Dreyecke und Parallelogramme sind so mit einander verknüpft, daß wir beyderley Figuren in diesem Hauptstücke zugleich betrachten müssen, wenn wir alle unnöthige Umschweife vermeiden wollen. In beyden vorhergehenden Hauptstücken ist zwar schon manches von den Dreyecken gesagt worden. Doch erfordert die Ordnung und Deutlichkeit, daß wir jetzt die Lehre von den Dreyecken vollständiger vortragen, und theils die schon angeführten Lehrsätze kürzlich wiederholen, theils aber verschiedene neue hinzusetzen.

§. 2.

Wenn in einem Dreyecke ein Winkel und zwey Seiten so groß sind als die nemlichen Größen in einem andern Dreyecke, so sind beyde Dreyecke ähnlichgleich. Nur in dem einzigen Falle, wo der bekannte Winkel spitzig ist, die eine gegebene Seite demselben gegenüber stehet, und diese Gegenseite kleiner ist als die andere gegebene, nur in diesem Falle muß noch ferner bestimmt werden, ob beyde Dreyecke spitzwinklich oder stumpfwinklich sind.

Beweis. I) Wenn die gegebenen Seiten an dem gegebenen Winkel anliegen, so ist die Wahrheit des Lehrsatzes schon oben bewiesen. (II. §. 22.)

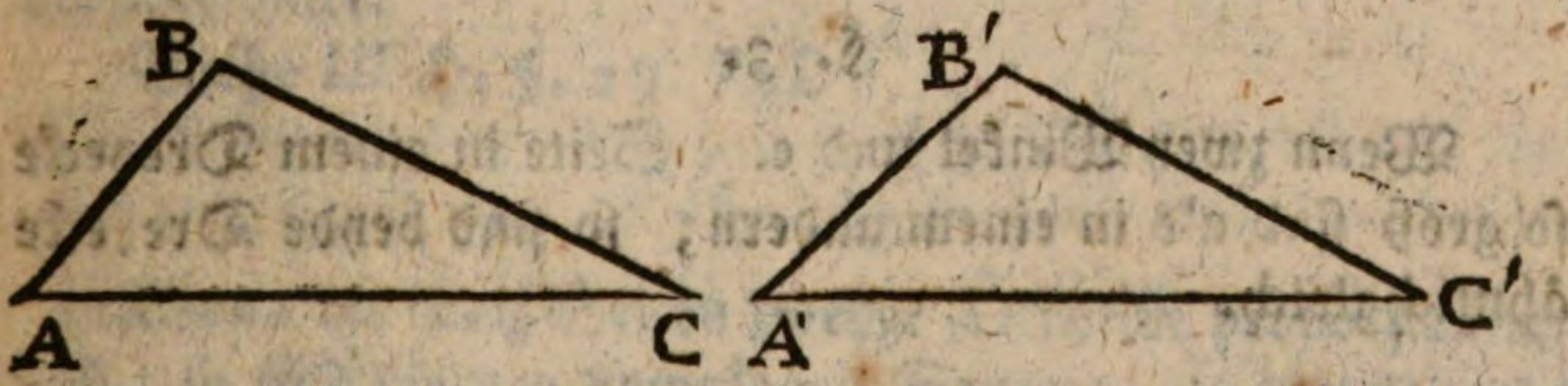
II) Wenn



II) Wenn von den gegebenen Seiten die eine dem gegebenen Winkel gegenüber stehet, und dieser Winkel recht oder stumpf ist, so findet das nemliche Statt. Es seyen A und A′ gleiche Winkel, beyde stumpfe oder rechte. Es sey $AB = A'B'$ und $BC = B'C'$.

Lege beyde Dreyecke über einander, so wird der Winkel A′ den gleichen Winkel A decken, A′B′ wird AB decken. A′C′ muß auf AC zu liegen kommen, entweder ganz oder zum Theile.

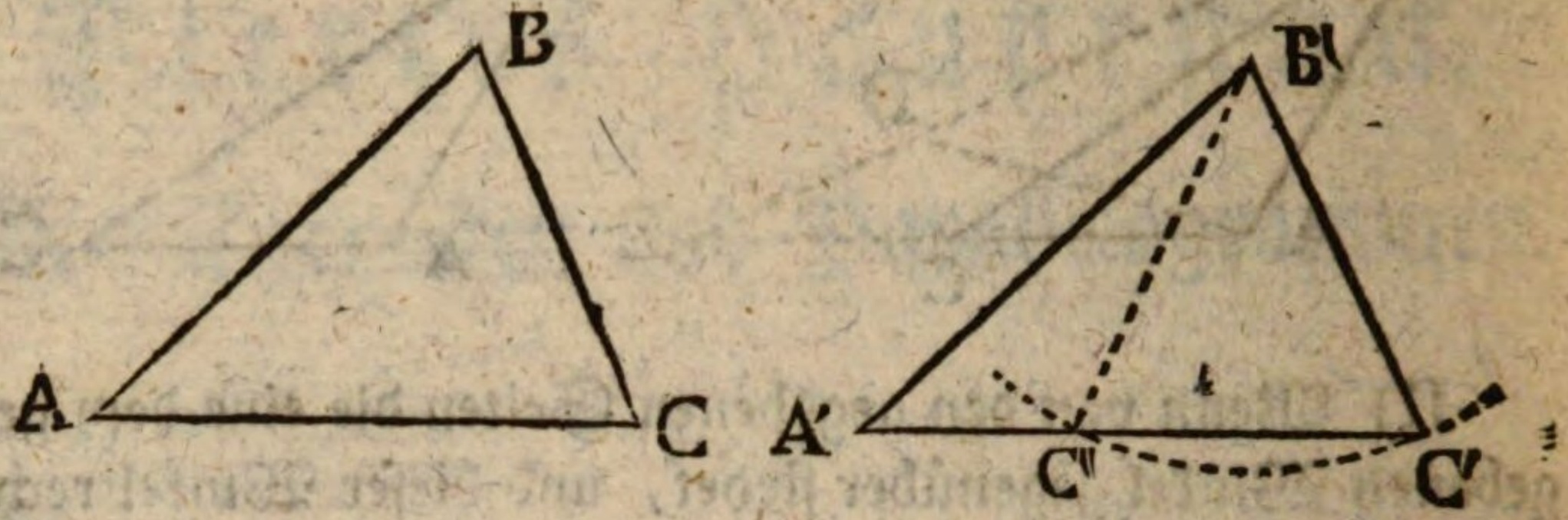
Bey diesen Umständen muß der Punkt C′ nothwendig auf den Punkt C fallen. Denn fiele er anderswo, z. E. in D, so wäre $\angle BAD$ ($= \angle B'A'C'$) kleiner als $\angle BAC$, welches der Voraussetzung zuwider ist. Fiele er in E, so wäre zwar $\angle BAE$ ($= \angle B'A'C'$) $= \angle BAC$, aber es wäre wider die Voraussetzung BE ($= B'C'$) $>$ BC, weil im Dreyecke BCE die Seite BE die dem stumpfen Winkel BCE gegenüber stehet, größer ist als BC, dem spitzigen Winkel BEC gegenüber. Also muß der Punkt C′ nothwendig auf C fallen, folglich B′C′ auf BC und A′C′ auf AC. Deswegen sind beyde Dreyecke ähnlichgleich.



III) Wenn der gegebene Winkel A, A′ spitzig, und die Gegenseite BC, B′C′ größer ist als die anliegende

Seite

Seite AB, A′B′, so kann voriger Beweis in allen seinen Theilen auch hier angewandt werden.



IV) Wenn aber der gegebene Winkel A, A′ spitzig ist, und die Gegenseite BC, B′C′ ist kleiner als die anliegende AB, A′B′, so kann man nicht sogleich schließen, daß beyde Dreyecke ähnlichgleich sind. Aus B′ mit dem Halbmesser B′C′ beschreibe einen Bogen der die A′C′ nicht nur in C′ sondern auch in C″ schneiden wird. Ziehe B′C″, so ist B′C″ = B′C′ = BC. Das Dreyeck A′B′C″ hat also ∠A′ = ∠A, AB = A′B″, B′C″ = BC, und ist doch nicht mit ABC ähnlichgleich. Wird aber zu den Bedingungen noch hinzugesetzet, daß der Gegenwinkel der AB und A′B′ beyderseits spitzig oder stumpf ist, so gilt wiederum der vorige Beweis und beyde Dreyecke sind ähnlichgleich.

V) Sollte es sich treffen, daß der Gegenwinkel der AB oder A′B′ ein rechter wäre, so wären in diesem Falle zwey Winkel gegeben, nemlich der eine in A, A′ und der rechte, der AB, A′B′ gegenüber, alsdann gehöret die Vergleichung der Dreyecke eigentlich zum folgenden Falle, und die vorige Bedingung fällt weg.

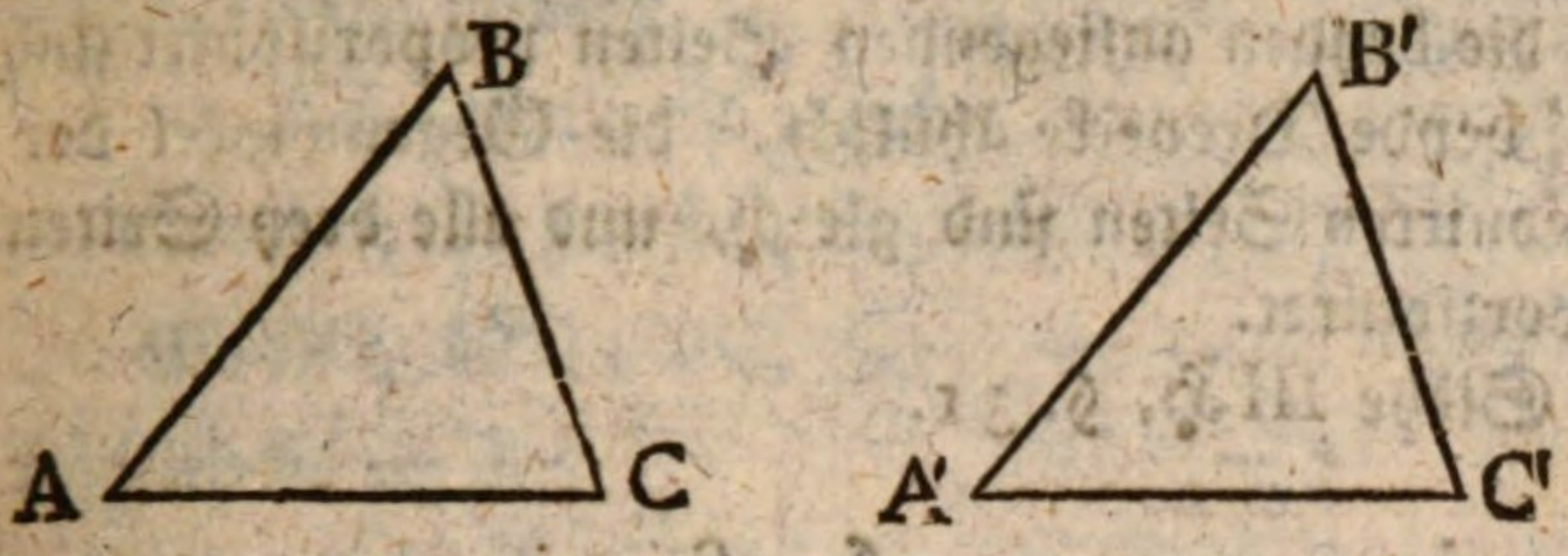
§. 3.

Wenn zwey Winkel und eine Seite in einem Dreyecke so groß sind als in einem andern; so sind beyde Dreyecke ähnlichgleich.

Beweis. I) Wenn beyde gegebene Winkel an der gegebenen Seite liegen, so ist der Lehrsatz schon oben bewiesen worden. (II. §. 23.)

II) Wenn

II) Wenn die gegebene Seite dem einen gegebenen Winkel gegenüber stehet, so ist nicht mehr Schwierigkeit.



Es sey $\angle A' = \angle A$, $\angle C' = \angle C$, und $A'B' = AB$. Weil zwey Winkel beyderseits gleich sind, so ist auch der dritte beyderseits gleich. (III. § 29.)

Also $\angle B = \angle B$. Da nun die Winkel B (=B') und A (=A') an der Seite AB (=A'B') liegen, so sind beyde Dreyecke ähnlichgleich (II §. 23.)

§. 4.

Wenn die drey Seiten in einem Dreyecke so groß sind als in einem andern, jede mit jeder verglichen, so sind die Dreyecke ähnlichgleich.

Siehe II H. §. 26.

§. 5.

Wenn die drey Winkel (oder nur zwey) in einem Dreyecke so groß sind als die drey Winkel (oder nur zwey) in einem anderen, jeder mit jedem verglichen, so sind beyde Dreyecke ähnlich, und ihre homologen Seiten sind proporzionirt.

Siehe III H. §. 29. Zus.

§. 6.

Wenn die drey Seiten zweyer Dreyecke proporzionirt sind, so sind die den homologen Seiten gegenüberstehende Winkel beyderseits gleich.

Siehe III H. §. 30.

§. 7.

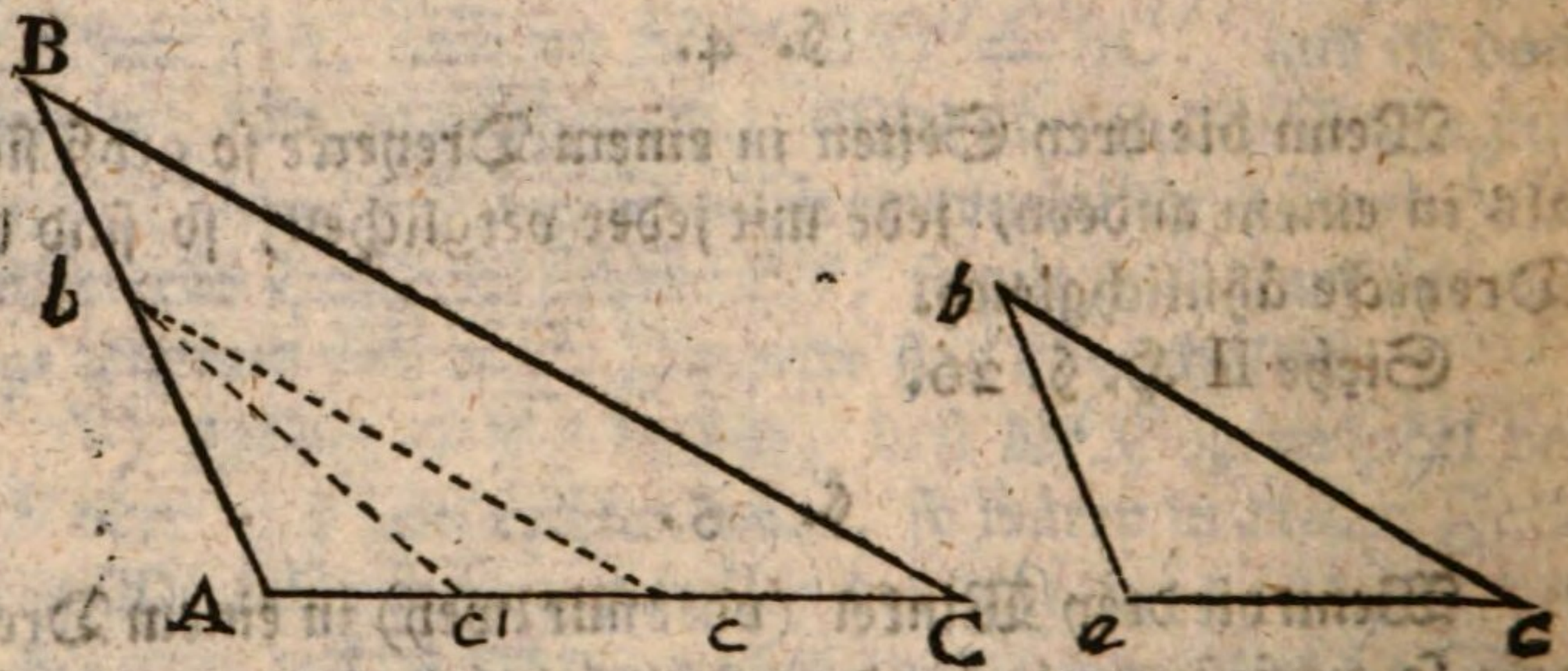
§. 7.

Wenn ein Winkel in zwey Dreyecken der nemliche ist, und die beyden anliegenden Seiten proporzionirt sind, so sind beyde Dreyecke ähnlich, die Gegenwinkel der proporzionirten Seiten sind gleich, und alle drey Seiten sind proporzioniret.

Siehe III H. §. 31.

§. 8.

Wenn in zwey Dreyecken der eine Winkel dem einen gleich ist, und die Gegenseite sich zur Gegenseite verhält, wie die eine anliegende Seite zu einer anliegenden Seite, so sind beyde Dreyecke ähnlich. Nur in dem einzigen Falle, wo der gegebene Winkel spitzig, und die Gegenseite kleiner ist als die anliegende, muß noch bestimmet werden, ob das Dreyeck beyderseits spitzwinklich oder stumpfwinklich ist.



Es sey $\angle A = \angle a$ und

$AB, ab :: BC, bc$

oder $AB, BC :: ab, bc$.

Lege das kleinere Dreyeck auf dem größeren, so wird $\angle A$ von $\angle a$ gedecket, und es fällt ab auf einem Theile der AB, ac auf einem Theile der AC, es fällt also bc irgendwo im Dreyecke ABC.

Nun sage ich, es muß nothwendig bc mit BC parallel werden. Denn, wenn bc nicht mit BC parallel ist, so

sey es eine andere Linie bc'. folglich sind die homologen Winkel $b = B$, $c' = C$, also die Dreyecke Abc', ABC einander ähnlich, folglich

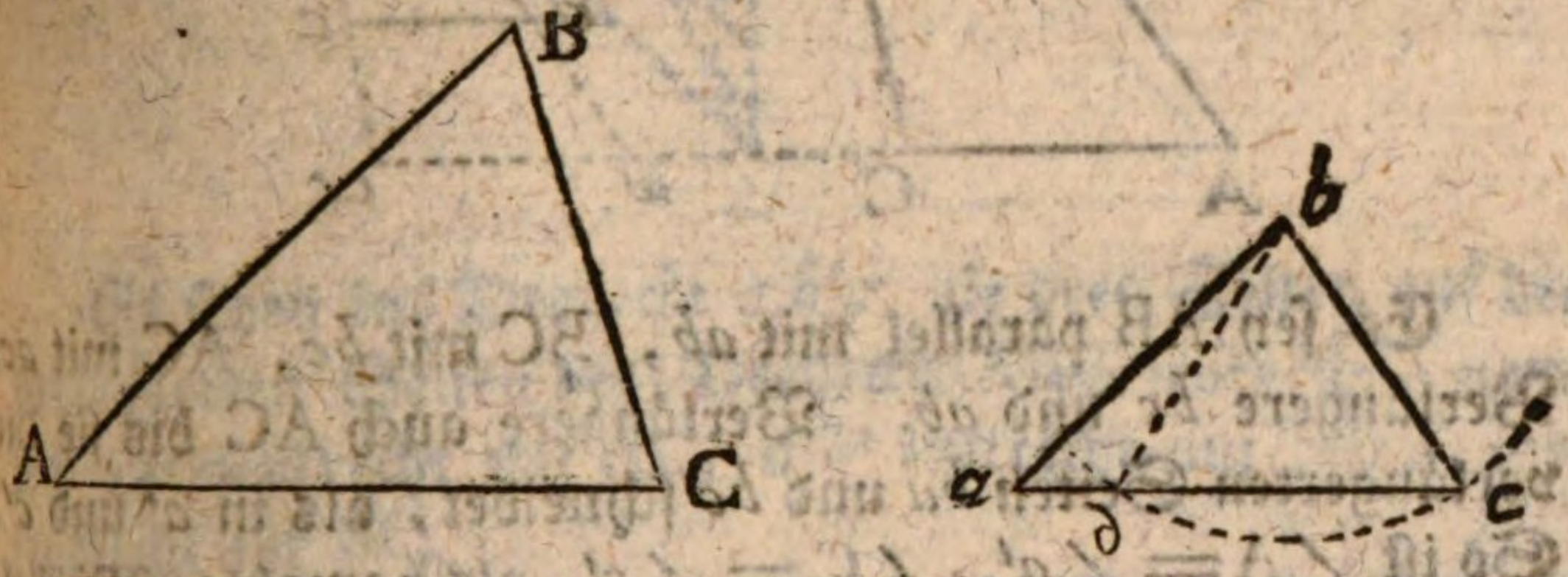
$$AB, ab :: BC, bc'$$

Es war aber $AB, ab :: BC, bc$

$$\text{also } BC, bc' :: BC, bc$$

$$\text{folglich } bc = bc'$$

welches unmöglich ist. Denn im Dreyecke $c'cb$ ist die Gegenseite bc' der kleineren Ecke c, auch kleiner als die Gegenseite bc der größern Ecke c'. Folglich kann keine andere Linie als bc, die durch den Punkt b gehet, mit BC parallel seyn. Daraus folget nun, daß die Winkel in b und c den Winkeln in B und C gleich sind, folglich sind beyde Dreyecke Abc und ABC einander ähnlich.



II) Dieser Beweis gilt in allen Fällen. Nur wenn BC kleiner ist als AB, folglich bc kleiner als ab, so kann mit dem Halbmesser bc ein Zirkel gezogen werden, der die ac in d schneidet, alsdann ist bd der bc gleich, also ist nicht nur

$$AB, ab :: BC, bc$$

sondern auch

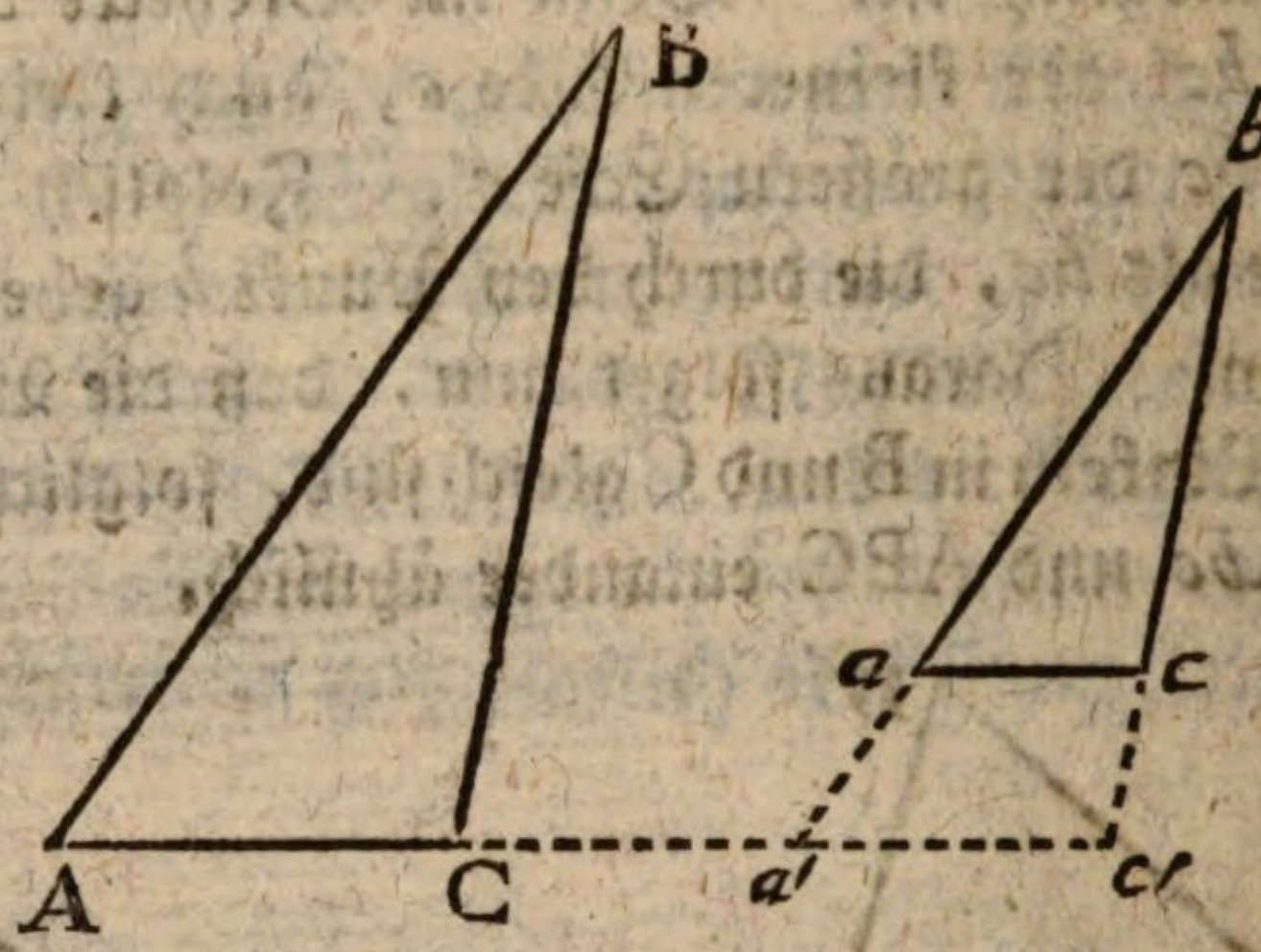
$$AB, ab :: BC, bd$$

obgleich das Dreyeck abd dem Dreyecke ABC nicht ähnlich ist. Es muß also noch bestimmet werden, ob die Winkel in C und c beyderseits spitzig oder stumpf sind.

Träfe es sich, daß die Winkel in C und *c* rechte wären, so wären $\angle A = \angle a$, $\angle C = \angle c$ (I. §. 37. N. 3) folglich (§. 3.) ohne weiteren Bedingungen $\angle ABC \sim \triangle abc$.

§. 9.

Wenn die drey Seiten eines Dreyecks mit den drey Seiten eines anderen Dreyeckes parallel sind (jede mit jeder), so sind beyde Dreyecke ähnlich.



Es sey AB parallel mit *ab*, BC mit *bc*, AC mit *ac*. Verlängere *bc* und *ab*. Verlängere auch AC bis sie die verlängerten Seiten *ba* und *bc* schneidet, als in *a'* und *c'*. So ist $\angle A = \angle a'$, $\angle C = \angle c'$, als homologe Winkel.

Ferner ist aus dem nemlichen Grunde $\angle a' = \angle a$, $\angle c' = \angle c$.

Also ist $\angle A = \angle a' = \angle a$ und $\angle C = \angle c' = \angle c$.

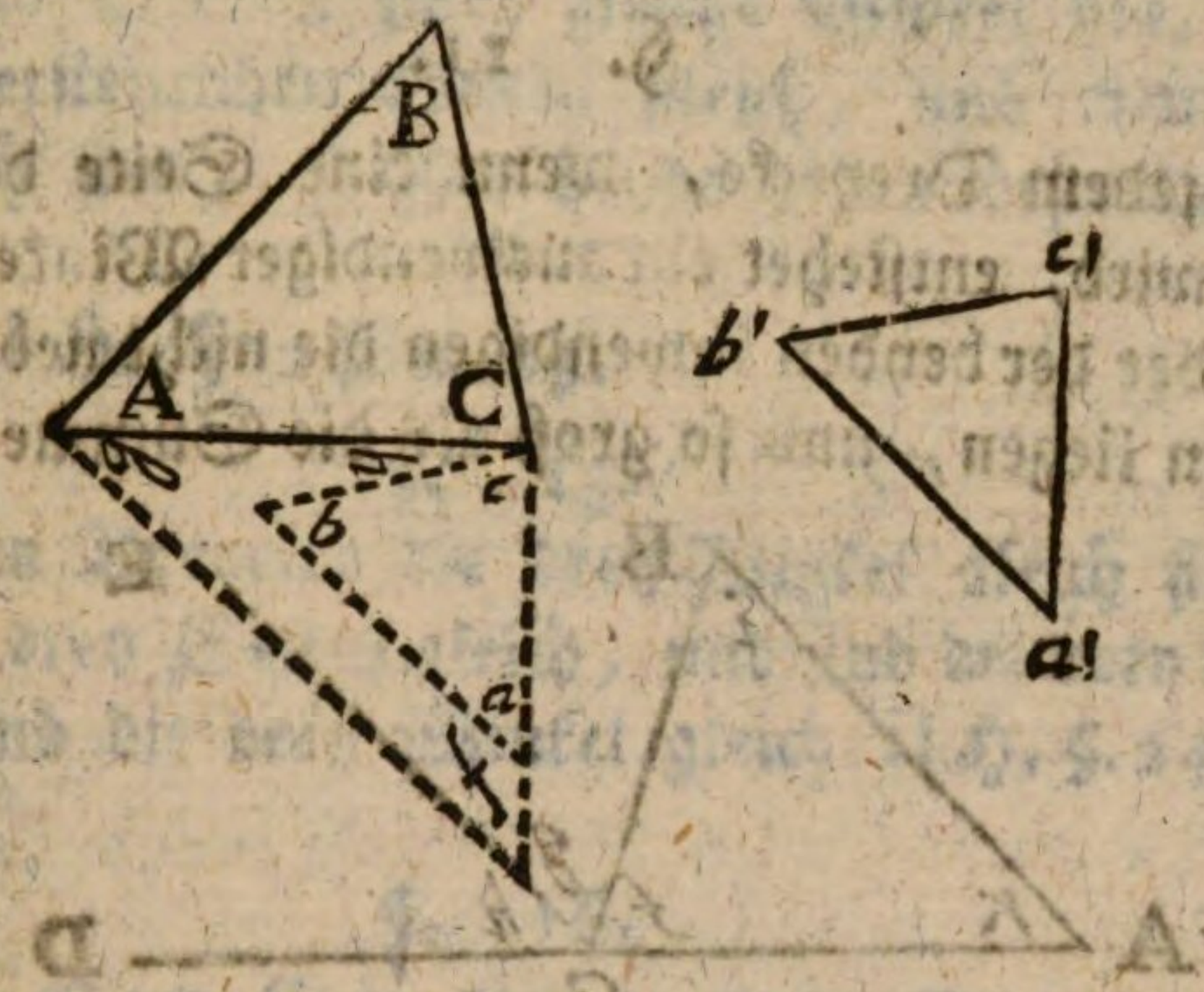
Da nun in den Dreyecken ABC und *abc*, $\angle A = \angle a$, $\angle C = \angle c$, so sind beyde Dreyecke ähnlich.

Zusatz. Man kann sagen jede Linie sey mit sich selbst parallel. Wenn also zwey Dreyecke eine ihrer Seiten in der nemlichen Linie haben, und die beyden übrigen Seiten des einen mit den beyden übrigen Seiten des andern parallel sind, so sind die Dreyecke ähnlich. So ist z. E. in voriger Figur $\triangle a'bc' \sim \triangle ABC$. Beyde haben eine

Seite in der Linie Ac', und es ist $a'b$ parallel mit AB, $c'b$ mit CB.

§. 10.

Wenn die Seiten eines Dreyecks auf den Seiten eines anderen Dreyecks (jede auf jeder) senkrecht stehen, so sind beyde Dreyecke ähnlich.



Es seyen im Dreyecke $a'b'c'$ die drey Seiten auf den verlängerten Seiten des Dreyecks ABC senkrecht, nemlich $a'c'$ senkrecht auf AC, $a'b'$ senkrecht auf AB, $b'c'$ senkrecht auf BC.

Lege das Dreyeck $a'b'c'$ neben dem Dreyecke ABC, so daß der Punkt c' auf C zu liegen komme, und in $\triangle abc$, ac auf AC senkrecht sey, so sind in der Lage abc des Dreyecks $a'b'c'$ die Seiten desselben mit sich selbst parallel geblieben, folglich ist nicht nur ac senkrecht auf AC, sondern auch bc senkrecht auf BC, und ab senkrecht auf AB.

Da nun $C + h$ und $c + h$ rechte Winkel sind, so ist $C + h = c + h$, folglich auch $\angle c = \angle C$. Verlängere ca nach f, und ziehe gf senkrecht auf AB, so sind gf und ba parallel, weil sie beyde auf AB senkrecht stehen. Folglich sind die homologen Winkel f und a gleich.

Weil $\triangle gcf$ rechtwinklich ist, so machen $\angle g + \angle f$ so viel als einen rechten Winkel. (III. §. 32.) Es ist aber auch $\angle g + \angle A$ ein rechter. Also ist

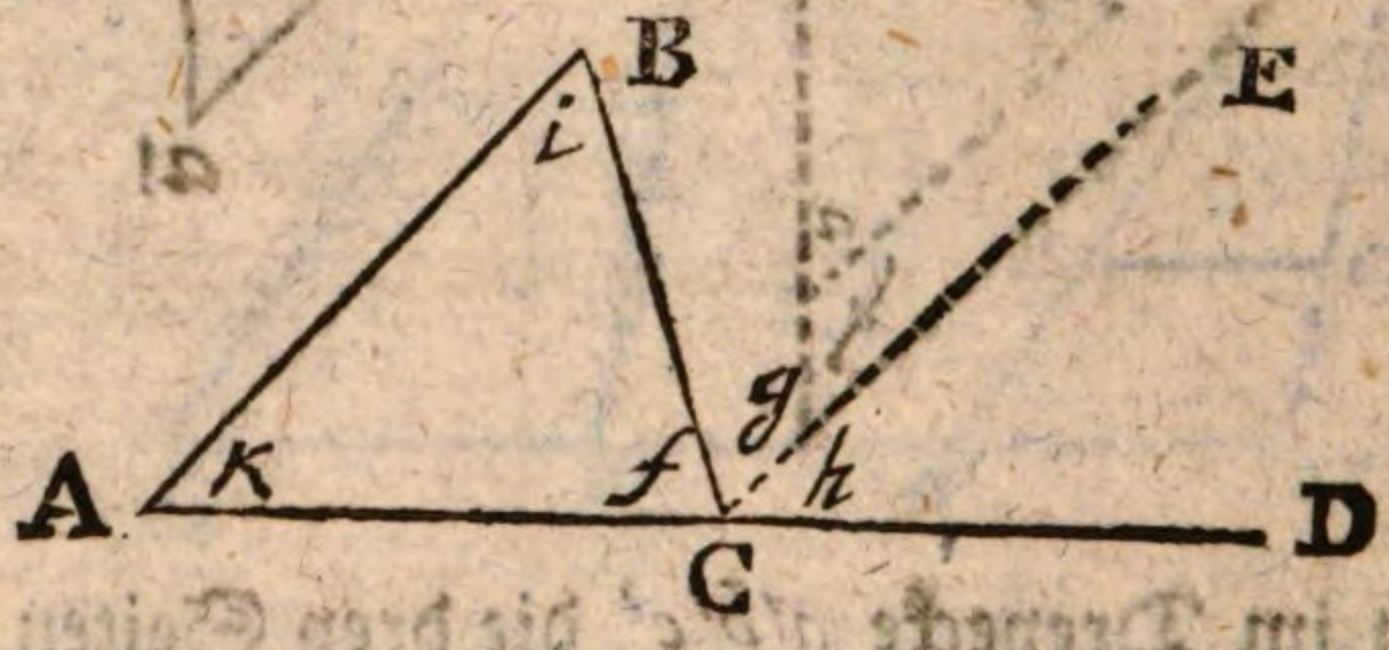
$$\angle g + \angle f = \angle g + \angle A$$

folglich $\angle f = \ldots \angle A = \angle a$

Da nun $\angle C = \angle c$ und $\angle A = \angle a$, so ist (III. §. 29. Zus.) $\triangle abc \backsim \triangle ABC$, oder $\triangle a'b'c' \backsim \triangle ABC$.

§. 11.

In jedem Dreyecke, wenn eine Seite desselben verlängert wird, entstehet ein auswendiger Winkel der größer ist als jeder der beyden inwendigen die nicht neben dem auswendigen liegen, und so groß als die Summe derselben.



Es sey BCD oder $g + h$ der auswendige Winkel, und EC mit AB parallel gezogen. So ist $\angle i = \angle g$, als Wechselwinkel. Aus dem nemlichen Grunde ist $\angle k = \angle h$. Da nun $i = g$, $k = h$, so ist $g + h = i + k$, oder $\angle BCD = \angle ABC + \angle BAC$. Woraus zugleich folget, daß $(\angle BCD) > (\angle CBA)$ und auch $(\angle BCD) > (\angle BAC)$, welches schon auf einer andern Art bewiesen worden. (II H. §. 27)

§. 12.

In jedem Dreyecke sind die drey Winkel so groß als zwey rechte.

Siehe III H. §. 32.

Zusatz. Hieraus folget, daß, wenn ein Winkel recht oder stumpf ist, die beyden übrigen spitzig sind, und daß beyde spitzigen Winkel in einem rechtwinklichen Dreyeck, so viel als einen rechten machen.

§. 13.

In jedem Dreyecke stehet die größere Seite dem größeren Winkel und der größere Winkel der größeren Seite gegenüber.

Siehe II H. §. 24. u. 25.

§. 14.

Wenn ein Dreyeck zwey gleiche Winkel hat, so sind die gegenüberstehenden Seiten gleich, und wenn zwey Seiten gleich sind, so sind beyde gegenübestende Winkel gleich.

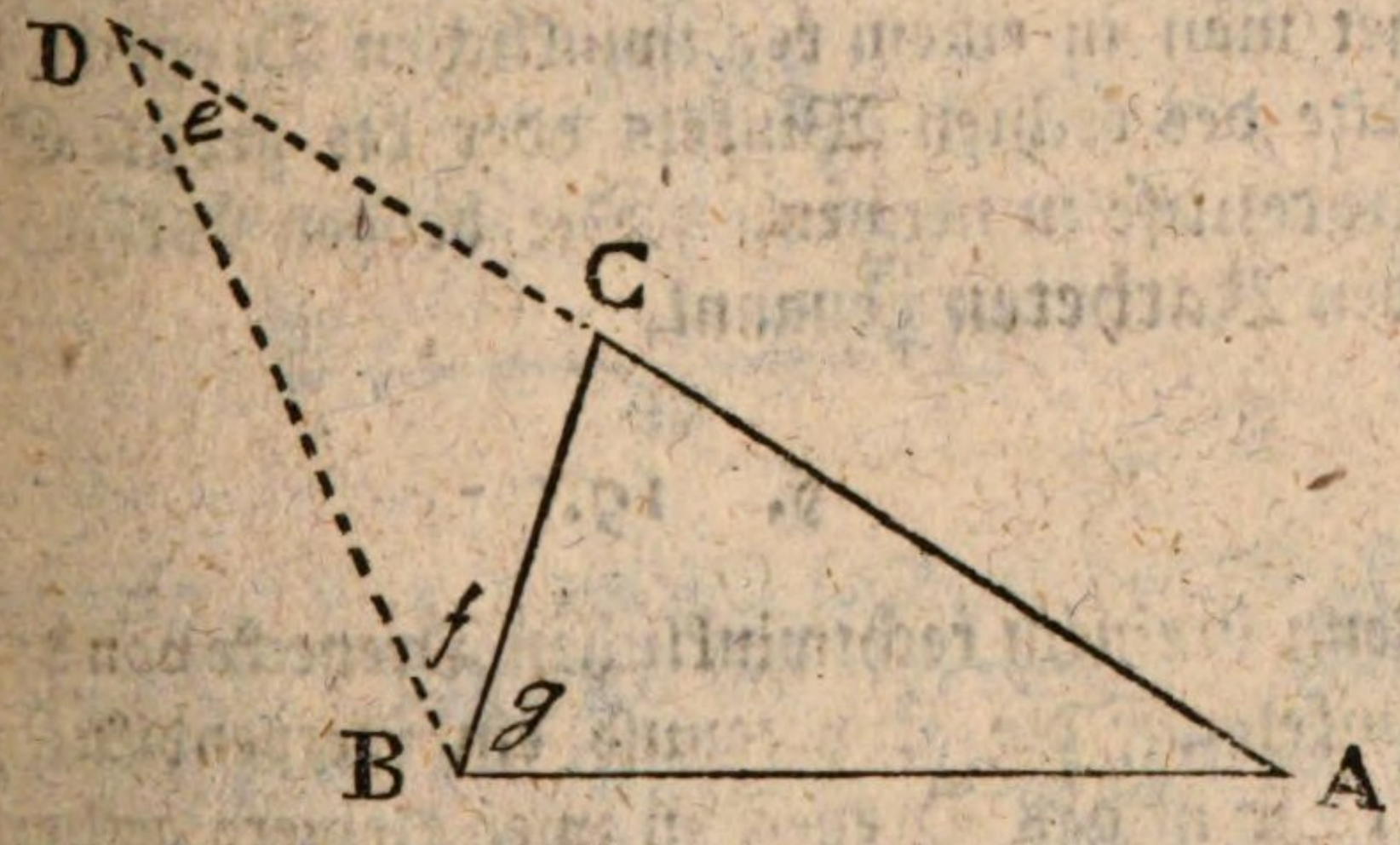
Siehe II H. §. 24. u. 25.

§. 15.

Wenn im Dreyecke die drey Winkel gleich sind, so sind auch die drey Seiten gleich, und sind die drey Seiten gleich, so sind die drey Winkel gleich. II H. §. 24. zus. u. §. 25 zus.

§. 16.

Im Dreyecke ist jede Seite kleiner als die Summe der beyden andern.



Beweis. Verlängere AC in D bis CD = CB. Weil CD = CB, so ist $\angle e = \angle f$. (§. 14.), und folglich $\angle e$ kleiner als $\angle (f+g)$. Folglich im Dreyecke ADB ist AB kleiner als AD $(= AC + CD) = AC + CB$. (§. 13.)

§. 17.

Wenn ein Dreyeck vermittelst einer Linie geschnitten wird, die der einen Seite parallel ist, so sind die beyden übrigen Seiten proporzionirt geschnitten, und wenn die beyden Seiten proporzionirt geschnitten sind, so ist die schneidende Linie mit der dritten Seite parallel.

Siehe III H. §. 27. für den ersten Theil des Satzes. Der zweyte läßt sich leicht aus dem III H. §. 32. beweisen.

§. 18.

In einem rechtwinklichen Dreyecke ist die Gegenseite des rechten Winkels allemal größer als die beyden übrigen Seiten.

Denn weil in solchem Dreyecke der rechte Winkel der größte ist, so muß auch seine Gegenseite die größte seyn.

Daß aber der rechte Winkel der größte ist, ist daraus zu schließen, daß die beyden übrigen zusammen nur so viel als einen rechten ausmachen.

Anmerkung. Um sich kürzer ausdrücken zu können, pfleget man in einem rechtwinklichen Dreyecke die Gegenseite des rechten Winkels oder die größte Seite die Hypotenuse zu nennen. Die beyden übrigen Seiten werden Katheten genannt.

§. 19.

Wenn in einem rechtwinklichen Dreyecke von dem rechten Winkel auf die Hypotenuse ein Perpendikul gefället wird, 1) so ist das Dreyeck in zwey kleinere getheilet, die unter einander und auch mit dem ganzen Dreyecke ähnlich sind. 2) Der Perpendikul ist die mittlere Proporzionallinie zwischen beyden Theilen der Hypotenuse.

Siehe III H. §. 34. 35.

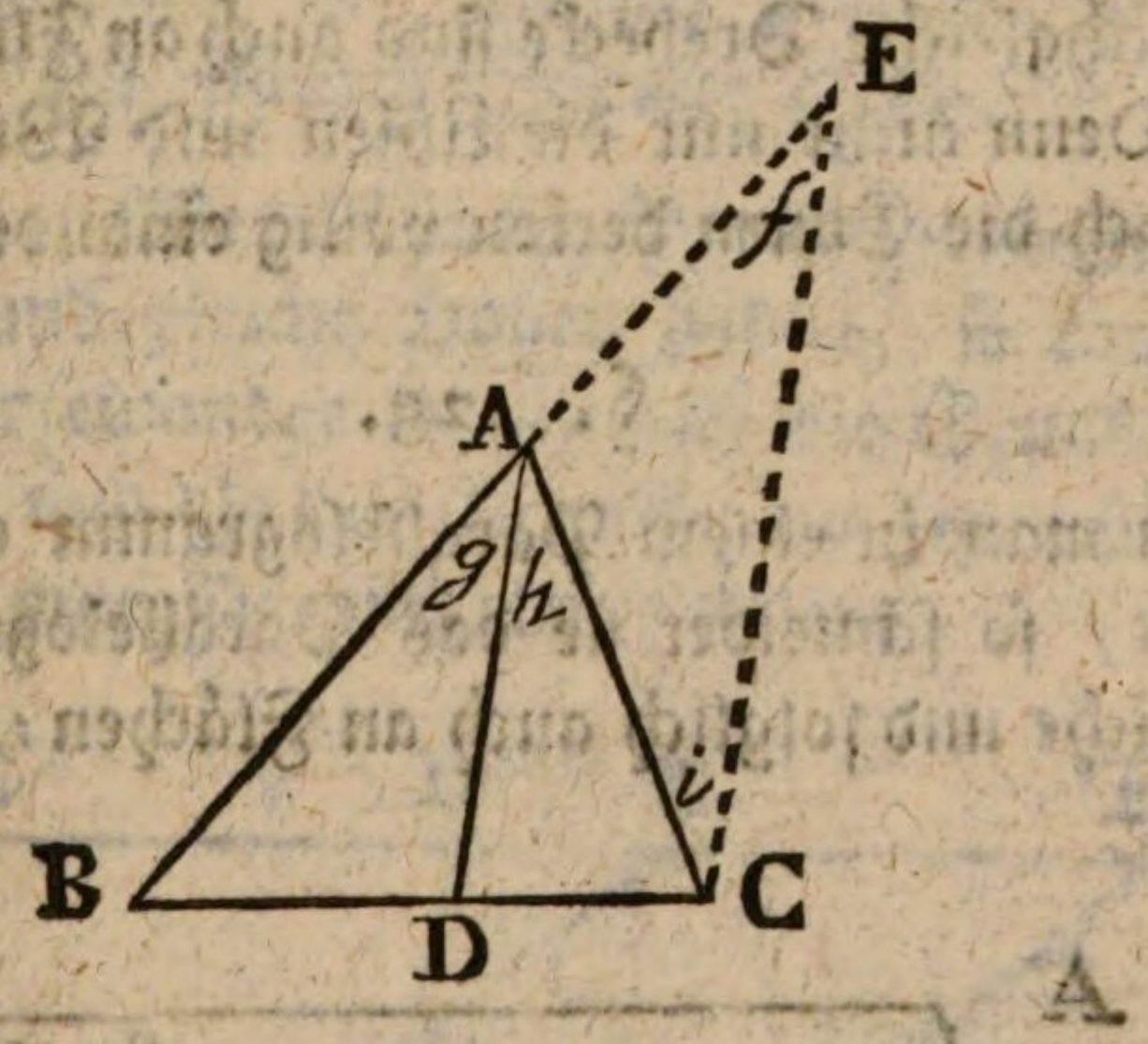
§. 20.

Im rechtwinklichen Dreyecke ist jeder Kathete die mittlere Proporzional-Linie zwischen der Summe und der Differenz der beyden übrigen Seiten.

Siehe III H. §. 36.

§. 21.

Wenn eine gerade Linie einen Winkel eines Dreyeckes halbiret, so schneidet solche Linie die Gegenseite, so daß sich beyde Theile verhalten, wie die ungetheilten Seiten. Und umgekehrt, wenn eine gerade Linie durch einen Winkel des Dreyeckes gehet, und die Gegenseite mit den übrigen beyden Seiten proporzionirt schneidet, so halbiret sie den Winkel.



Beweis. I) Gesetzt AD halbiret den Winkel A des Dreyecks BAC. Ziehe CE mit DA parallel, und verlängere BA bis sie der CE begeguet, so ist $\angle f = \angle g$ und auch $\angle i = \angle h$ $(= \angle g)$, da nun $f = g$ und $i = g$, so ist $\angle f = \angle i$ folglich ist AE = AC. (§. 14.)

Nun ist BD, DC :: BA, AE (III. §. 27.)

folglich BD, DC :: BA, AC (=AE)

oder BD, BA :: DC, AC.

 II) Gesetzt

II) Gesetzt es sey bekannt, daß

BD, DC :: BA, AC,

so ziehe wiederum wie vorher die Linien CE und AE, so ist

BD, DC :: BA, AE.

Da auch BD, DC :: BA, AC,

so ist BA, AE :: BA, AC

folglich AE = AC

folglich $\angle f = \angle i$. (§. 14.)

Nun ist $\angle f = \angle g$, und $\angle i = \angle h$,

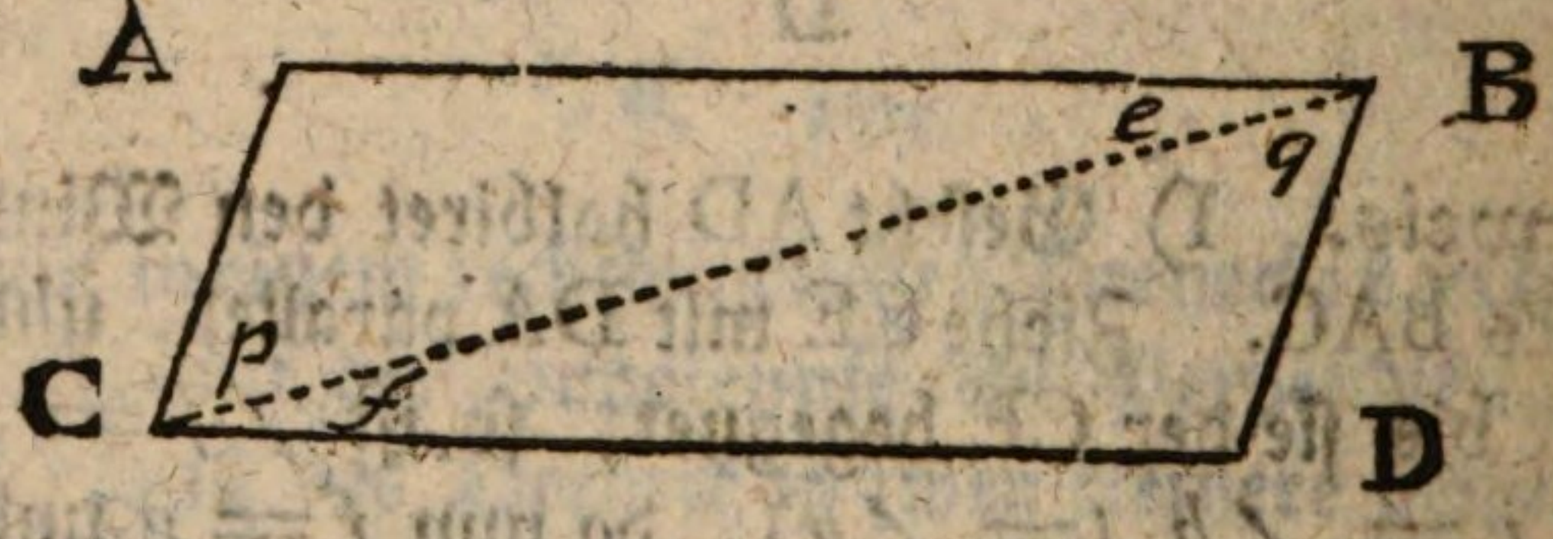
folglich ist $\angle g = \angle h$.

§ 22.

Aehnlichgleiche Dreyecke sind auch an Flächen-Inhalte gleich. Denn nicht nur die Linien und Winkel derselben, sondern auch die Ebnen decken völlig einander.

§. 23.

Wenn man in einem Parallelogramm eine Diagonal-Linie ziehet, so schneidet sie das Parallelogramm in zwey ähnlichgleiche und folglich auch an Flächen-Inhalt gleiche Dreyecke.



Beweis. Es sey ABDC ein Parallelogramm und es werde darin die BC gezogen, so ist (II. §. 36.) $\angle e = \angle f$, $\angle p = \angle q$ und BC = BC. Folglich

$\triangle BCD \cong \triangle CBA$.

§. 24.

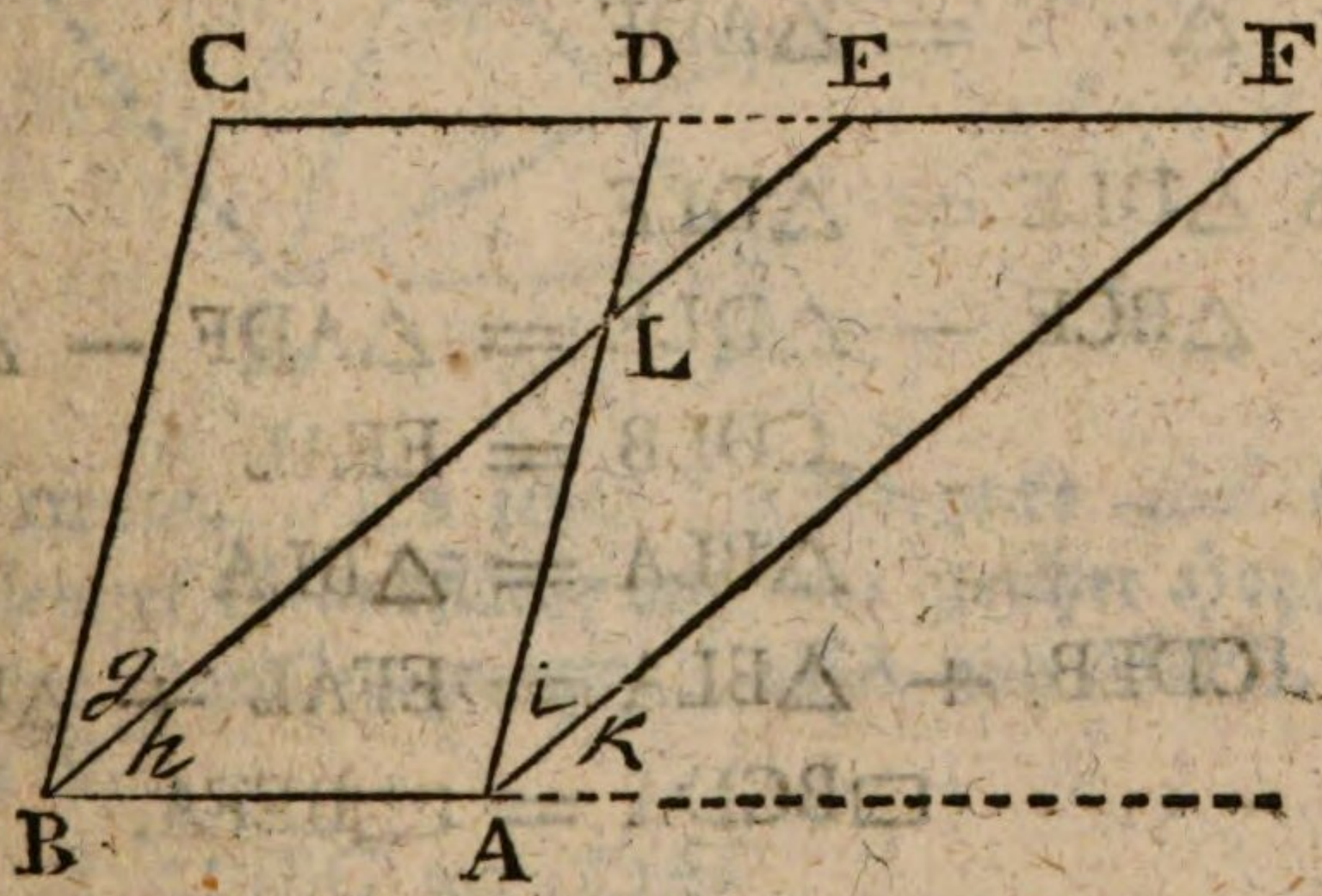
Wenn durch zwey Scheitelpunkte eines Dreyecks gerade Linien mit den Gegenseiten parallel gezogen werden, so entstehen ein Parallelogram, das doppelt so groß ist, als das Dreyeck.

Beweis. Es sey in voriger Figur das Dreyeck CBD gegeben, durch B und C werden gerade Linien mit CD und BD parallel gezogen, die sich in A schneiden, so ist AD ein Parallelogramm, und es wird wie vorher $c = f$, $p = q$, CB = CB, folglich $\triangle$ CBD $\cong$ $\triangle$ ACB, folglich $\square$ AD $= 2 \triangle$ CBD.

§. 25.

Parallelogramme von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind am Flächen-Inhalte gleich.

Beweis. Wenn zwey Parallelogramme gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben, so kann man sie allemal so über einander legen, daß die Grundlinien einander decken, und die den Grundlinien gegen über stehenden Seiten in eine Parallel-Linie fallen.



Es seyen demnach ABCD und ABEF zwey Parallelogramme von gleicher Grundlinie AB und gleicher Höhe.

So ist (II. §. 39.)

$BC = AD$

$BE = AF$

Wegen der parallelen Linien CB und DA ist $\angle g + \angle h = \angle i + \angle k$, und wegen der parallelen Linien BE, AF ist $\angle h = \angle k$

Da nun $g + h = i + k$

und $h = \ldots\ldots k$

so ist $g \ldots\ldots = i$

Weil

$BC = AD$

$BE = AF$

$\angle g = \angle i$

so ist (§. 2.) $\triangle BCE \cong \triangle ADF$

folglich ist auch am Flächen-Inhalte (§. 22.)

$\triangle BCE = \triangle ADF$

Nimm ab $\triangle DLE = \triangle DLE$

so ist $\triangle BCE - \triangle DLE = \triangle ADF - \triangle DLE$

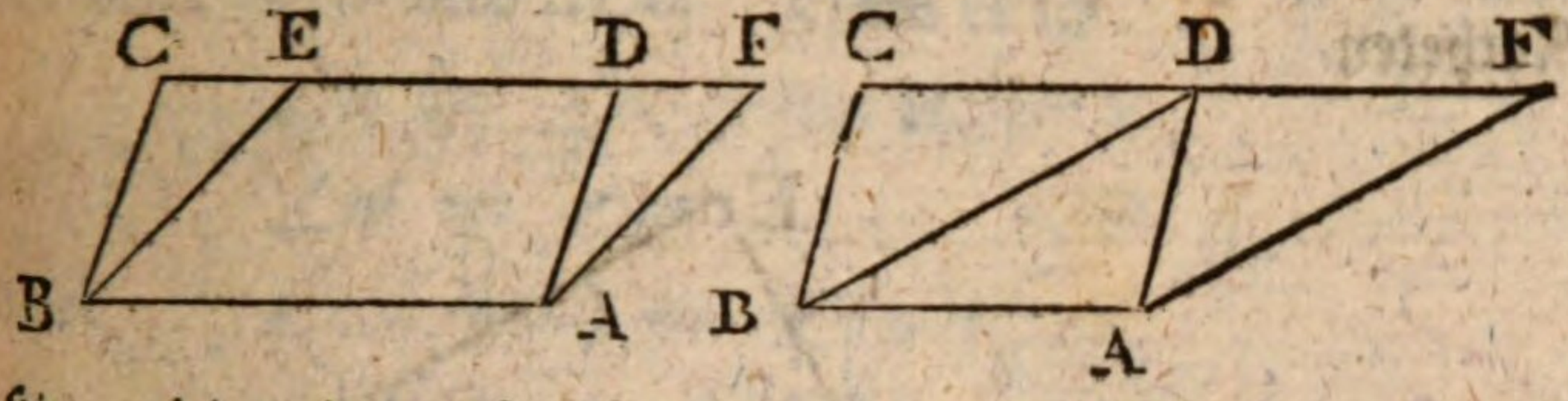
oder $CDLB = EFAL$

setze zu $\triangle BLA = \triangle BLA$

so ist $CDLB + \triangle BLA = EFAL + \triangle BLA$

oder $\square BCDA = \square BEFA.$

Der Beweis wird noch leichter, wenn ein Theil der EF auf CD, oder der Punkt E auf D fällt, wie in folgenden Figuren

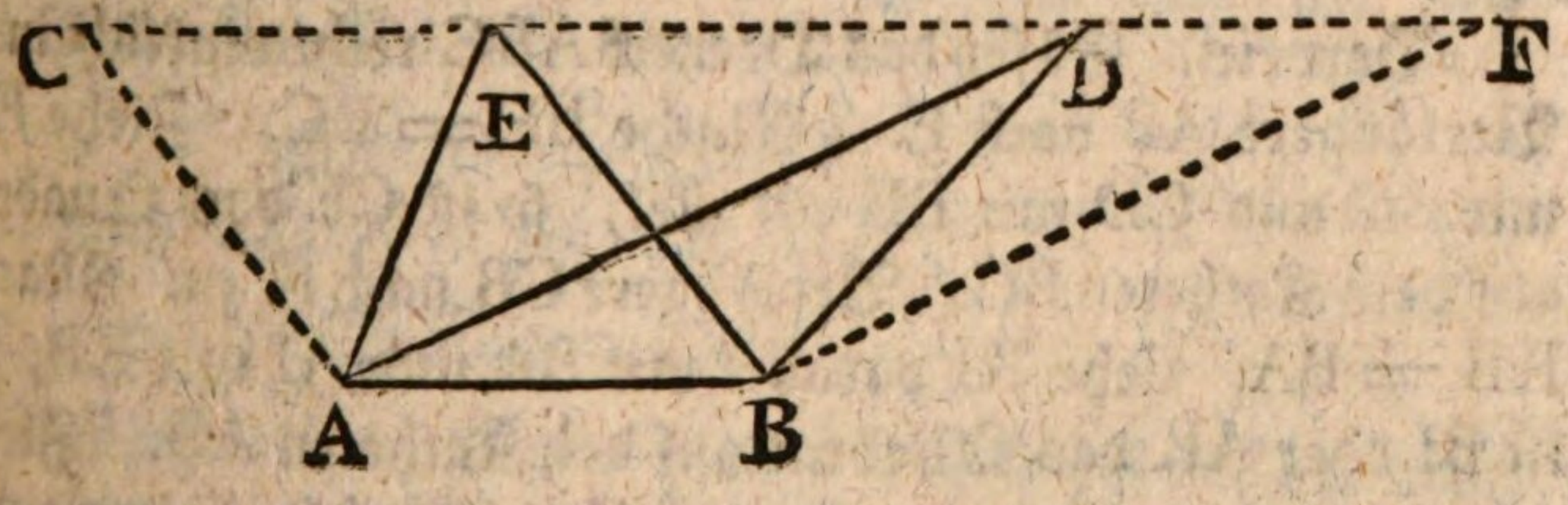


Hier wird wie vorher bewiesen, daß $\triangle BCE = \triangle ADF$ oder in der andern Figur $\triangle BCD = \triangle ADF$, alsdann wird das mittlere Stück BEDA, BDA beyderseits hinzugethan.

Zusatz. Hieraus und aus §. 24. folget, daß jedes Parallelogramm doppelt so groß ist als ein Dreyeck, welches die nemliche Grundlinie und Höhe hat.

§. 26.

Dreyecke von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind am Flächen-Inhalte allemal gleich, wenn auch ihre Gestalt verschieden ist.



Beweis. Es seyen die Dreyecke ABE und ABD von gleicher Grundfläche und von gleicher Höhe, so vollende die Parallelogramme BECA und ADFB. (§. 24.) Dann ist

$$\square BC = \square AF$$

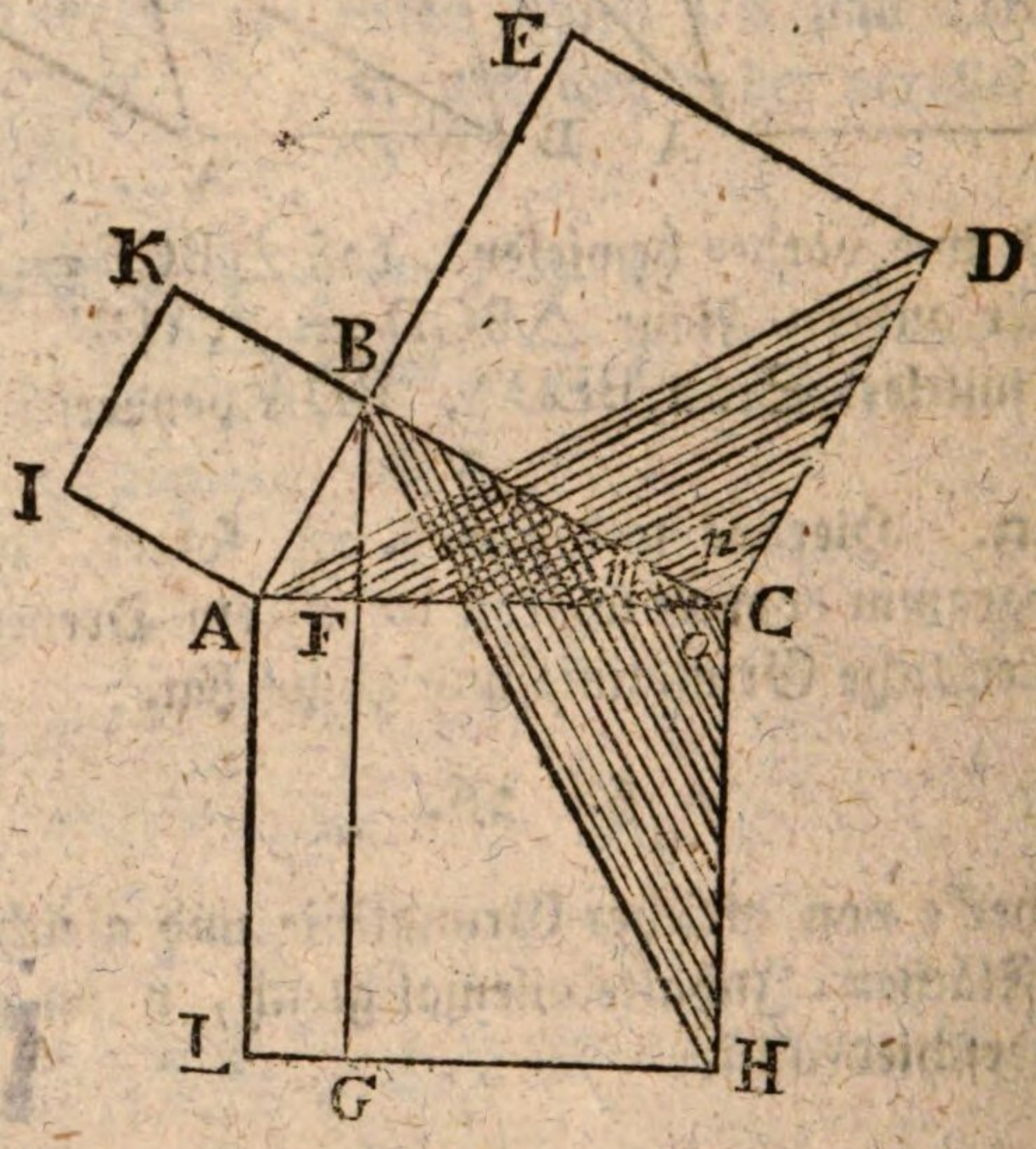
Folglich $\frac{1}{2} \square BC = \frac{1}{2} \square AF$

oder (§. 23.) $\triangle ABE = \triangle BDA$.

§. 27.

§. 27.

Im rechtwinklichen Dreyecke ist das Quadrat auf der Hypotenuse gleich der Summe beyder Quadrate auf den Katheten.



Beweis. Es sey das Dreyeck ABC rechtwinklich in B. Verlängere AB nach E. Mache BE = BC. Ziehe ED mit BC und CD mit BE parallel, so ist CE das Quadrat auf dem Katheten BC. Verlängere CB nach K zu. Mache KB = BA, ziehe KI parallel mit BA und AI mit KB, so ist BI oder AK das Quadrat auf den Katheten AB. Ziehe AL senkrecht auf AC und = AC, CH parallel mit AL und LH mit AC, so ist CL das Quadrat auf der Hypotenuse AC.

Ziehe noch zum Beweise die BG senkrecht auf AC oder parallel mit AL und CH.

So bestehet das Quadrat CL aus zwey Rechtecken CG und GA. Kann nun bewiesen werden, daß □ CG = □CE und □ GA = □AK, so folget, daß das ganze Quadrat

Quadrat CL der Summe beyder Quadrate CE und AK gleich ist.

Ziehe BH und AD, so entstehen zwey ähnlichgleiche Dreyecke ACD und HCB. Denn es ist

$$\angle n = \angle o, \text{ (beyde rechte)}$$
$$\angle m = \angle m$$

daher $\angle (n + m) = \angle (o + m)$

oder $\angle ACD = \angle HCB.$

Es ist auch $HC = AC$ (I. §. 29.)

$CD = BC$ (I. §. 29.)

daher ist $\triangle ACD \cong \triangle HCB.$

Ferner ist $\triangle ACD$ die Hälfte des Parallelogramms oder Viereckes CE, weil beyde gleiche Grundlinien CD, und gleiche Höhe haben, da sie zwischen den Parallelen CD und AE liegen. (§. 25. Zus.)

Eben so ist $\triangle HCB$ die Hälfte des Parallelogramms CG, weil beyde die gemeinschaftliche Grundlinien HC haben, und zwischen den Parallelen CH und BG liegen.

Demnach ist $\square CE = 2\ \triangle ACD$ und $\square CG = 2\triangle HCB$. Es war aber

$$\triangle ACD = \triangle HCB$$

daher auch $2\triangle ACD = 2\triangle HCB$

oder $\square CE = \square CG.$

Auf der andern Seite kann der Beweis auf der nemlichen Art geführet werden. Nemlich man müste von I nach C und von L nach B gerade Linien ziehen, zeigen daß $\triangle IAC = \triangle LAB$, daß $\square AK = 2\triangle IAC$ und $\square AG = 2\triangle LAB$, daß folglich auch

$$\square AK = \square AG$$

Da nun $\square CE = \square CG$

und $\square AK = \square AG$

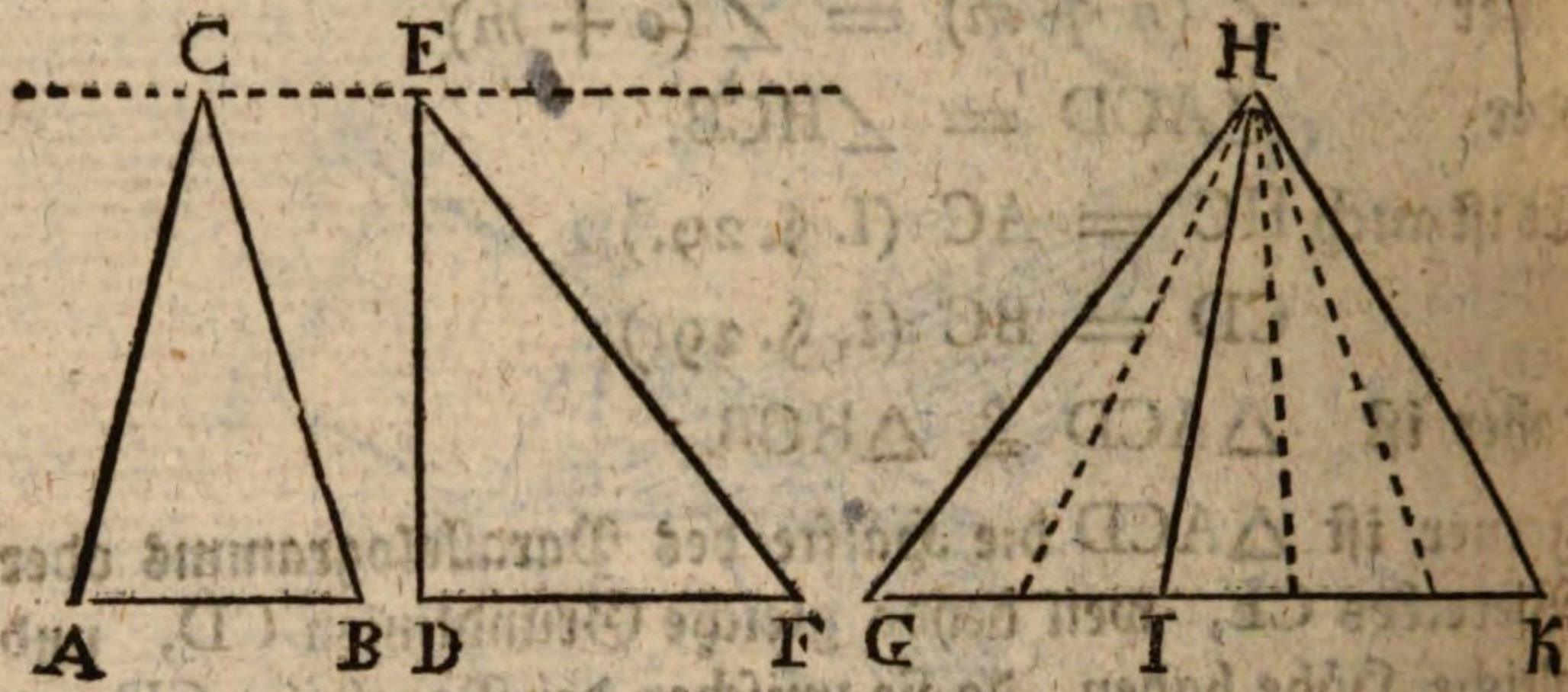
so

so folget $\square CE + \square AK = \square CG + \square AG$

oder $\square CE + \square AK = \square CL.$

§. 28.

Dreyecke von gleicher Höhe verhalten sich gegen einander wie ihre Grundlinien.



Beweis. Es seyen ACB und DEF zwey Dreyecke von gleicher Höhe, oder zwischen den Parallelen CH und AK. Nimm $GI = AB$, und $IK = DF$ Ziehe in willkürlicher Richtung die IH von einer Parallele zur andern. Ziehe HG und HK. So ist $\triangle GHI = \triangle ACB$ und $\triangle IHK = \triangle DEF$ (§. 26.).

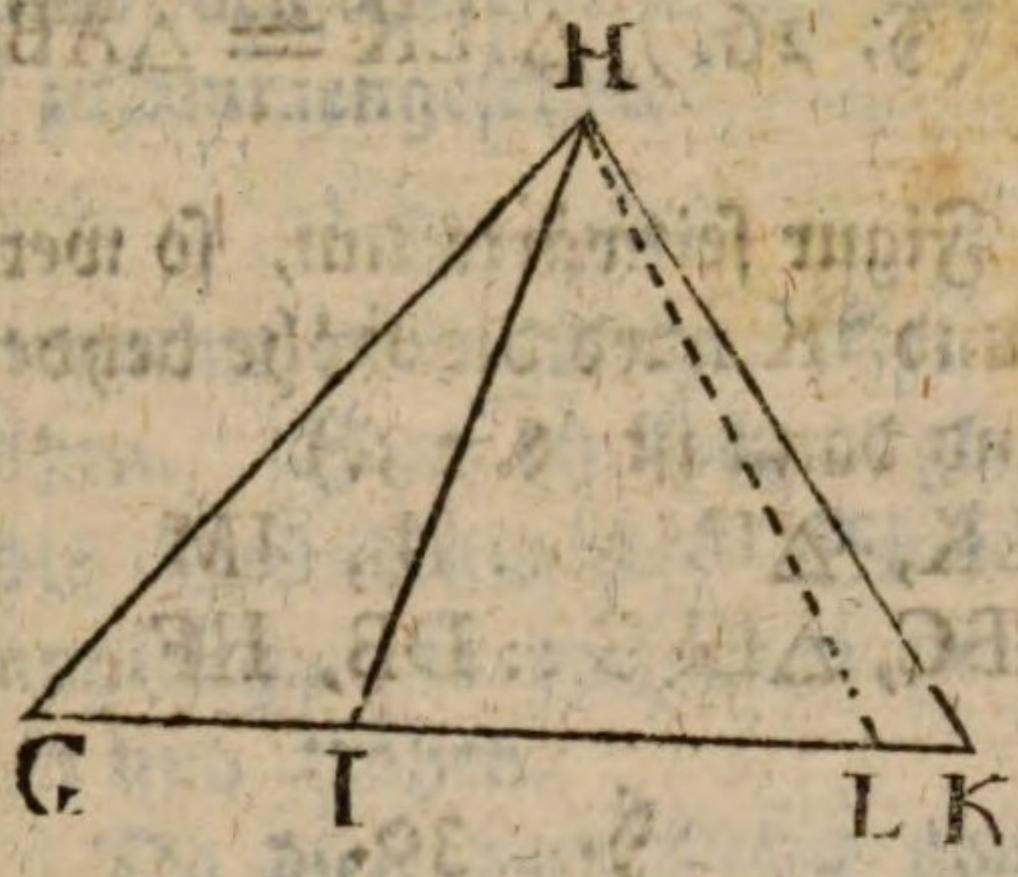
Theile die GI in einige gleiche Theile, und trage dergleichen Theile von I nach K. Gesetzt GI enthalte 2 Theile und IK enthalte 3.

Ziehe von den Theilungspunkten gerade Linien nach H so entstehen lauter gleiche Dreyecke, und $\triangle GHI$ enthält deren so viel als Theile in GI sind, $\triangle IHK$ aber so viel als Theile in IK sind.

So vielmal also IK größer ist als GI, so vielmal ist auch $\triangle IHK$ größer als $\triangle GHI$, das ist

$\triangle GHI, \triangle IHK :: GI, IK$

oder $\triangle ACB, \triangle DEF :: AB, DF.$



Bleibet nach der Theilung der IK etwas übrig, z. E. LK, so nimm immer kleinere und kleinere Theile. Dann wird IK die Gränze der IL und △IHK die Gränze von △IHL. Nun ist bewiesen, daß

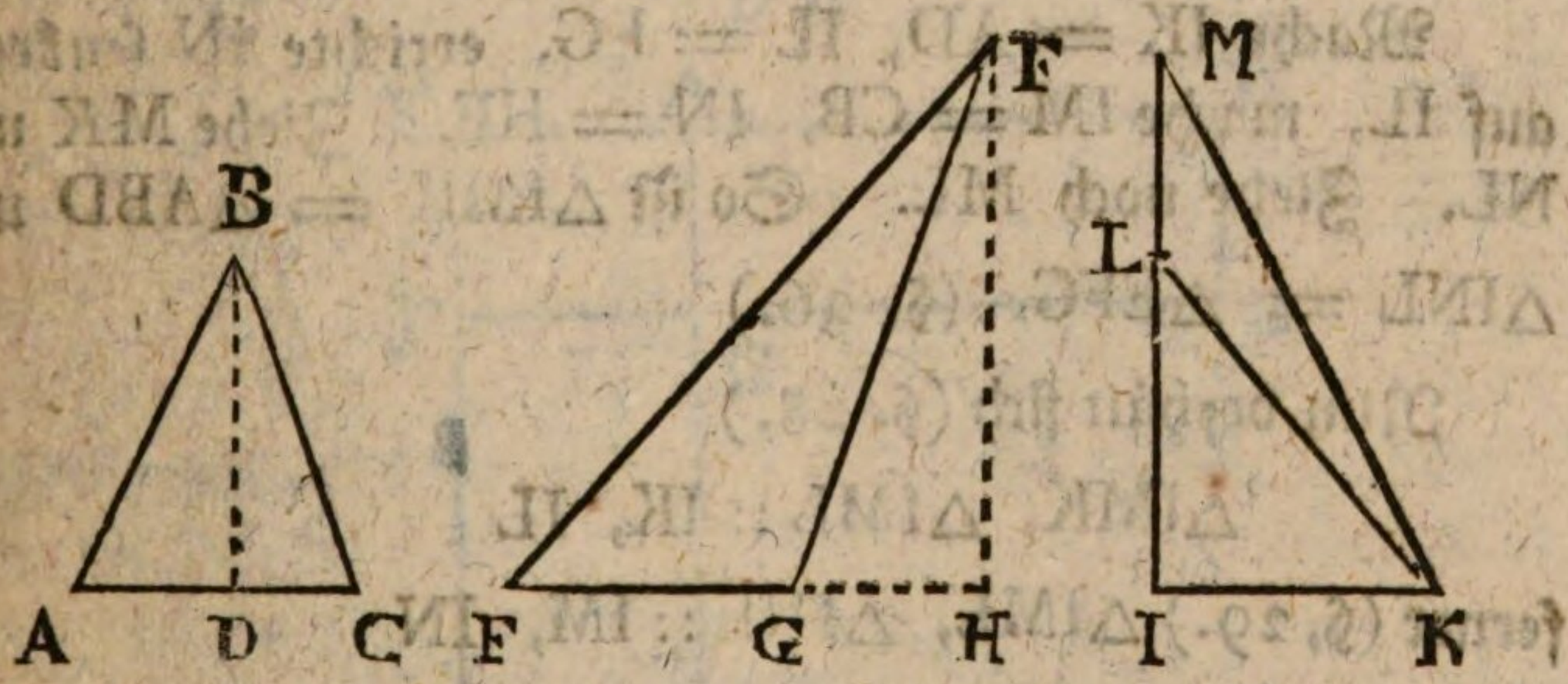
△GHI, △IHL :: GI, IL

Setze anstatt △IHL und anstatt IL deren Gränzen, (III. §. 24.) so kömmt wie vorher

△GHI, △IHK :: GI, IK.

§. 29.

Dreyecke von gleicher Grundlinie verhalten sich gegen einander wie ihre Höhen.



Es seyen ABC, EFG zwey Dreyecke von gleicher Grundlinie AC, EG, und von verschiedenen Höhen BD, FH. △ Nimm IK = AC = EG. Ziehe IM senkrecht auf

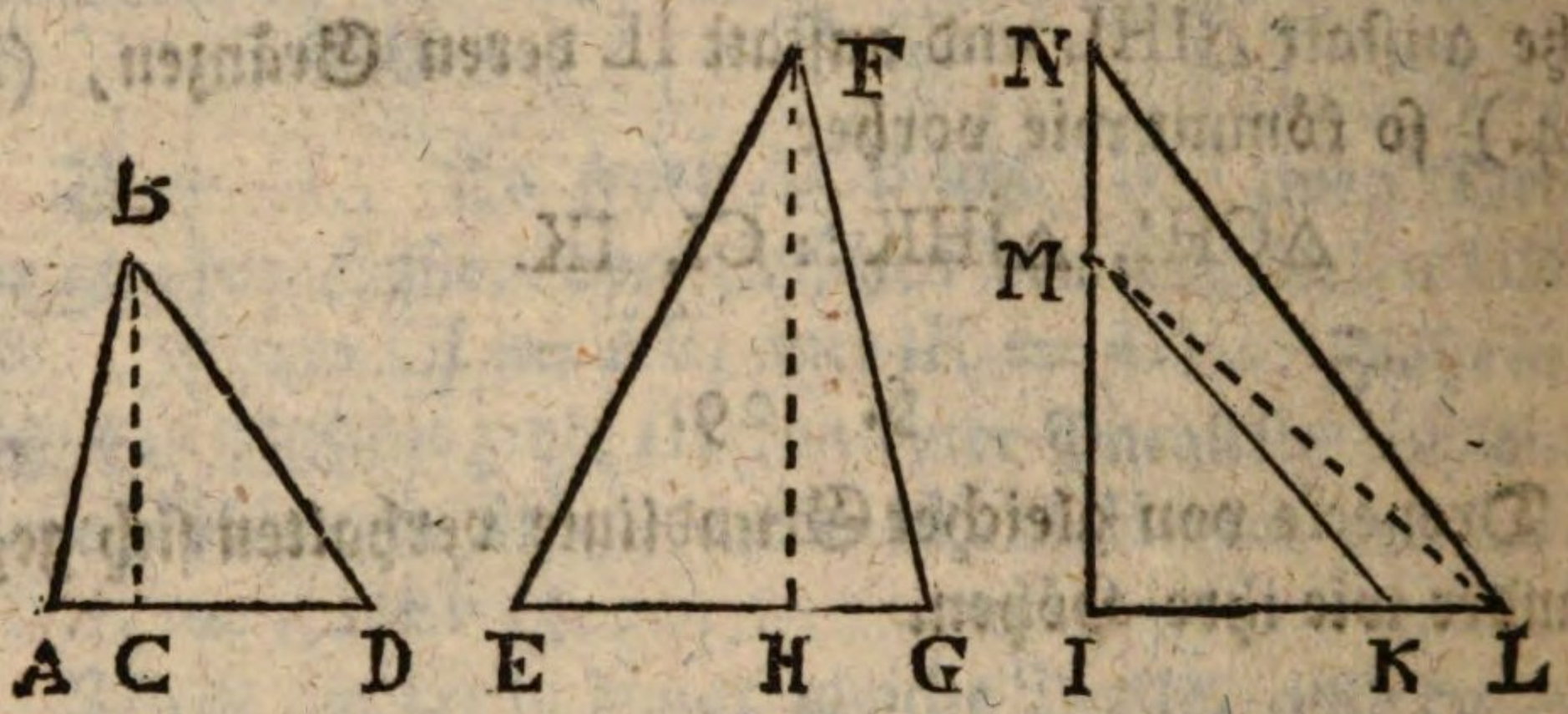
auf IK. Mache IM = HF, IL = DB. Ziehe LK, MK. So ist (§. 26.) △ILK = △ABC und △IMK = △EFG.

Wende die Figur seitwärts um, so werden IL, IM die Grundlinien, und IK wird die Höhe beyder Dreyecke ILK und IMK. Und dann ist (§. 28.)

△ILK, △IMK :: IL, IM
oder △ABC, △EFG :: DB, HF.

§. 30.

Dreyecke von verschiedener Grundlinie und verschiedener Höhe, sind im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grundlinien und ihrer Höhen, das ist sie verhalten sich erstlich wie die Grundlinien, und hernach noch wie die Höhen.



Mache IK = AD, IL = EG, errichte IN senkrech auf IL, mache IM = CB, IN = HF. Ziehe MK und NL. Ziehe noch ML. So ist △IMK = △ABD und △INL = △EFG. (§. 26.)

Nun verhält sich (§. 28.)

△IMK, △IML :: IK, IL

ferner (§, 29.) △IML, △INL :: IM, IN

Also ist das Verhältniß zwischen △IMK und △INL aus den Verhältnissen von IK zu IL und von IM zu IN zusammengesetzet. Oder das Verhältniß von △ABD

zu

zu ΔEFG ist aus den Verhältnissen von AD zu EG und von CB zu HF zusammengesetzet.

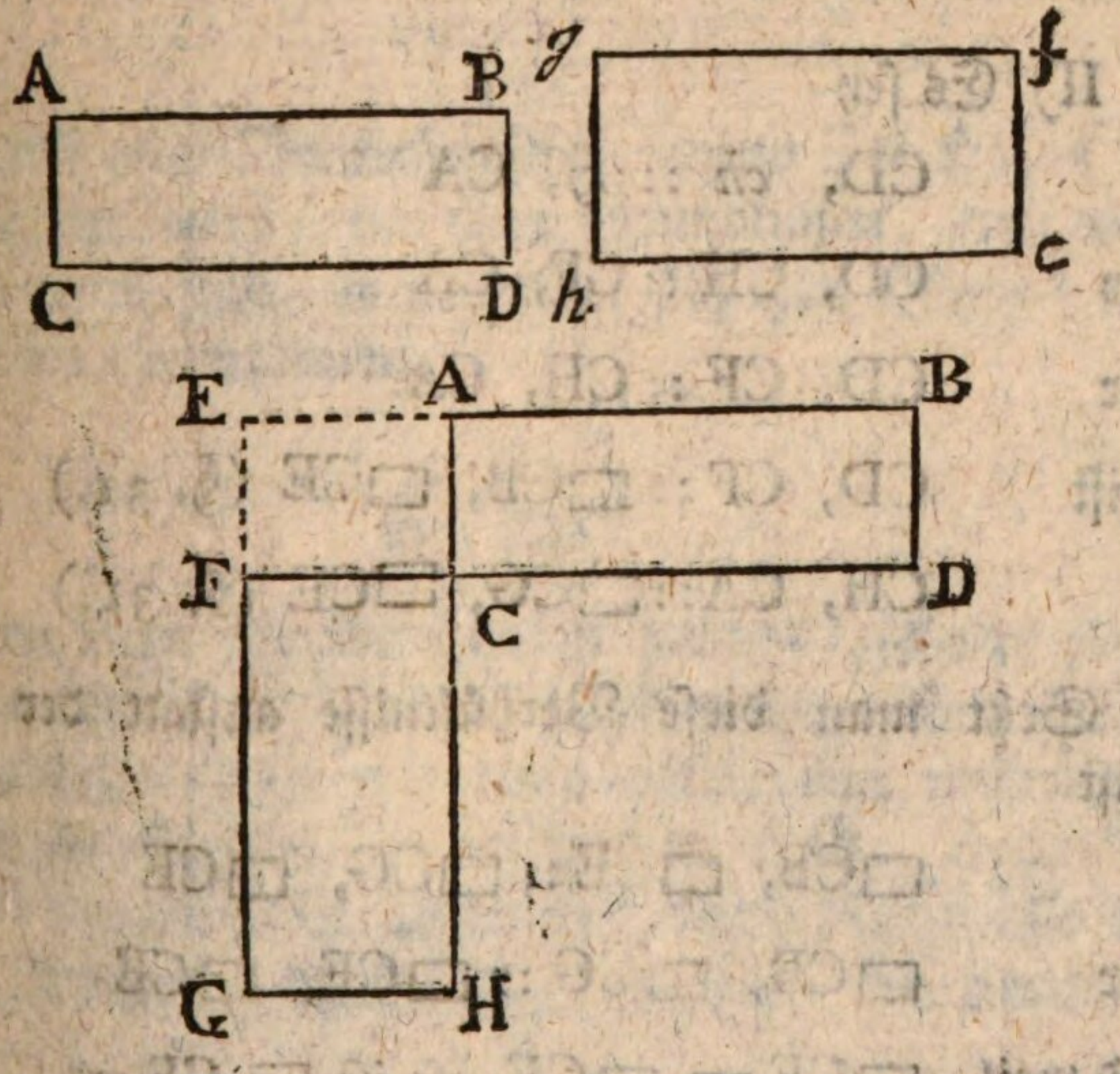
§. 31.

Parallelgramme von gleicher Grundlinie verhalten sich wie die Höhen. Sind die Höhen gleich, so verhalten sie sich wie die Grundlinien. Sind die Höhen und Grundlinien ungleich, so verhalten sie sich zugleich wie die Grundlinien und Höhen.

Beweis. Da diese drey Sätze von den Dreyecken bewiesen worden (§. 28. 29. 30.), so gelten sie auch von den Parallelogrammen, die nichts anders als doppelte Dreyecke sind. (§. 23, 24.)

§. 32.

Wenn zwey Parallelogramme oder Dreyecke gleich sind, so müssen sich ihre Höhen umgekehrt verhalten wie die Grundlinien, und wenn die Höhen sich umgekehrt verhalten wie die Grundlinien, so sind die Parallelogramme oder Dreyecke gleich.



Beweis. I) Es sey das Rechteck CB = dem Rechteck *cg*. Füge sie beyde an einander, so daß CF (= *cf*) mit DC, und CH (= *ch*) mit AC in einer geraden Linie liegen.

Vollende das Rechteck CE, indem du BA und GF verlängerst.

So ist □CB = □CG und □CE = □CE

folglich □CB, □CG :: □CE, □CE

oder □CB, □CE :: □CG, □CE.

Es ist aber

□CB, □CE :: CD, CF (§. 31.)

und □CG, □CE :: CH, CA (§. 31.)

Setze diese Verhältnisse anstatt der vorigen, so ist

CD, CF :: CH, CA

oder CD, *cf* :: *ch*, CA

oder CD, *ch* :: *cf*, CA

II) Es sey

CD, *ch* :: *cf*, CA

oder CD, CH :: CF, CA

oder CD, CF :: CH, CA.

Es ist CD, CF :: □CB, □CE (§. 31.)

CH, CA :: □CG, □CE (§. 31.)

Setzt man diese Verhältnisse anstatt der vorigen, so ist

□CB, □CE :: □CG, □CE

oder □CB, □CG :: □CE, □CE

Und weil □CE = □CE, so ist □CB = □CG.

In rechteckigten Parallelogrammen ist die eine Seite die Höhe (wenn die andern zur Grundlinie angenommen wird. Ferner ist ein rechteckiges Parallelogramm jedem schiefeckigten gleich, das mit ihm einerley Grundlinie und Höhe hat.

Also sind in gleichen Parallelogrammen überhaupt die Höhen und Grundlinien in umgekehrten Verhältnisse, oder die Grundlinie des ersten verhält sich zur Grundlinie des zweyten, wie die Höhe des zweyten zur Höhe des ersten.

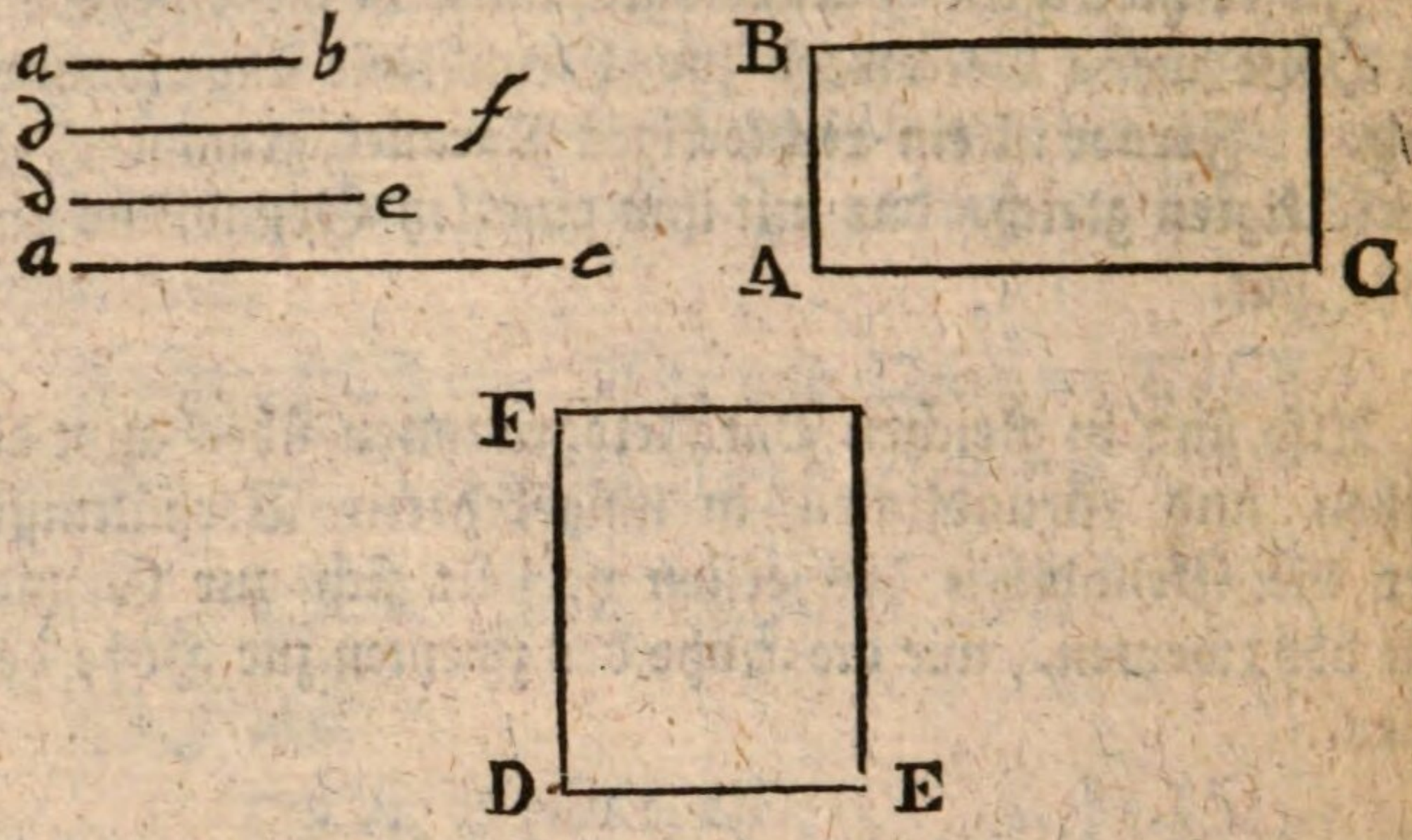
Und wenn die Höhe mit den Grundlinien in umgekehrten Verhältnisse stehen, so sind die Parallelogramme gleich.

III. Jedes Dreyeck ist die Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Höhe und Grundlinie. Wenn also die Parallelogramme gleich sind, so sind auch die Dreyecke gleich.

Also sind auch Dreyecke gleich, wenn ihre Höhen sich umgekehrt verhalten, wie ihre Grundlinien, und wenn Dreyecke gleich sind, so verhalten sich ihre Höhen umgekehrt wie die Grundlinien.

§. 33.

Wenn vier gerade Linien proporzionirt sind, so ist das Rechteck aus den beyden äußersten gleich dem Rechtecke aus den beyden mittleren; und wenn vier gerade Linien so beschaffen sind, daß das Rechteck der beyden äußersten dem Rechtecke der beyden mittlern gleich ist, so sind sie proporzioniret.



I) Es sey *ab*, *df* :: *de*, *ac*. Es sey ein Rechteck CB aus AB (= *ab*) und AC (= *ac*). Es sey auch ein Rechteck EF aus DF (= *df*) und DE (= *de*). So verhält sich eine Seite AB des ersten Rechtecks zu einer Seite DF des zweyten, wie die andere Seite DE des zweyten zur andern Seite AC des ersten.

Also sind beyde Rechtecke gleich. (§. 32.)

II) Es seyen *ab*, *df*, *de* und *ac* so beschaffen, daß das Rechteck aus *ab* und *ac* gleich sey dem Rechtecke aus *df* und *de*. Mache aus dem gegebenen Linien die Rechtecke EF und CB. Weil sie gleich seyn sollen, so müssen ihre Seiten in umgekehrtem Verhältnisse stehen. Also wird seyn

AB, DF :: DE, AC,

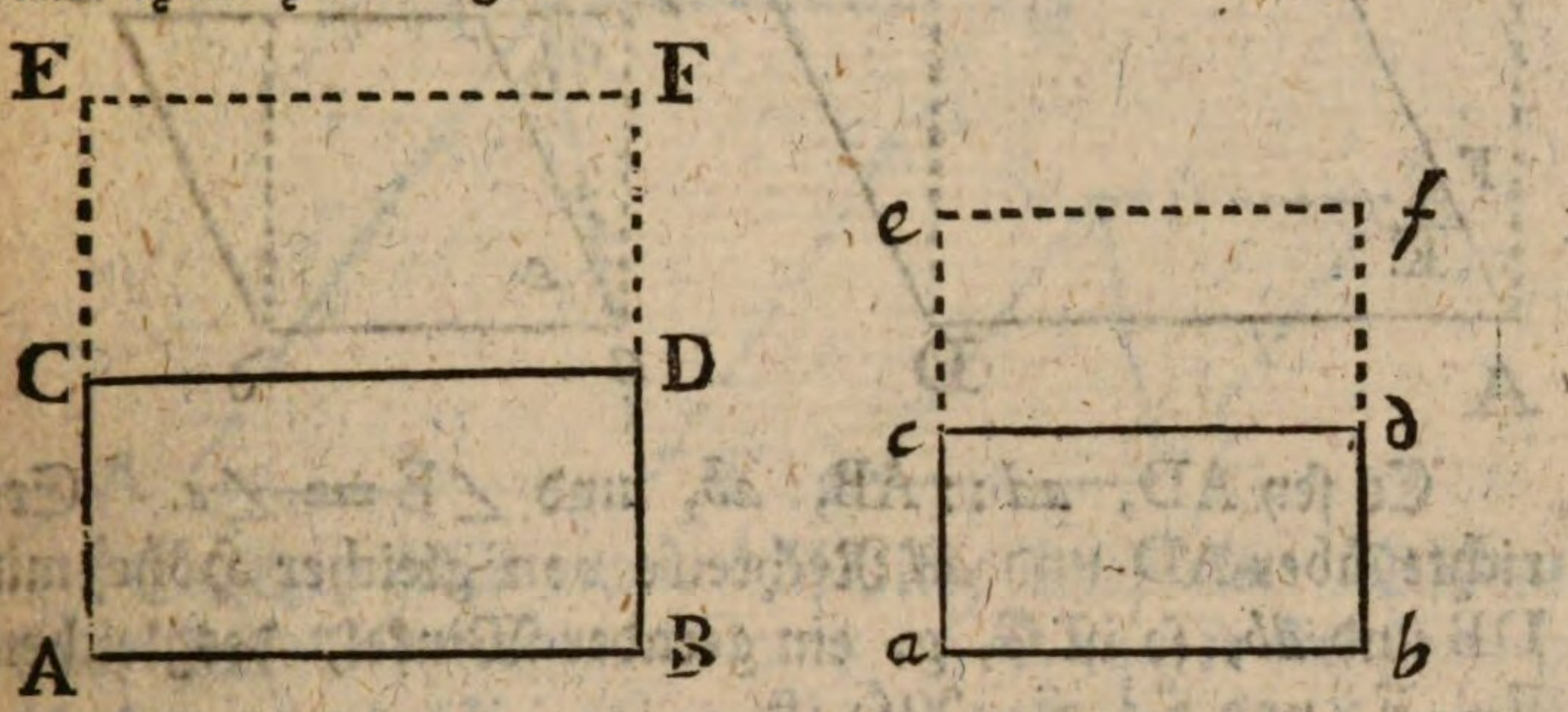
oder *ab*, *df* :: *de*, *ac*.

Zusatz 1. Wenn beyde mittlere Linien gleich sind, so entstehet eine zusammenhängende oder stetige Proporzion, und das Rechteck der beyden mittleren wird ein Quadrat. Also ist in einer stätigen Proporzion dreyer Linien das Quadrat der mittleren Linie gleich dem Rechtecke der beyden äußeren, und drey Linien stehen in stetiger Proporzion, wenn das Quadrat der mittleren Linie gleich ist dem Rechtecke der beyden äußeren.

Zusatz II. Der nemliche Satz gilt auch von Dreyecken, weil auch in gleichen Dreyecken die Höhen in umgekehrtem Verhältnisse der Grundlinien stehen.

§. 34.

Aehnliche Parallelogramme verhalten sich wie die Quadrate ihrer homologen Seiten.



Es sey BD, AB :: *bd*, *ab*. Beschreibe über AB und über *ab* die Quadrate dieser Linien nemlich BE und *be*.

Es ist

□BC, □BE :: BD, BF (§. 31.)

oder □BC, □BE :: BD, AB (weil AB = BF)

Desgleichen ist

□*bc*, □*be* :: *bd*, *bf* (§. 31.)

oder □*bc*, □*be* :: *bd*, *ab* (weil *ab* = *bf*)

Es war aber

BD, AB :: *bd*, *ab*.

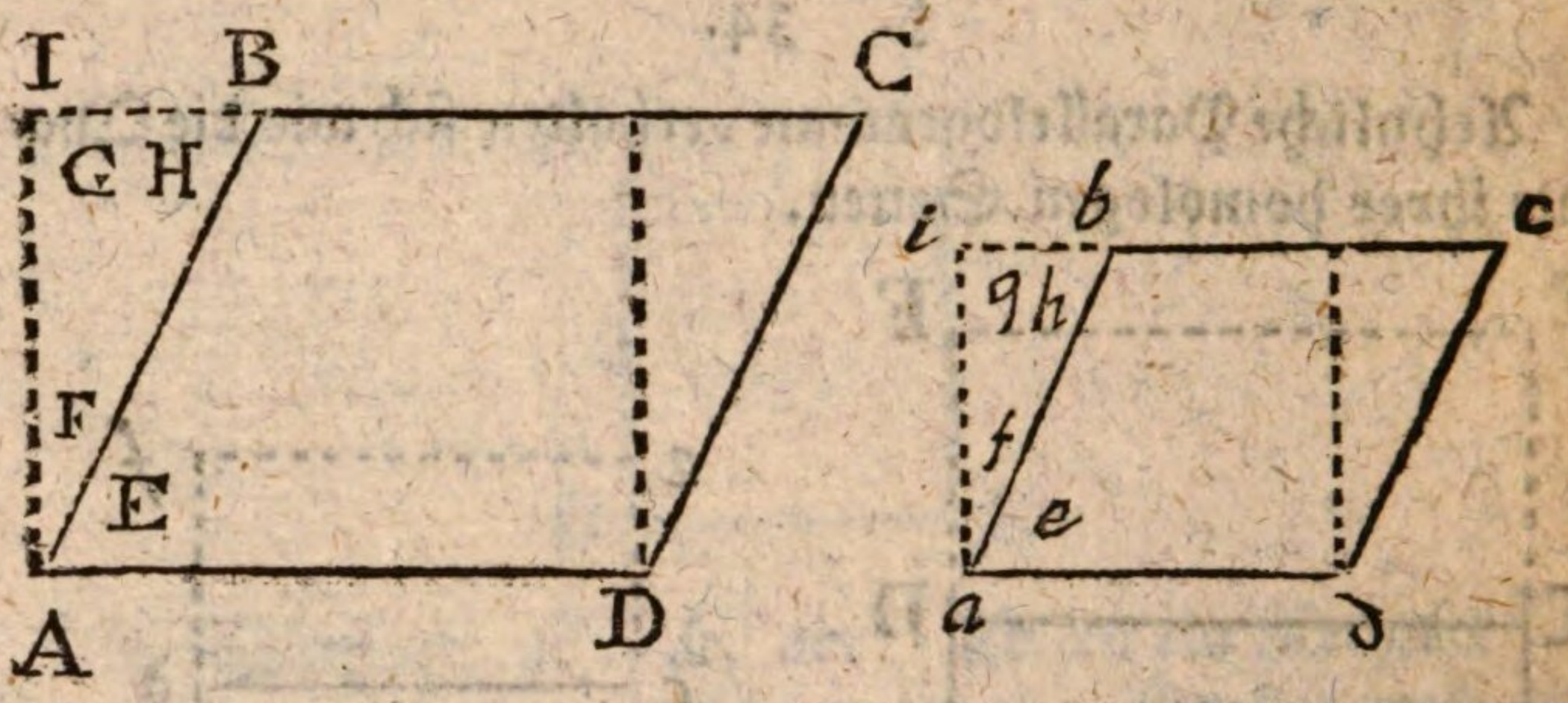
Anstatt des Verhältnisses BD: AB setze das gleiche Verhältniß □BC: □BE, und anstatt des Verhältnisses *bd*: *ab*, setze das gleiche Verhältniß □*bc*: □*be*, so ist

□BC, □BE :: □*bc*, □*be*.

□BC, □*bc* :: □BE, □*be*

oder □BC, □*bc* :: AB□, *ab*□

Sind die gegebene ähnliche Parallelogramme schiefwinklich, so findet das nemliche Verhältniß statt.



Es sey AD, *ad* :: AB, *ab*, und ∠E = ∠*e*. Errichte über AD und *ad* Rechtecke von gleicher Höhe mit DB und *db*, so ist G, *g*, ein gerader Winkel, desgleichen F + E, und *f* + *e*. Also ist

∠F + ∠E = ∠*f* + ∠*e*

nimm ab . . . ∠E = . . ∠*e*

bleibet ∠F . . = ∠*f*

folglich ist auch ∠H = ∠*h*. (III. §. 29.)

Da nun in den Dreyecken AIB und *aib* die Winkel beyderseits gleich sind, so ist

AB, *ab* :: AI zu *ai*

setze in der angenommenen Proporzion

AD, *ad* :: AB, *ab*

das Verhältniß AI zu *ai* anstatt AB zu *ab*, so ist

AD, *ad* :: AI, *ai*

Also sind auch die Rechtecke DI und *di* ähnlich, und es ist (§. 34.)

□DI, □*di* :: AD□, *ad*□

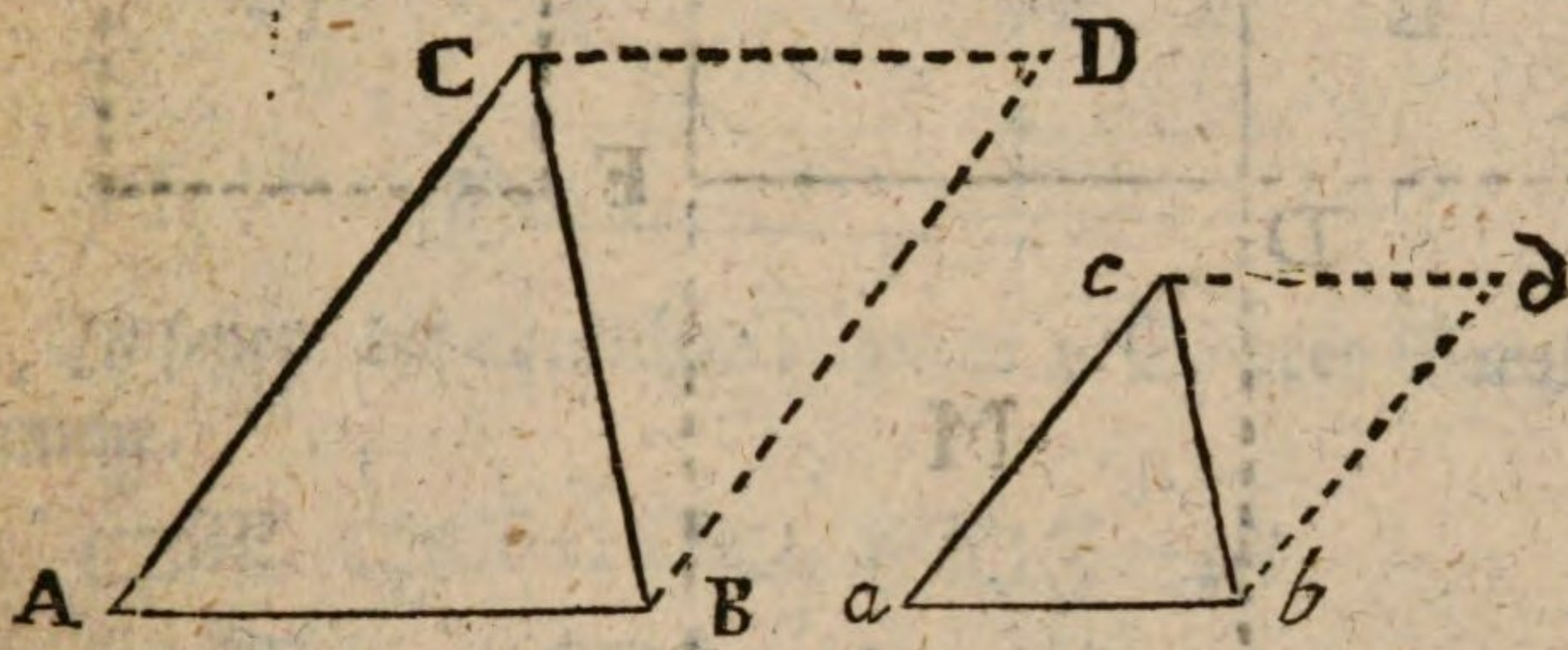
oder

oder weil $\square DI = \square AC$ und $\square di = \square ac$,

so ist $\square AC, \square ac :: AD\square, ad\square$

§. 35.

Aehnliche Dreyecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer homologen Seiten.



Es seyen ACB und *acb* ähnliche Dreyecke. Vollende die Parallelogramme AD und *ad*, (§. 24.) so sind sie auch ähnlich, weil AB, AC :: *ab*, *ac*, und $\angle A = \angle a$ Es ist also (§. 34)

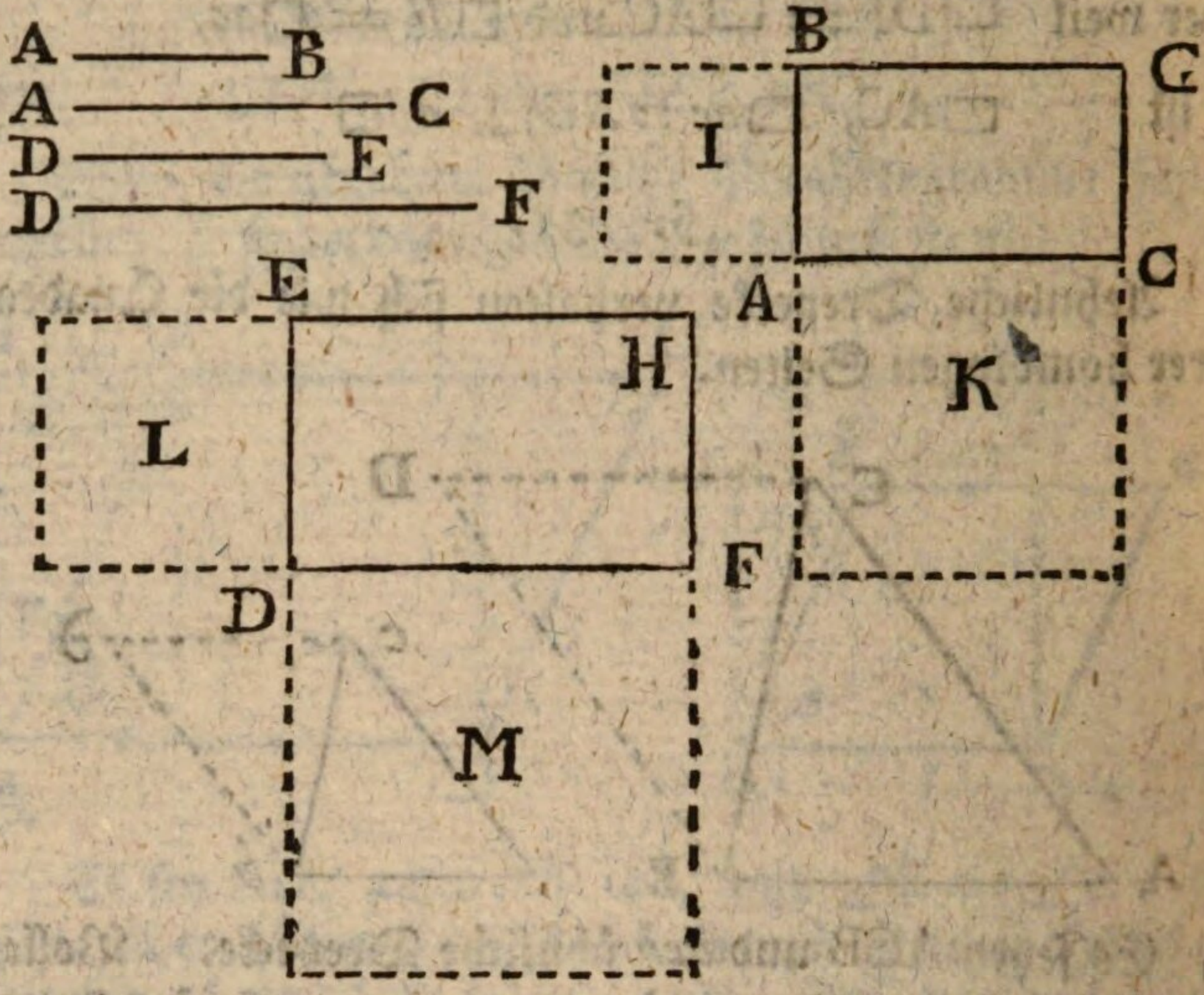
$\square AD, \square ad :: AB\square, ab\square$

und weil die Hälften sich verhalten wie die Ganzen, so ist

$\triangle ACB, \triangle acb :: AB\square, ab\square$.

§. 36.

Wenn vier Linien proporzioniret sind, so sind ihre Quadrate auch proporzioniret.



Es seyen AB, AC, DE, DF proporzioniret. Mache aus AB und AC das Rechteck AG, und aus DE und DF das Rechteck DH.

So ist (§. 34.)

□AG, □DH :: □K, □M

□AG, □DH :: □I, □L

folglich

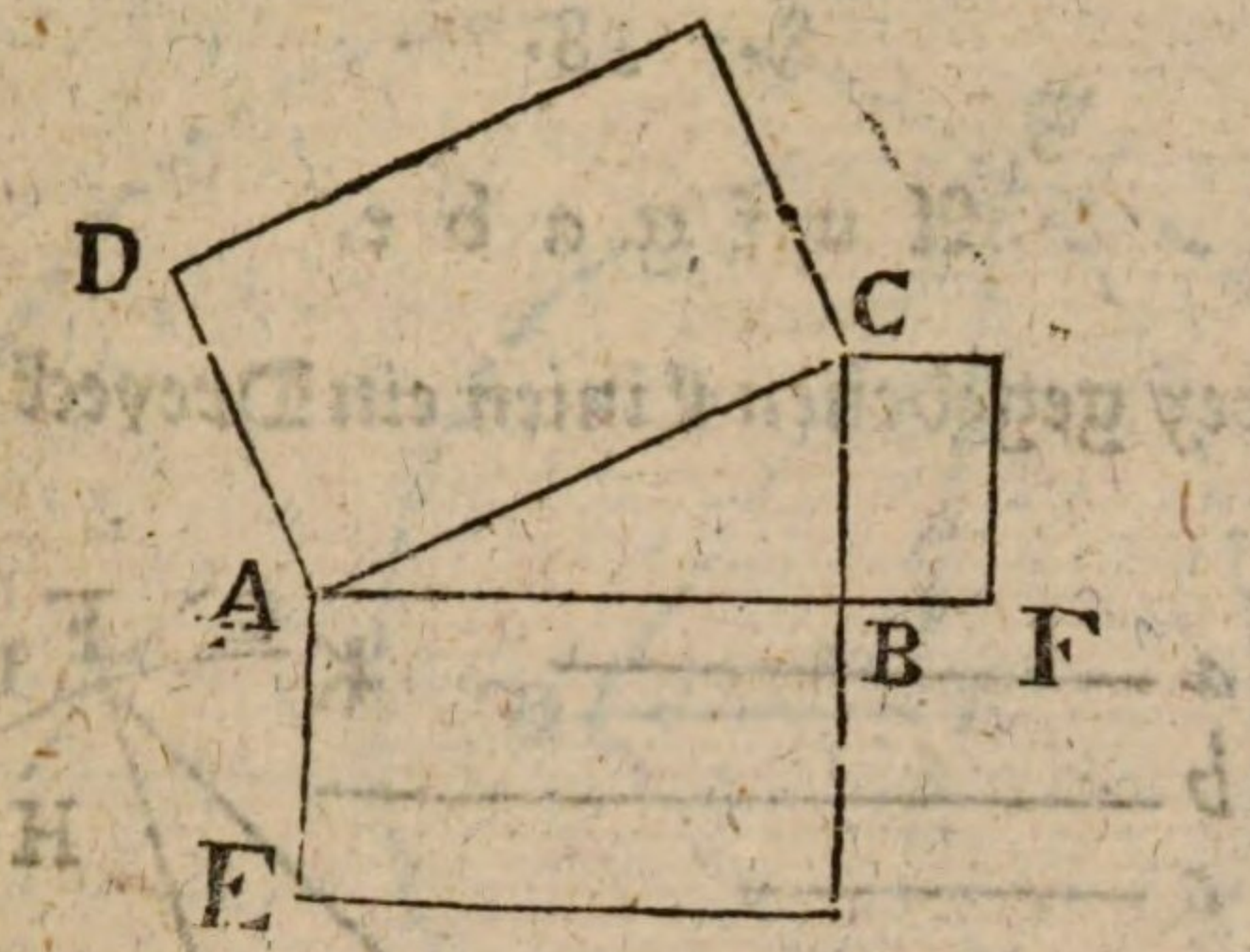
□K, □M :: □I, □L

oder AB□, DE□ :: AC□, DF□

oder AB□, AC□ :: DE□, DF□

§. 37.

Wenn ähnliche Parallelogramme oder Dreyecke auf den drey Seiten eines rechtwinklichen Dreyecks beschrieben sind, so ist die Figur auf der Gegenseite des rechten Winkels so groß, als die beyden anderen zusammen genommen.



Es seyen die ähnlichen Figuren z. E. drey Parallelogramme.

□BE, □CF :: AB□, BC□ (§. 34.)

(□BE + □CF), □CF :: (AB□ + BC□), BC□

(□BE + □CF), (AB□ + BC□) :: □CF, BC□

Es ist ferner

□CF, □CD :: BC□, AC□

oder □CF, BC□ :: □CD, AC□

Weil nun

(□BE + □CF), (AB□ + BC□) :: □CF, BC□

und □CD, ... AC□ :: □CF, BC□

so ist (□BE + □CF), (AB□ + BC□) :: □CD, AC□

(□BE + □CF), □CD :: (AB□ + BC□), AC□

Da nun AB□ + BC□ = AC□, (§, 27.) so folget auch

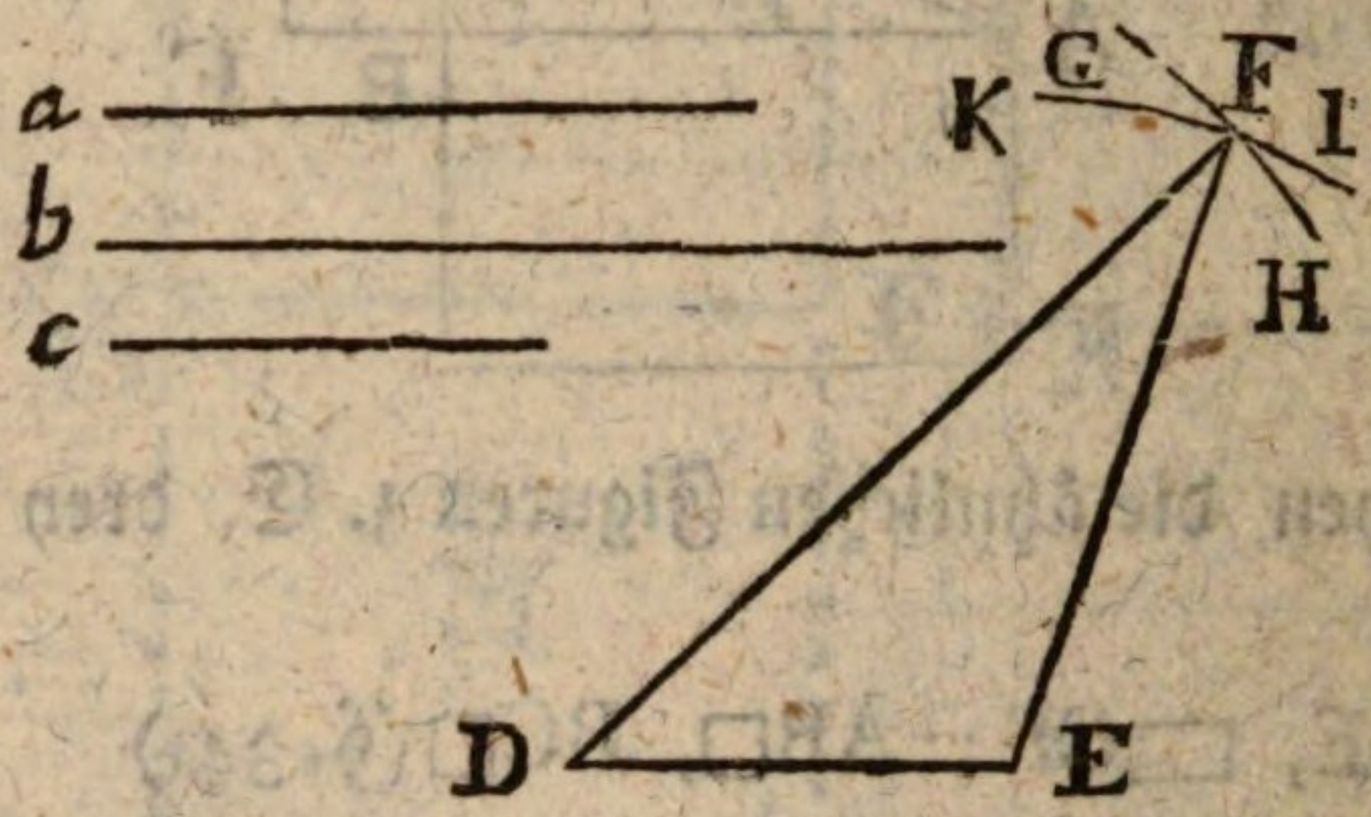
□BE + □CF = □CD.

Auf gleicher Art würde der Beweis geführt, wenn die Figuren ähnliche Dreyecke wären.

§. 38.

Aufgabe.

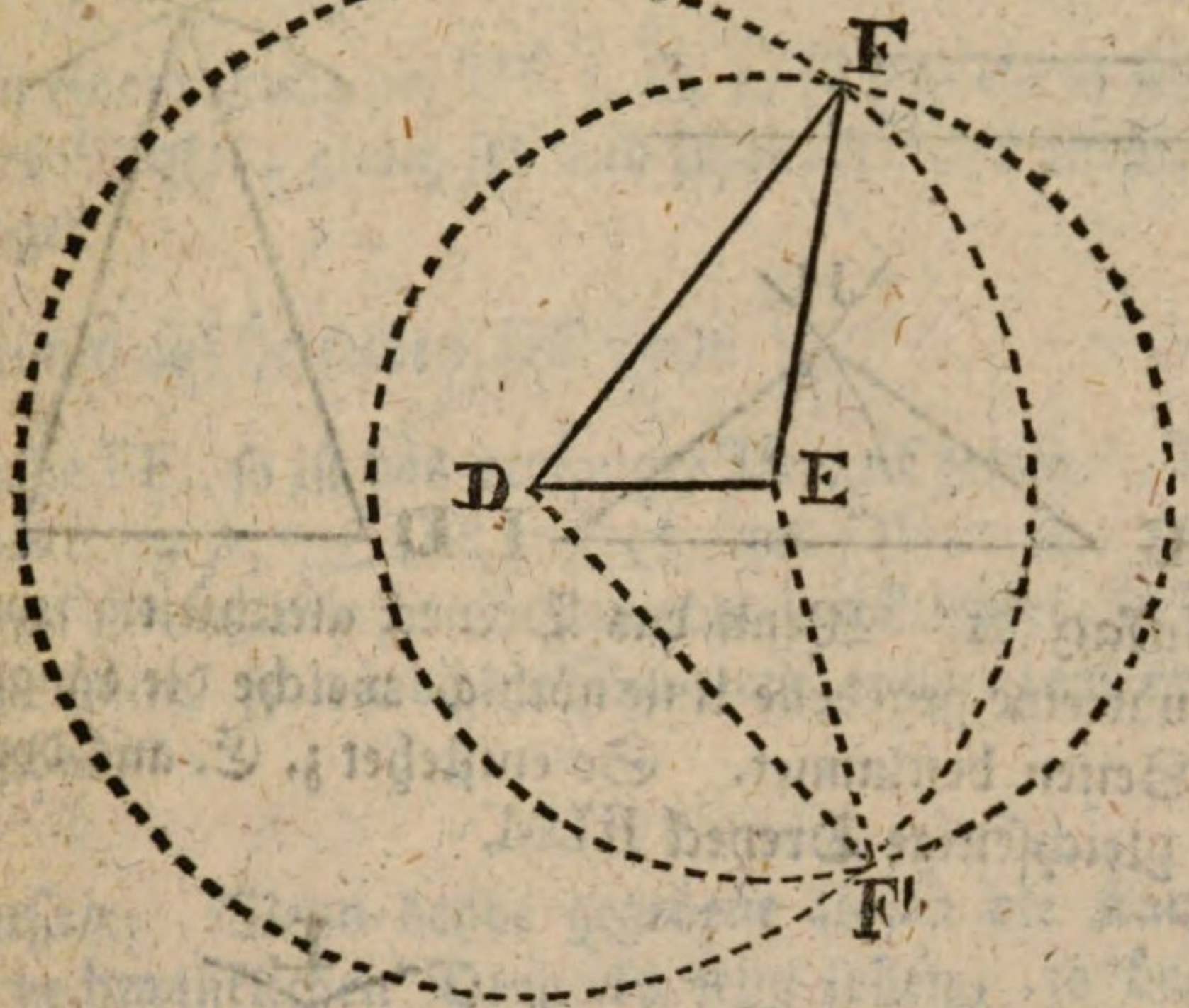
Aus drey gegebenen Linien ein Dreyeck machen.



□ **Auflösung.** Mache die Grundlinie DE der einen gegebenen Linie gleich, z. E. der *c*. Aus D beschreibe einen Bogen oder Zirkel GH mit einem Halbmesser der einer von beyden übrigen gegebenen Linien gleich sey, z. E. der *b* gleich. Aus E mit einem Halbmesser welcher der übrigen gegebenen Linie *a* gleich sey, beschreibe auch einen Bogen oder Zirkel KI, welcher den vorigen irgendwo in F schneiden wird.

Ziehe DF und EF, so ist das verlangte Dreyeck fertig. Denn es ist DE = *c*, DF = *b* (II. §. 10) EF = *a*.

Anmerkung 1. Von den drey gegebenen Linien muß nothwendig jede kleiner seyn als die Summe der beyden übrigen; sonst ist die Auflösung unmöglich. (§. 16.)

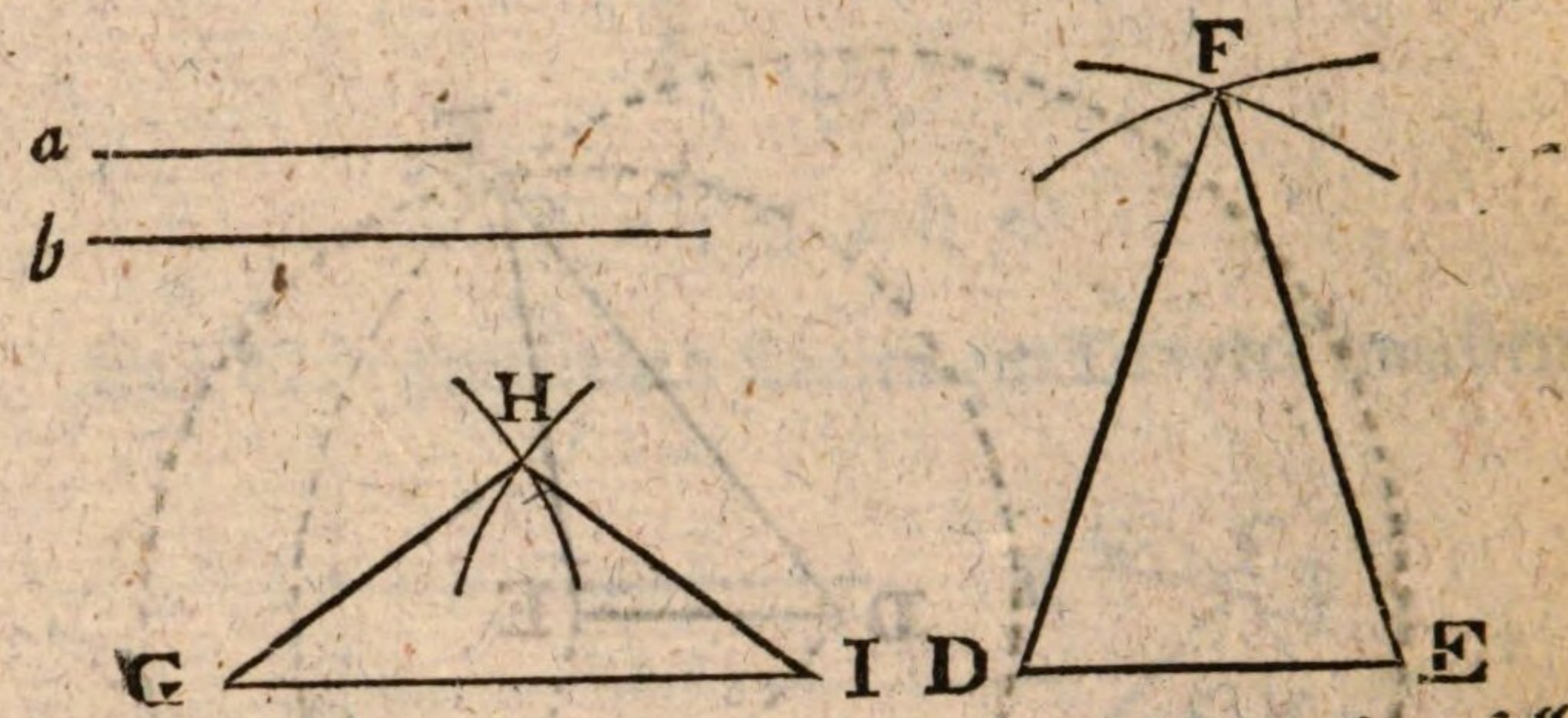


Anmerkung II. Wenn man, anstatt kleiner Bogen, die in der Ausübung hinlänglich sind, ganze Zirkel beschreibet, so bekömmt man das nemliche Dreyeck in zwey verschiedenen Lagen, als DFE und DF'E.

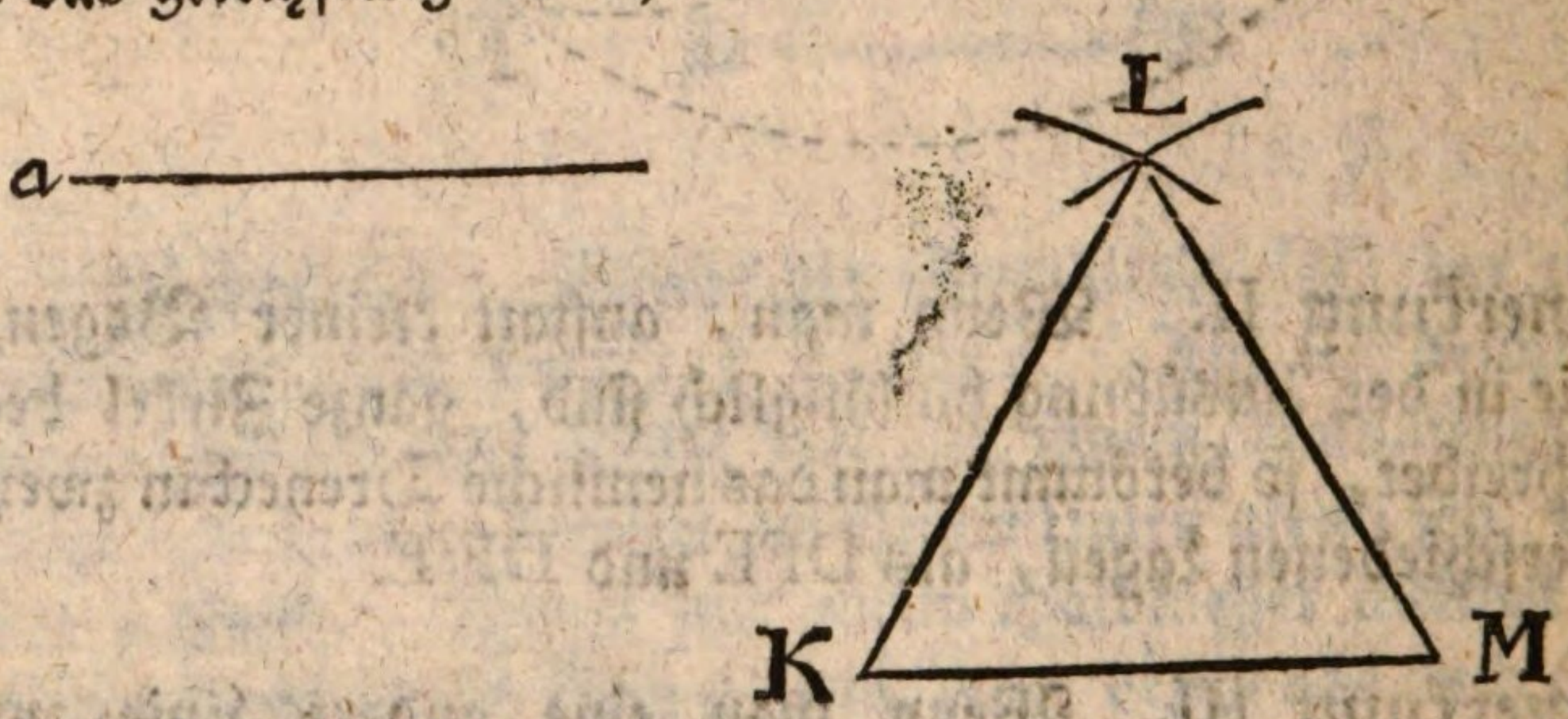
Anmerkung III. Wenn man eine andere Linie zur Grundlinie nimmt, oder die beyden übrigen Seiten in einer andern Ordnung anbringt, z. E. die *b* zur rechten und *a* zur linken, so bekömmt man das Dreyeck wiederum jedesmal in verschiedenen Lagen.

Zusatz I. Wenn das Dreyeck gleichschenklich seyn soll, so sind nur zwey gegebene Linien nöthig, nemlich die Grundlinie und die Länge beyder Schenkel. Z. E. *a* sey die Grundlinie und *b* die Länge der Schenkel, so bekömmt man das Dreyeck DFE wo DE = *a*, DF = EF = *b*. Wäre *b* die Grnndlinie und *a* die Länge der Schenkel, so bekäme man ein anderes Dreyeck GHI.

(Siehe die folgende Figur.)



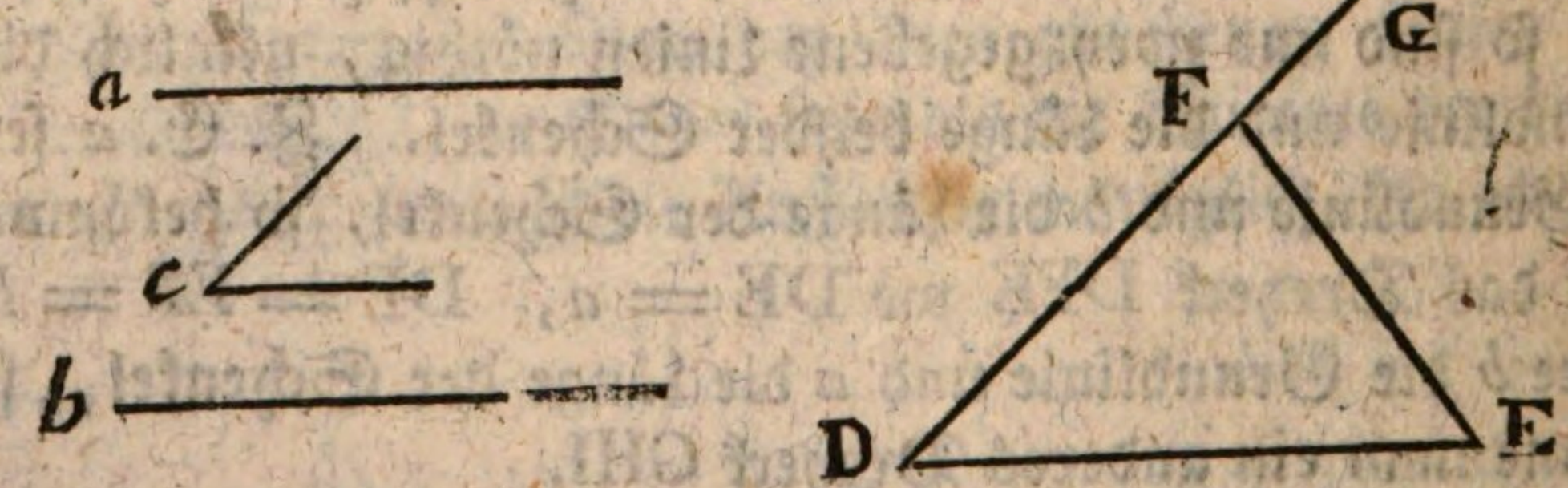
Zusatz II. Wenn das Dreyeck gleichseitig seyn soll, so ist nur eine gegebene Linie nöthig, welche die Länge aller drey Seiten bestimmet. So entstehet z. E. aus der Linie *a* das gleichseitige Dreyeck KLM.



§. 39.

Aufgabe.

Aus zwey gegebenen Linien und dem Zwischenwinkel, ein Dreyeck beschreiben.



Auflösung. Es seyen beyde gegebene Linien *a* und *b*, der Zwischenwinkel sey *c*.

Mache

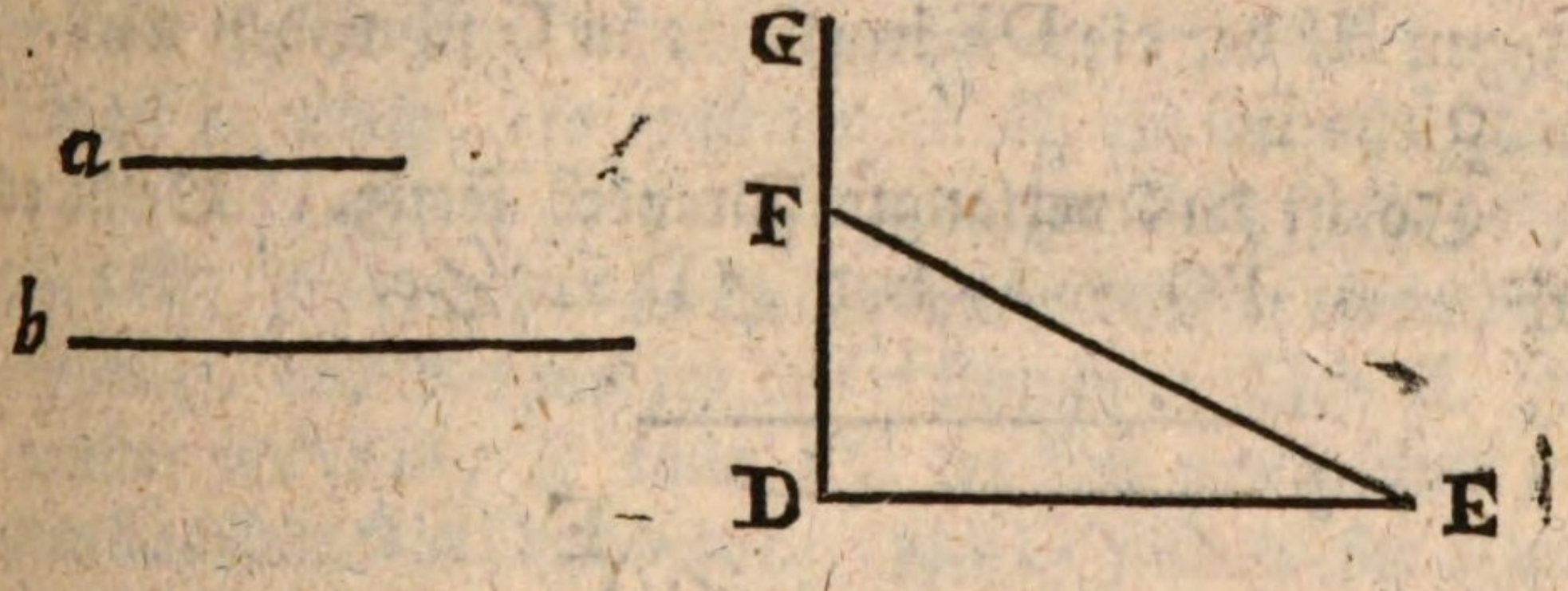
Mache DE = der einen gegebenen Linie, z. E. = *b*.

An einem Ende der DE z. E. in D lege einen Winkel der dem Winkel *c* gleich sey und ziehe DG von unbestimmter Länge.

Nimm auf derselben DF = *a*.

Ziehe FE, so ist das verlangte Dreyeck fertig. Denn es ist DE = *b*, ∠D = ∠*c*, und DF = *a*. Wenn man *a* zur Grundlinie genommen oder den Winkel *c* in E angebracht hätte, so würde die Figur eine andere Lage bekommen haben.

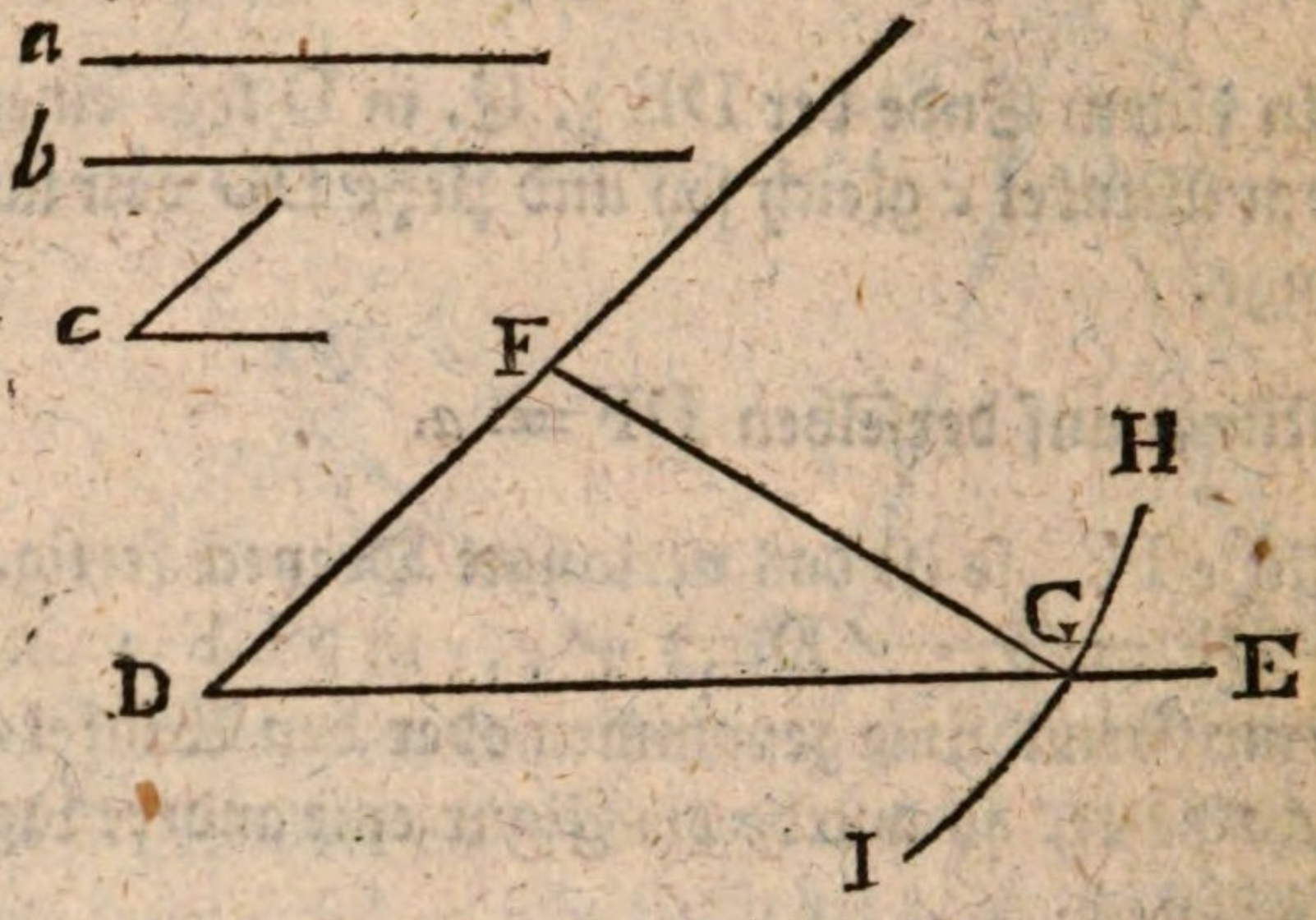
Zusatz. Wenn beyde gegebene Linien die Katheten eines rechtwinklichen Dreyecks seyn sollen, so braucht man keinen gegebenen Winkel.



Man machet DE = *b*, errichtet DG senkrecht auf DE, machet DF = *a*, und ziehet die Hypotenuse FE.

§. 40.

Aus zwey gegebenen Linien, und einem Gegenwinkel, ein Dreyeck beschreiben.



Auflösung. Es seyen *a* und *b* die gegebenen Linien, und *c* der Gegenwinkel der *b*.

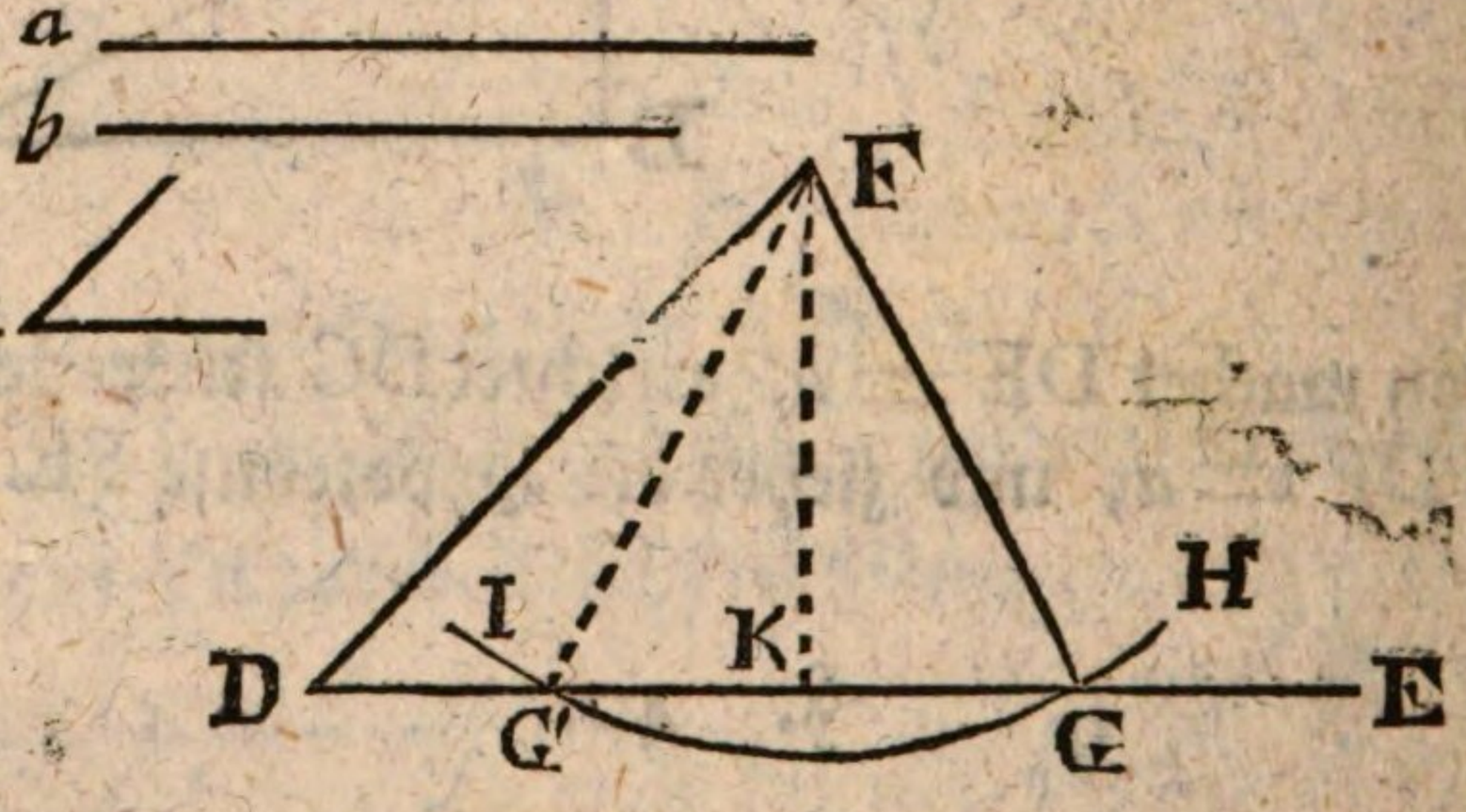
Ziehe DE von unbestimmter Länge.

Mache $\angle D = \angle c$, und $DF = a$.

Aus F mit einem Halbmesser $= b$ beschreibe einen Bogen HI der die DE irgendwo in G schneiden wird.

Ziehe FG.

So ist das verlangte Dreyeck fertig. Denn es ist $DF = a$, $FG = b$, und $\angle D = \angle c$.



Zusatz I. Wäre die *b*, deren Gegenwinkel gegeben ist, kleiner als *a*, so bekäme man zwey verschiedene Dreyecke. Z. E. es sey in der Figur $b < a$. Man verfahre wie vorher angewiesen, so schneidet der Zirkel HI die DE zweymal, nemlich in G und in G'. Beyde Dreyecke DFG und DFG' haben also die verlangten Eigenschaften, und es

ist

ist DF = a, ∠D = ∠c, FG = FG′ = b. In diesem Falle muß demnach in der Aufgabe noch bestimmet werden, ob der Gegenwinkel der DF oder a entweder spitzig oder stumpf seyn soll.

Wäre die b so klein, daß sie die DE aus F nicht erreichen könnte, so wäre die Auflösung unmöglich.

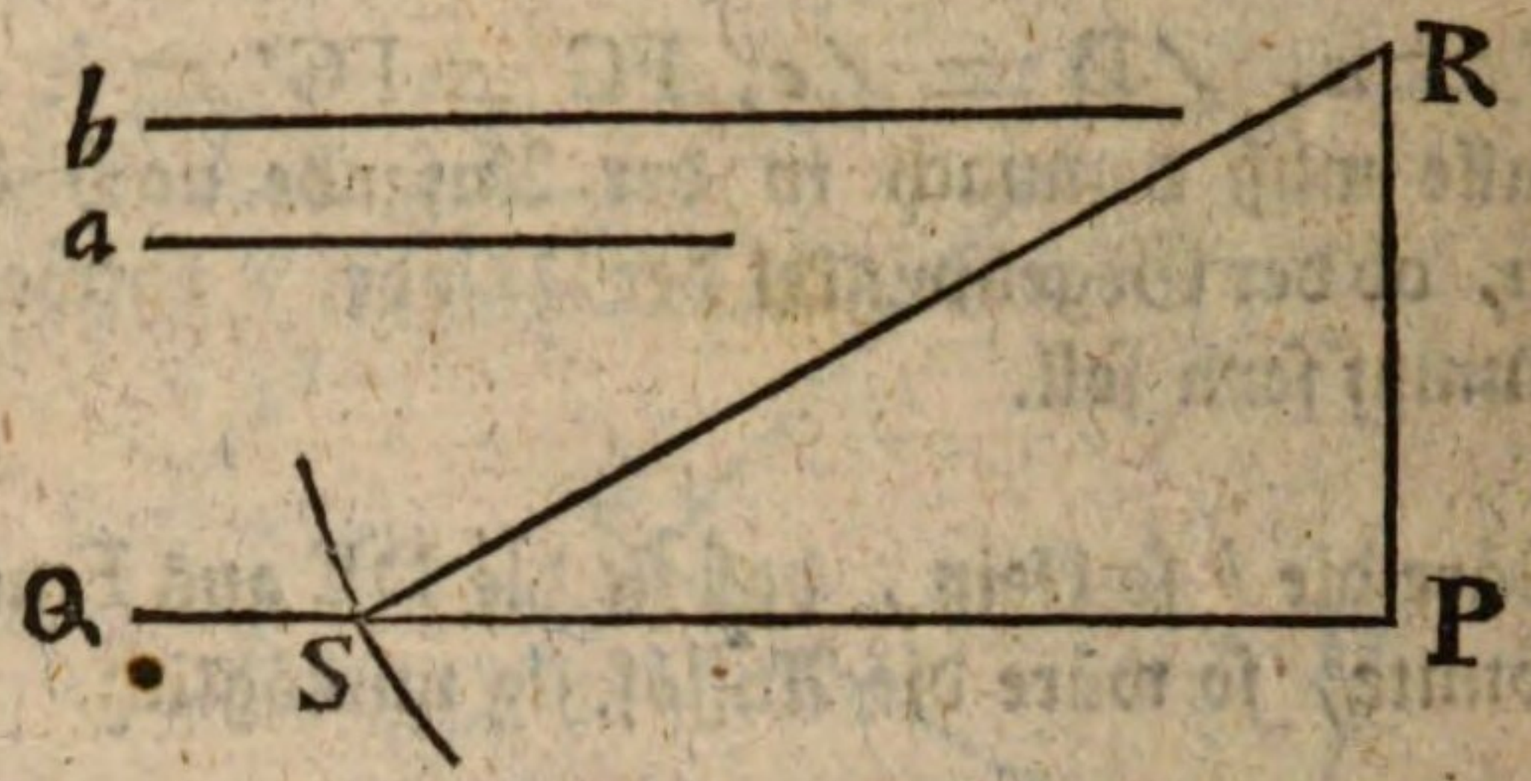
Wäre die b eben lang genug, um die DE nur in einem Punkte zu erreichen, so fielen beyde Punkte G und G′ auf einander, und es entstünde ein Dreyeck was in G rechtwinklich wäre.

Um alles dieses genauer zu bestimmen, ziehe FK senkrecht auf DE.

Trift es sich nun, daß FG (= b) kleiner ist als die senkrechte FK, so ist das Dreyeck unmöglich. Ist FG (= b), der Linie FK gleich, so entstehet in K ein rechter Winkel. Ist FG oder b größer als gedachte FK, aber kleiner als DF, so entstehen zwey Dreyecke wovon eines in G spitzwinklich, und das andere in G′ stumpfwinklich ist. Ist FG größer als FD, so kann FG die DE nur einmal zur Rechten des Punktes D schneiden, und G′ fällt linker Hand jenseit dieses Punktes D, wenn man den Zirkel HI beschreibet. In diesem Falle entstehet nur ein Dreyeck was den verlangten Winkel D habe, wie in der Auflösung.

Zusatz II. Es muß in der Aufgabe bestimmet werden, welche von beyden Linien dem gegebenen Winkel gegenüber stehen soll.

Zusatz III.

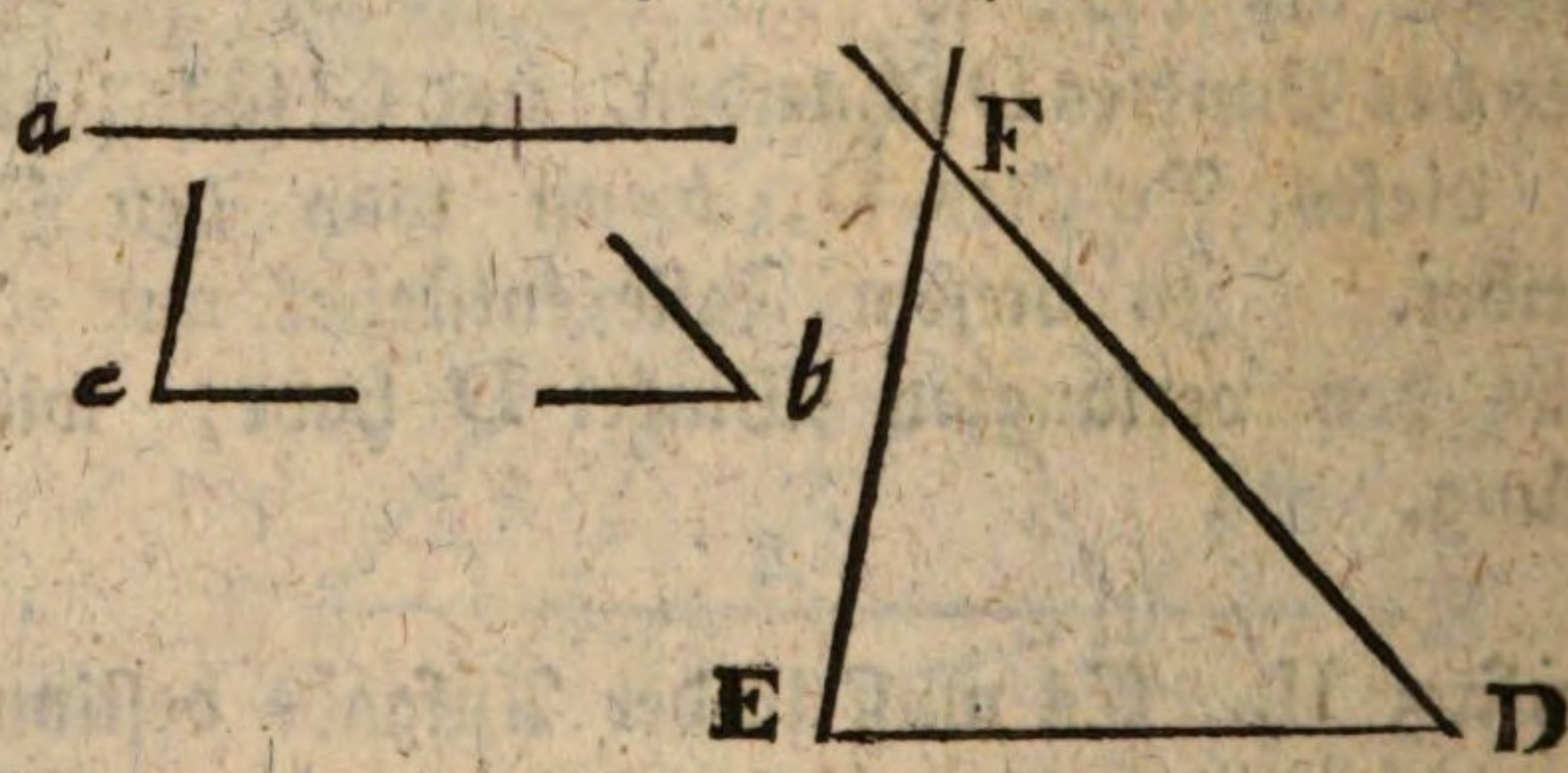


Zusatz III. Wenn die gegebenen Linien die Hypotenuse und ein Kathete eines rechtwinklichten Dreyeckes sind, so verstehet es sich von selbsten, daß der Gegenwinkel der Hypotenuse ein rechter ist. Es sey *a* der Kathete und *b* die Hypotenuse. Ziehe die unbestimmte PQ, und PR senkrecht auf ihr. Mache PR = *a*. Aus R mit dem Halbmesser *b* beschreibe einen Bogen der die PQ irgendwo in S schneiden wird. Ziehe RS. So ist RPS das verlangte rechtwinklichte Dreyeck.

§. 41.

Aufgabe.

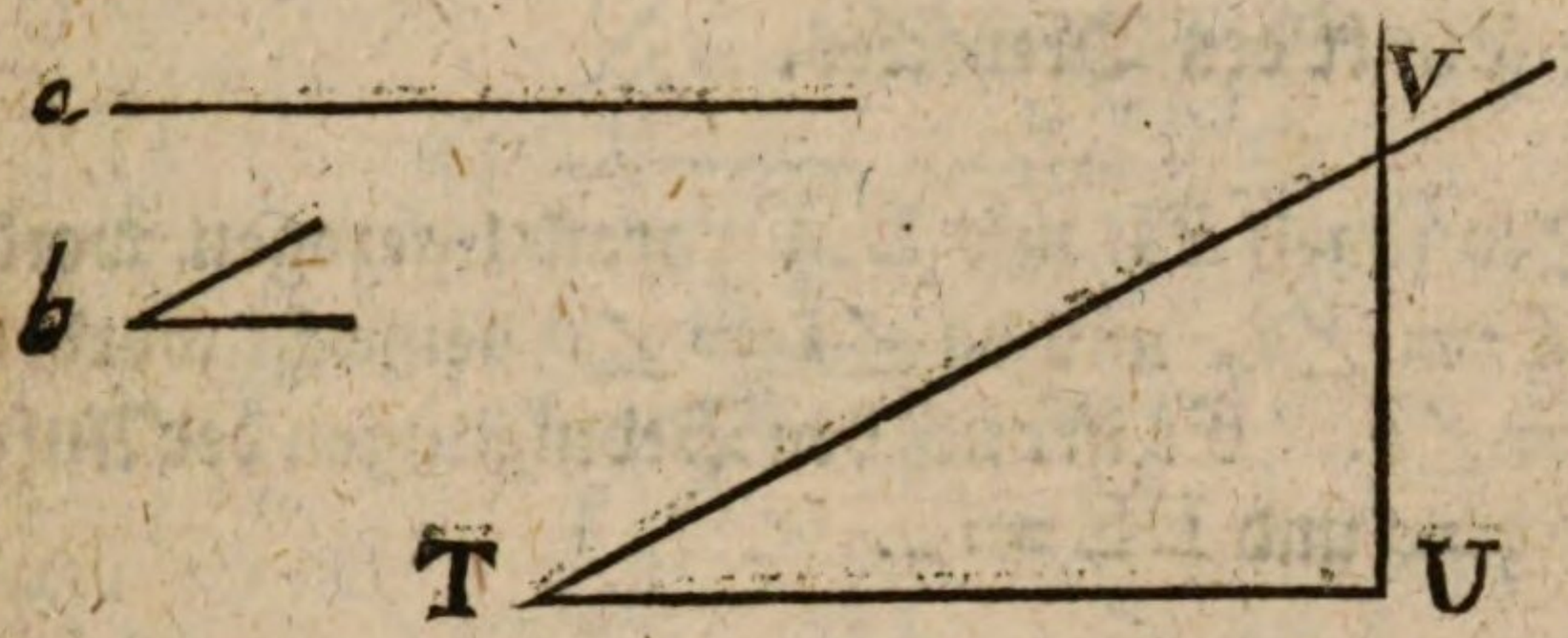
Aus einer gegebenen Linie und beyden anliegenden Winkeln, ein Dreyeck beschreiben.



Auflösung. Mache DE = der gegebenen *a*. An einem Ende der DE, lege den Winkel D = *b*, und am andern Ende E den Winkel E = *c*. Verlängere die Schenkel beyder Winkel bis sie sich irgendwo in F schneiden, so ist DFE das verlangte Dreyeck. Denn es ist DE = *a*, ∠D = *b*, ∠E = *e*.

Zusatz.

Zusatz. Ist die gegebene Linie der Kathete eines rechtwinklichten Dreyeckes, so braucht man nur einen anliegenden Winkel zu haben, da es sich von selbst versteht, daß der andere ein rechter ist. Z. E. es sey gegeben der

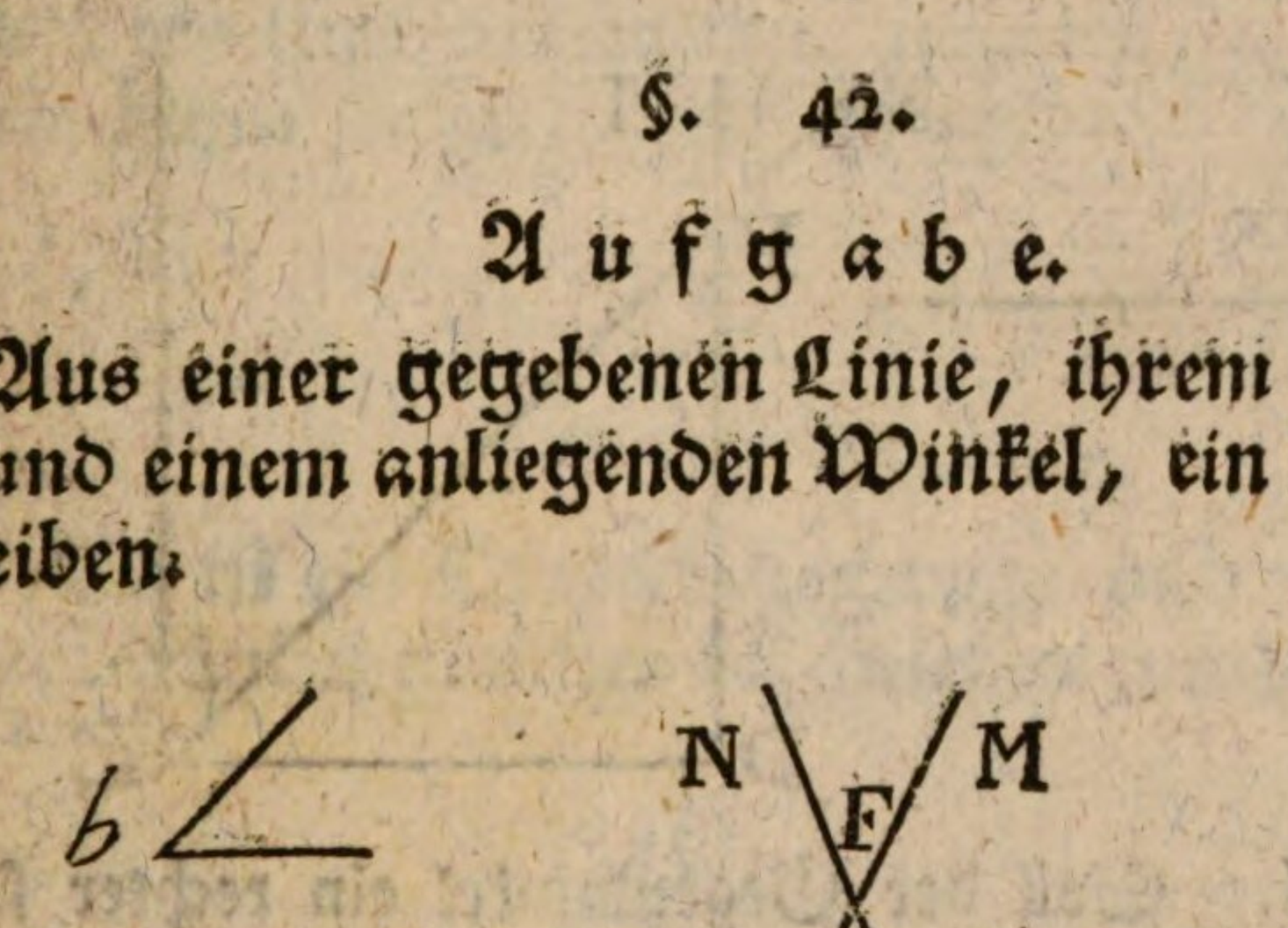


Kathete *a*, und der anliegende spitzige Winkel *b*, so mache TU = *a*. In T lege einen Winkel = *b*, und in U einen rechten Winkel oder eine senkrechte Linie. Wo sich beyde Schenkel in V schneiden, da ist der dritte Punkt des Dreyecks.

§. 42.

Aufgabe.

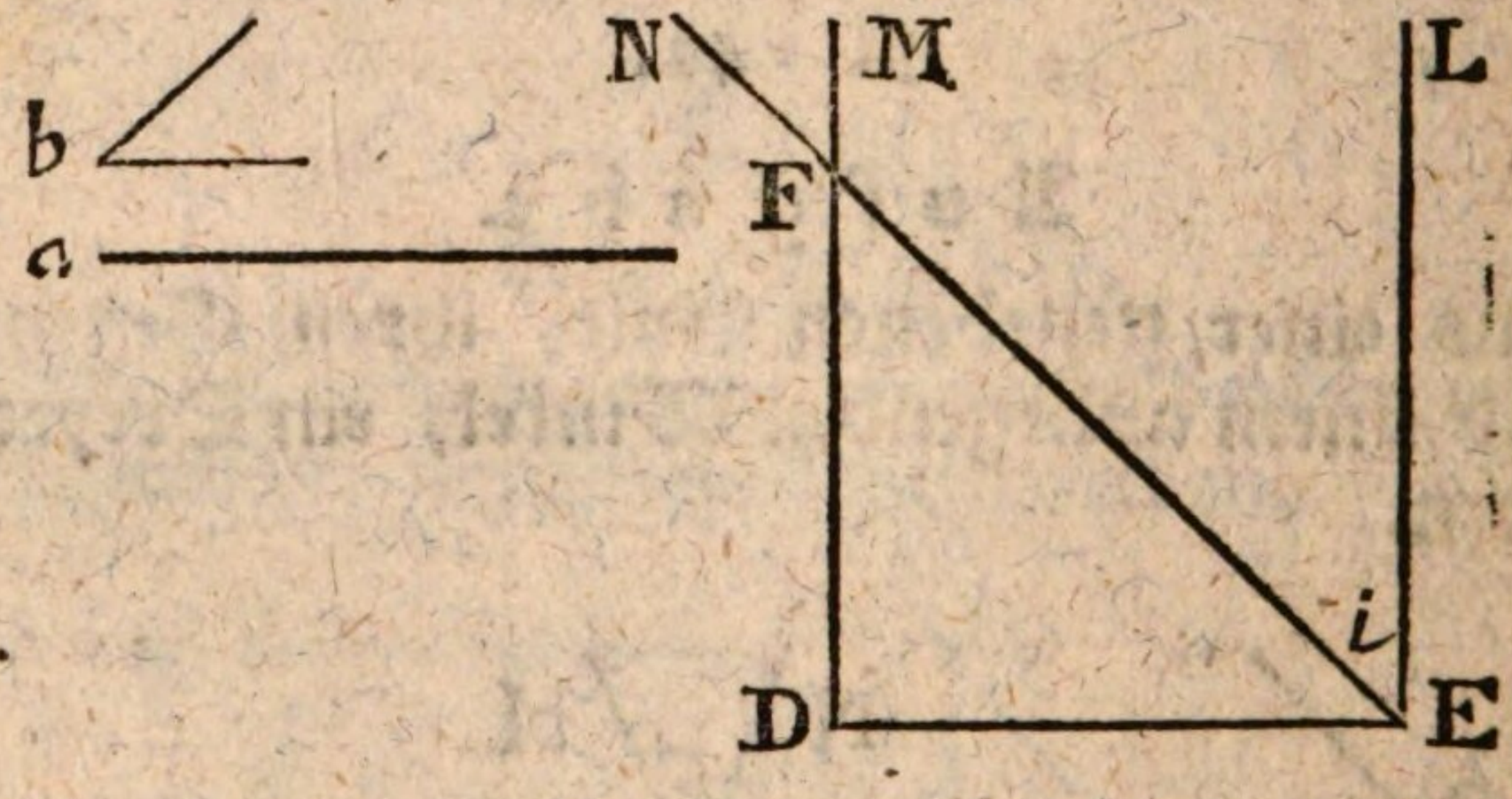
Aus einer gegebenen Linie, ihrem Gegenwinkel und einem anliegenden Winkel, ein Dreyeck beschreiben.



Auflösung. Es sey die gegebene Linie *a*, der Gegenwinkel *b* und der anliegende Winkel *c*. Mache DE = *a*. Mache in D einen Winkel *h* = *c*. Ziehe EL mit DM parallel. Auf EL lege in E den Winkel *i* = ∠*b*. In F, wo sich die Schenkel DM und EN schneiden, ist der drittte Punkt des Dreyeckes.

Denn weil EL mit DM parallel gezogen worden, so ist ∠*k* = ∠*i*, und da ∠*i* = ∠*b* gemacht worden, so ist ∠*k* = ∠*b*. Es ist auch den Bedingungen der Aufgabe gemäß *h* = *c* und DE = *a*.

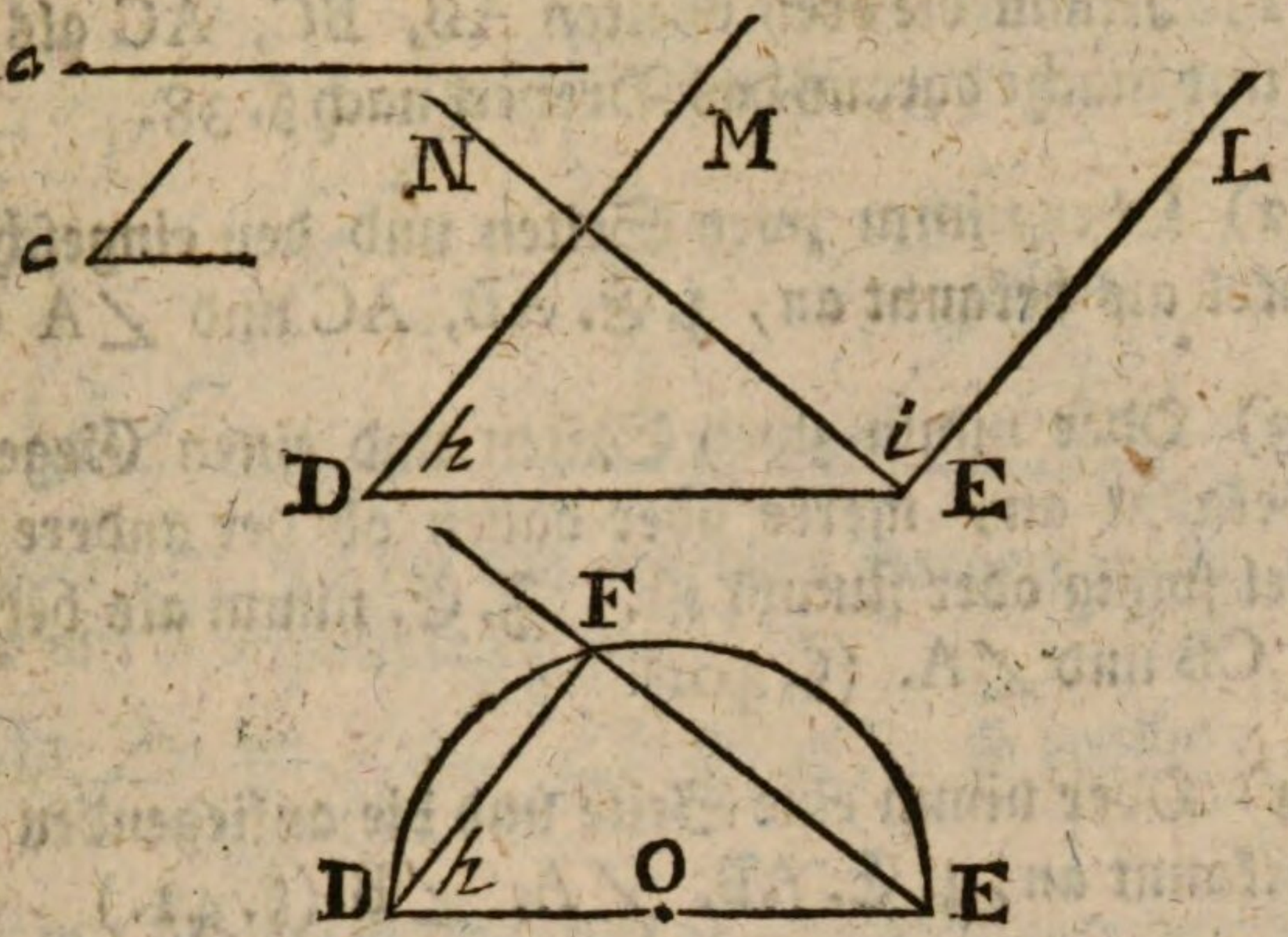
Zusatz I. Soll der anliegende Winkel ein rechter seyn, so werden die Linien DM und EL beyde senkrecht auf DE gestellet, ferner wird wie vorher gemacht ∠*i* = ∠*b*.



Zusatz II. Soll der Gegenwinkel ein rechter seyn, so braucht nur der anliegende Winkel bestimmt zu werden.

Es sey *a* die Hypotenuse, deren Gegenwinkel folglich ein rechter ist, und *c* der eine anliegende Winkel. Mache DE = *a*, ∠*h* = ∠*c*, EL mit DM parallel, einen rechten Winkel in *i*, so wird der Gegenwinkel der DE ebenfalls ein rechter.

Oder

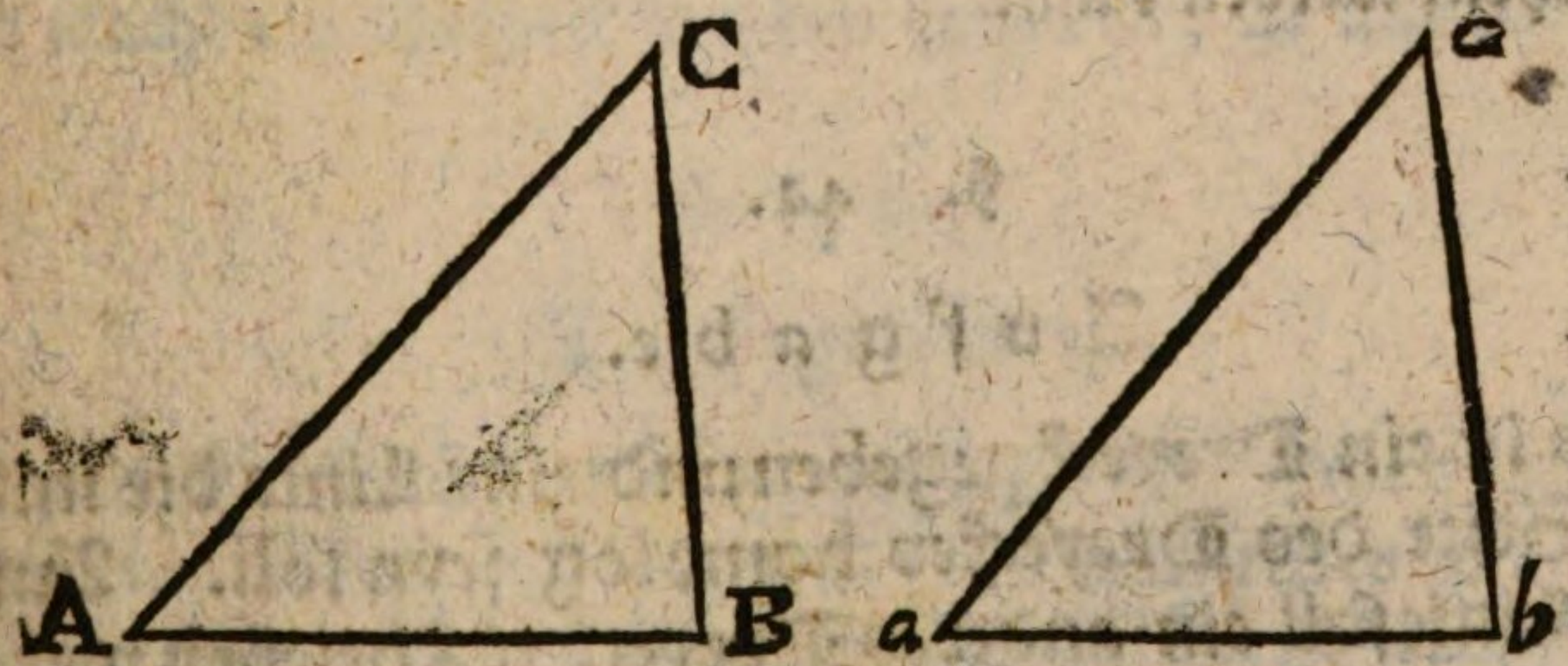


Oder anders. Mache DE = *a*. Halbire DE in O Aus O beschreibe über DE einen halben Zirkel. Mache ∠ *h* = ∠ *c*. Vom Punkt F, wo der Schenkel des Winkels *h* den Umkreis schneidet, ziehe FE, so ist ebenfalls in F ein rechter Winkel. (III. §. 33.)

§. 43.

Aufgabe.

Es ist ein Dreyeck gegeben, und es soll ein anderes ähnlichgleiches beschrieben werden.



Auflösung. Das gegebene Dreyeck sey ACB, so kann auf mancherley Art ein ähnlichgleiches Dreyeck *acb* gemacht werden.

1) Nimm

1) Nimm die drey Seiten AB, BC, AC als bekannt an, und mache daraus das Dreyeck nach §. 38.

2) Oder nimm zwey Seiten und den eingeschlossenen Winkel als bekannt an, z. E. AB, AC und ∠A (§. 39.)

3) Oder nimm zwey Seiten und einen Gegenwinkel als bekannt an, merke aber dabey ob der andere Gegenwinkel spitzig oder stumpf ist. Z. E. nimm als bekannt an AC, CB und ∠A. (§. 40.)

4) Oder nimm eine Seite und die anliegenden Winkel als bekannt an, z. E. AB, ∠A, ∠B (§. 41.)

5) Oder nimm eine Seite, den Gegenwinkel und einen anliegenden Winkel als bekannt an, z. E. AB, ∠C, und ∠A. (§. 42.)

Mechanische Auflösung.

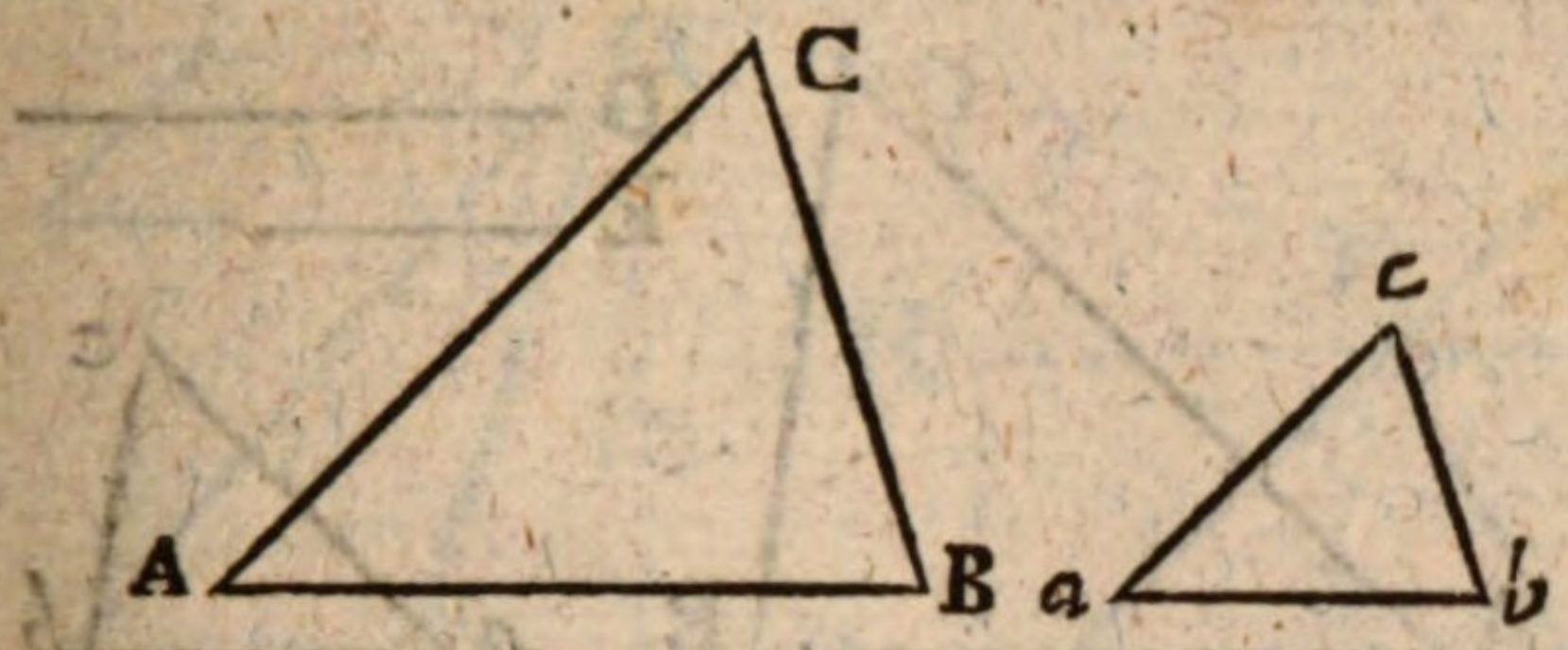
Man hat Zirkel mit drey Spitzen, anstatt zwey. Stellet man die drey Spitzen auf den drey Punkteu eines Dreyeckes, so kann man ohne weitere Umstände ein ähnlichgleiches Dreyeck machen. Ein solches Instrument dienet, um jede Figur ohne Mühe abzuschreiben, da jede Figur, wie wir am gehörigen Orte sehen werden, in lauter Dreyecke getheilt werden kann.

§. 44.

Aufgabe.

Es ist ein Dreyeck gegeben und eine Linie die mit einer Seite des Dreyeckes homolog seyn soll. Auf dieser Linie soll ein anderes Dreyeck beschrieben werden, das dem gegebenen ähnlich sey.

Auflö-



Auflösung. Es sey das gegebene Dreyeck ACB, und es soll *ab* mit AB homolog seyn.

Mache $\angle a = \angle A$, $\angle b = \angle B$, so entstehet das Dreyeck *acb* $\backsim \triangle ACB$.

Oder mit der gegebenen Linie *ab*, dem anliegenden Winkel A (= *a*) und dem Gegenwinkel C (= *c*) beschreibe das Dreyeck *acb*.

Oder, mache

AB, *ab* :: AC, *ac*

und nachdem *ac* gefunden, so mache ein Dreyeck aus *ab*, *ac* und den Winkel A (= *a*) oder aus *ab*, *ac* und dem Winkel B (= *b*).

Oder suche noch die dritte Seite *bc*, vermittelst der Proporzion:

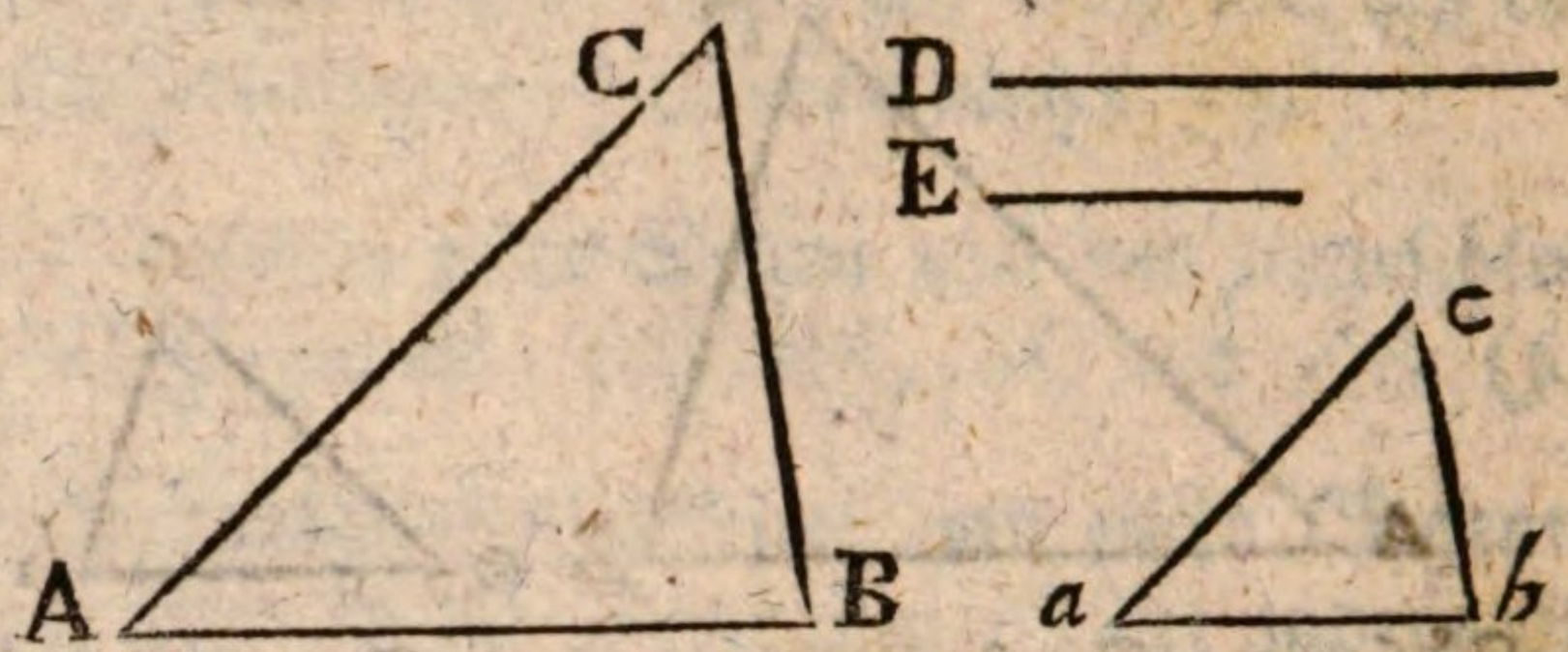
AB, *ab* :: BC, *bc*

und mache ein Dreyeck aus den Linien *ab*, *ac* und *bc*.

§. 45.

Aufgabe.

Es ist ein Dreyeck gegeben, und zwey gerade Linien. Man soll ein anderes ähnliches Dreyeck beschreiben, dessen Seiten sich zu den Seiten des gegebenen Dreyeckes verhalten wie die zweyte Linie zur ersten.



Auflösung. Es sey gegeben das Dreyeck ACB, es soll ein ähnliches *acb* gestellet werden, so daß die Seiten des gegebenen sich zu den Seiten des verlangten verhalten wie D zu E.

Suche *ab*, *ac*, *bc* vermittelst dieser Proporzionen. (III. §. 37.)

D, E :: AB, *ab*

D, E :: AC, *ac*

D, E :: BC, *bc*

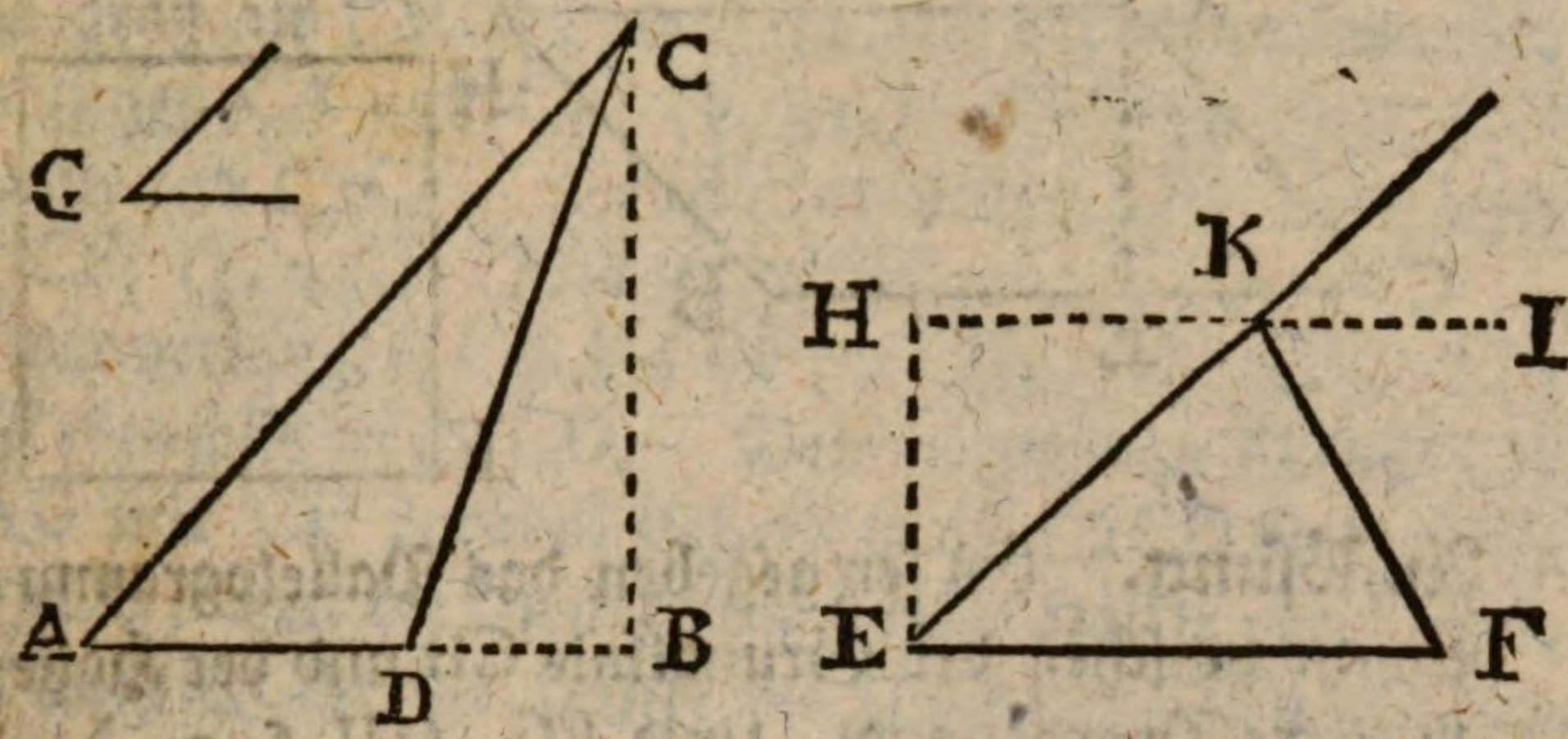
und beschreibe das Dreyeck *acb* vermittelst der drey gefundenen Linien.

Oder suche nur eine Linie *ab*. Vermittelst derselben und der bekannten Winkei A und B, oder A und C beschreibe das Dreyeck *acb*. (§. 44.)

§. 46.

Aufgabe.

Es ist gegeben ein Dreyeck, eine gerade Linie und ein Winkel. Es soll, auf der geraden Grundlinie ein Dreyeck gestellt werden, das dem gegebenen gleich sey, und an der Grundlinie den gegebenen Winkel habe.



Auflösung. Auf der gegebenen EF stelle ∠E = ∠G. Suche die vierte Proporzional-Linie zu EF, AD, und der Höhe CB.

In E errichte senkrecht EH der gefundenen vierten Proporzional-Linie gleich.

Ziehe HI mit EF parallel. So ist der Punkt K, wo diese Parallele von dem Schenkel des Winkels E geschnitten wird, der dritte Punkt des Dreyecks.

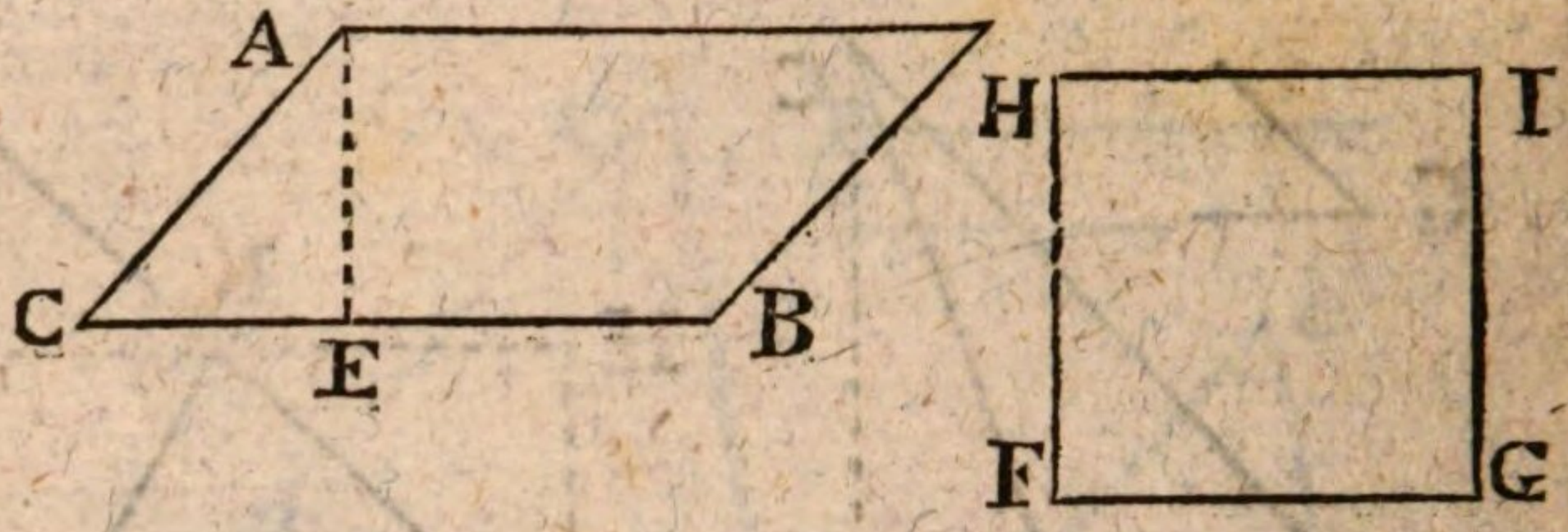
Ziehe demnach KF, so ist △EKF = △ACD.

Denn die Höhen CB, HE verhalten sich umgekehrt wie die Grundlinien AD, EF. (§. 32.)

§. 47.

Aufgabe.

Es ist ein Parallelogramm gegeben, und es soll ein Quadrat gemacht werden, das ihm gleich sey.

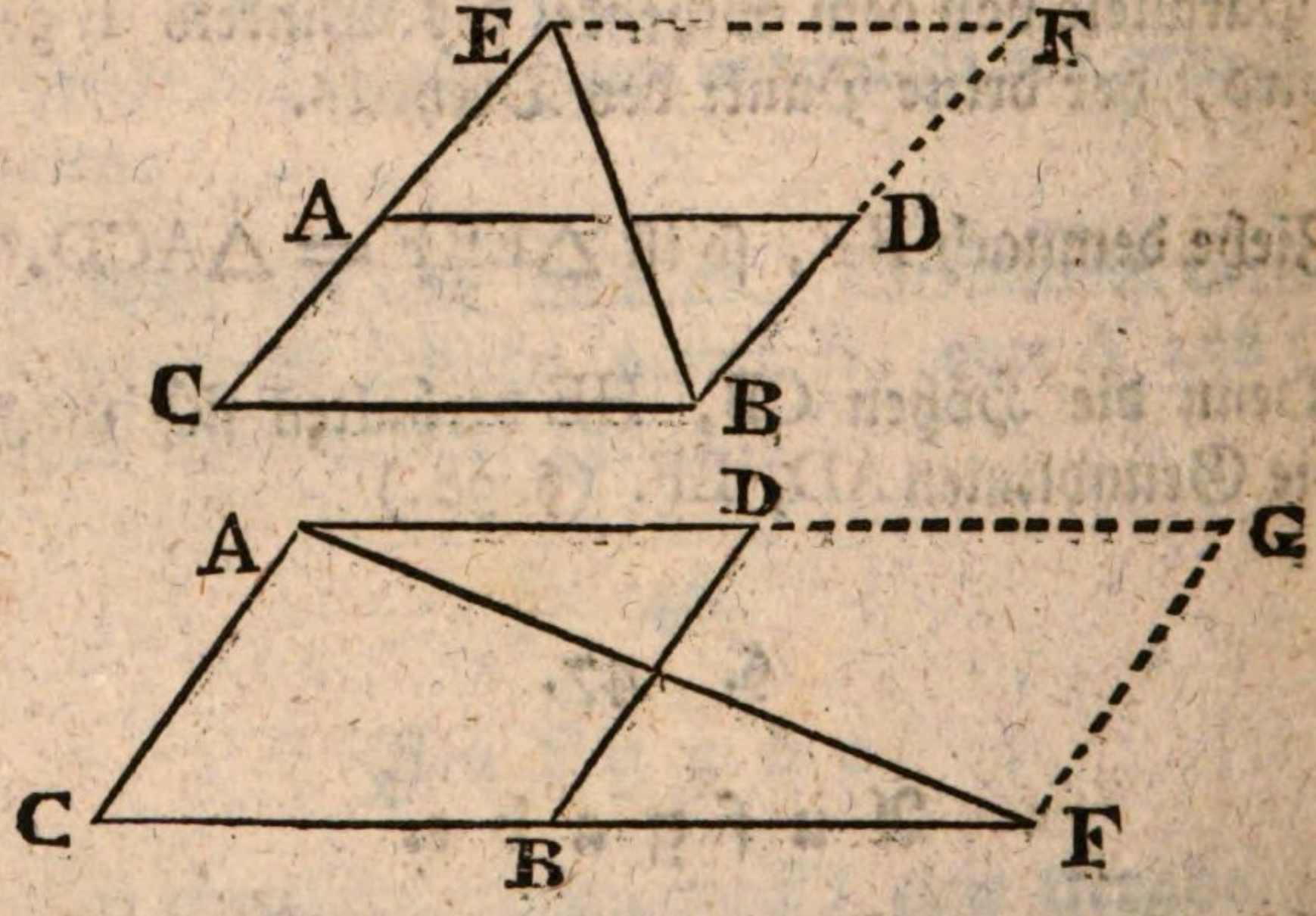


Auflösung. Es sey gegeben das Pallelogramm AB. Suche zwischen der Grundlinie CB und der Höhe AE die mittlere Proporzional-Linie FG (III. §. 39.) Auf FG errichte senkrecht die FH = FG. Ziehe HI mit FG und IG mit FH parallel, so ist das Quadrat FI dem Parallelogramm AB gleich. (§. 33. Zus. I.)

§. 48.

Aufgabe.

Es ist ein Parallelogramm gegeben. Es soll ein Dreyeck gemacht werden das ihm gleich sey.



Abflösung. Es sey gegeben das Parallelogramm ADBC.

Verlängere CA bis AE = CA. Ziehe EB, so ist △CEB = □CD. Denn wenn man EF mit CB und BF mit CE parallel ziehet, so ist das Parallelogramm CF dop-

pelt

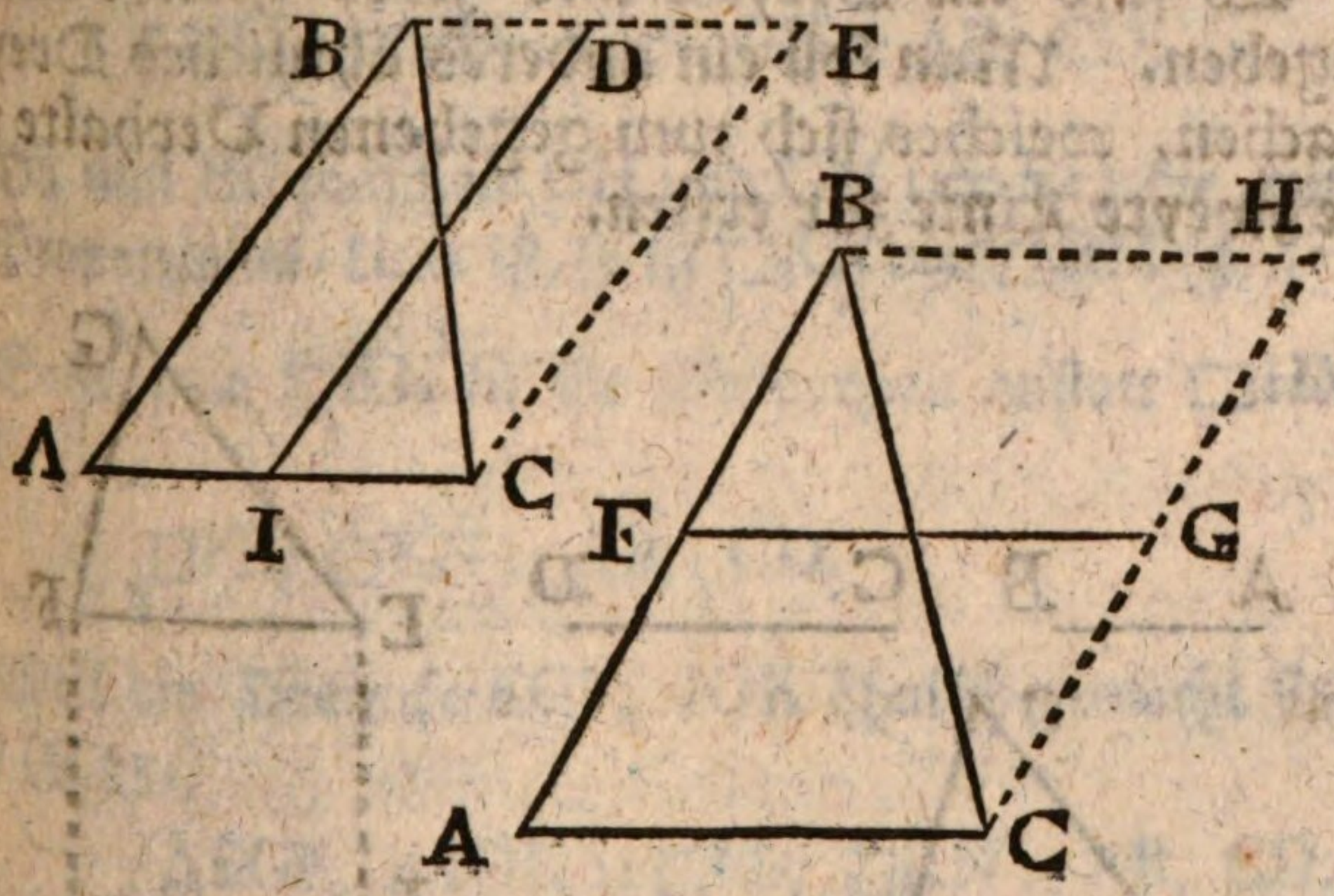
pelt so groß als □CD, weil sie sich verhalten wie ihre Grundlinien CA und CE. (§. 31.) Folglich ist □CD die Hälfte von □CF. Es ist aber auch △EBC die Hälfte des □CF. (§. 24.) Also ist △EBC = □CD.

Oder verlängere CB bis BF = CB, ziehe AF, so ist △ACF ebenfalls = □CD. Denn wenn man FG mit CA und AG mit CF parallel ziehet, so ist □CD die Hälfte von □CG, weil die Grundlinie CB die Hälfte von CF ist. Es ist auch △CAF die Hälfte des □CG. Diese Hälften sind gleich. Also ist □CD = △CAF.

§. 49.

Aufgabe.

Es ist ein Dreyeck gegeben. Man soll ein Parallelogramm machen das ihm gleich sey.



Auflösung. Es sey gegeben das Dreyeck ABC. Halbire die Grundlinie AC in I. Ziehe ID mit AB, und BD mit AI parallel, so ist □AD = △ABC. Denn, ziehe noch CE mit AB parallel, und verlängere BD bis in E, so ist □AD = ½□AE, und △ABC = ½□AE. (§. 24.) Folglich ist □AD = △ABC.

Oder halbire die andere Seite AB in F, ziehe FG mit AC und CG mit AF parallel, so ist ebenfalls □AG = △ABC. Denn, wenn man noch BH und GH ziehet, so ist □AG = ½□AH, (weil AF = ½AB), desgleichen ist △ABC = ½□AH. Deswegen ist △ABC = □AG.

§. 50.

Aufgabe.

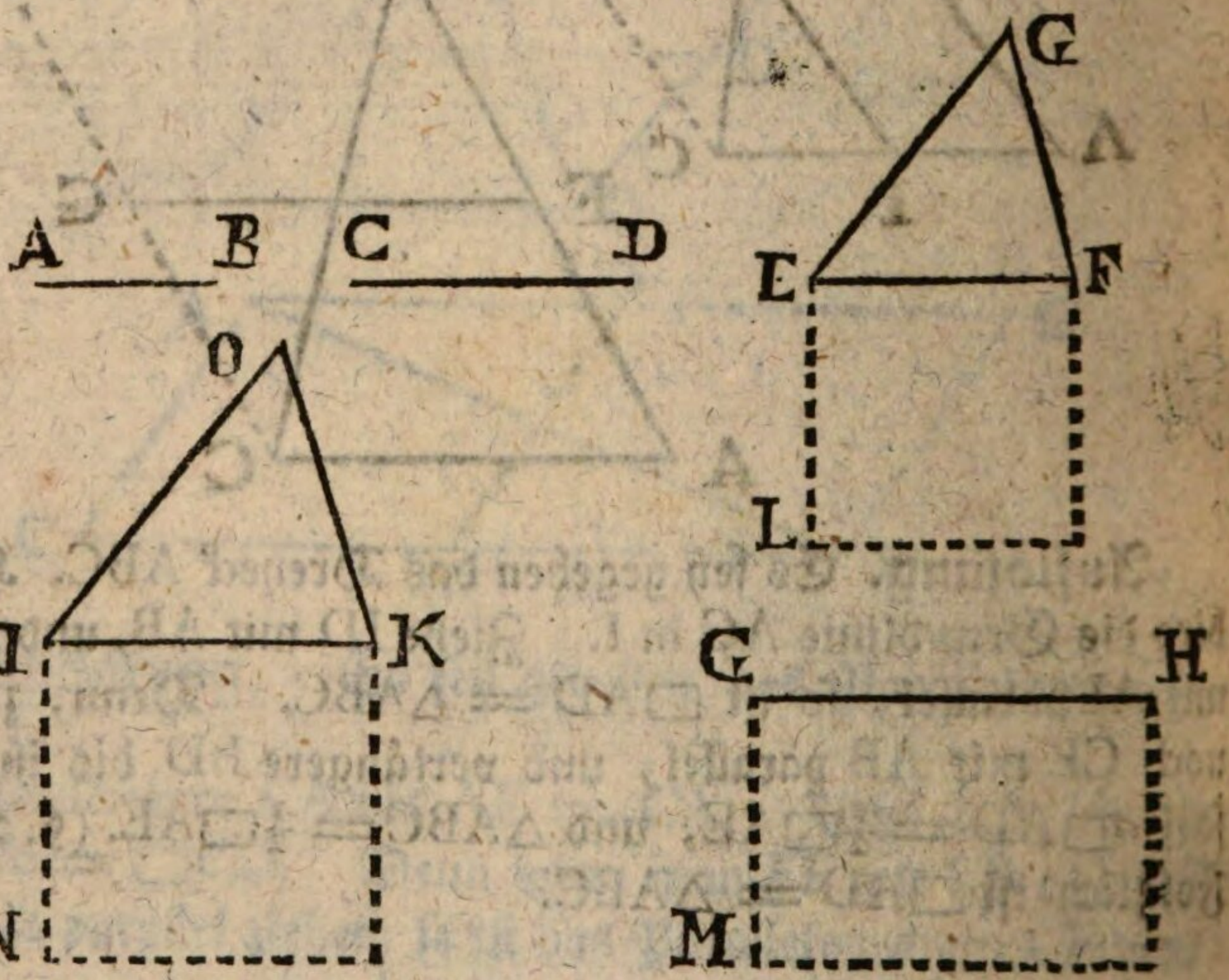
Es ist ein Dreyeck gegeben. Man soll ein Quadrat machen das ihm gleich sey.

Auflösung. Verwandle das Dreyeck erstlich in ein Parallelogramm (§. 49.) und hernach das Parallelogramm in ein Quadrat. (§. 47.)

§. 51.

Aufgabe.

Es sind ein Dreyeck und zwey gerade Linien gegeben. Man soll ein anderes ähnliches Dreyeck machen, welches sich zum gegebenen Verhalte wie die zweyte Linie zur ersten.



Auflö-

Auflösung. Es sey gegeben das Dreyeck EGF. Man verlanget ein anderes ähnliches, so daß sich verhalte △EGF zum verlangten Dreyecke wie AB zu CD.

Mache AB, CD :: EF, GH.

Zwischen EF und GH suche die mittlere Proporzional-Linie IK. (III. §. 39.)

Beschreibe über IK ein Dreyeck IOK, das dem △EGF ähnlich sey, so ist AB, CD :: △EGF, △IOK.

Zum Beweise stelle man sich auf EF das Quadrat FL vor, auf GH das Parallelogramm HM aus GH und GM (= EL = EF), auf IK das Quadrat KN. So haben □LF und □HM gleiche Höhen EL, GM, folglich ist (§. 31.)

□FL, □HM :: EF, GH :: AB, CD.

Da nun IK zwischen GH und GM (= EF) die mittlere Proporzional-Linie ist, so ist □KN = □HM (§. 47.)

Setzt man □KN in die Proporzion anstatt □HM, so ist

□FL, □KN :: AB. CD.

Weil die Dreyecke EGF, IOK ähnlich gemacht sind, so ist (§. 35.)

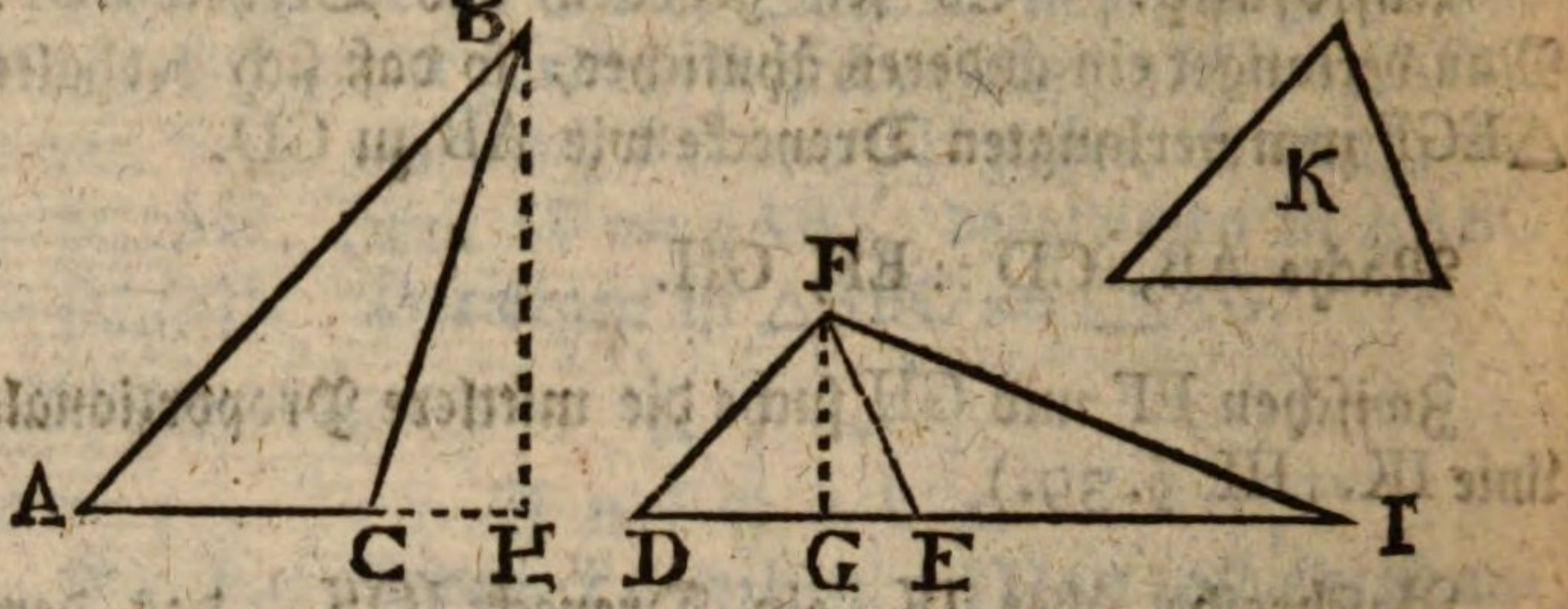
△EGF, △IOK :: □FL, □KN :: AB, CD.

§. 52.

Aufgabe.

Es sind zwey Dreyecke gegeben. Es wird ein drittes verlangt, was dem einen gleich und dem andern ähnlich sey.

Gesetzt



Gesetzt man verlanget ein Dreyeck, das dem ABC gleich, und dem DFE ähnlich sey.

Suche die vierte Proporzionallinie in dieser Proporzion (III. §. 37.)

FG, BH, :: AC, EI

Mache ein Dreyeck EFI, welches EI zur Grundlinie und FG zur Höhe habe, so ist △EFI = △ABC, da die Grundlinien im umgekehrten Verhältnisse der Höhen stehen. (§. 32).

Nun verhält sich

△DFE, △EFI :: DE :: EI

folglich auch △DFE, △ABC :: DE, EI.

Mache nun ein dem DFE ähnliches Dreyeck K, so daß DE, EI :: △DFE, △K. (§. 51.) Also ist

△DFE, △ABC :: △DFE, △K

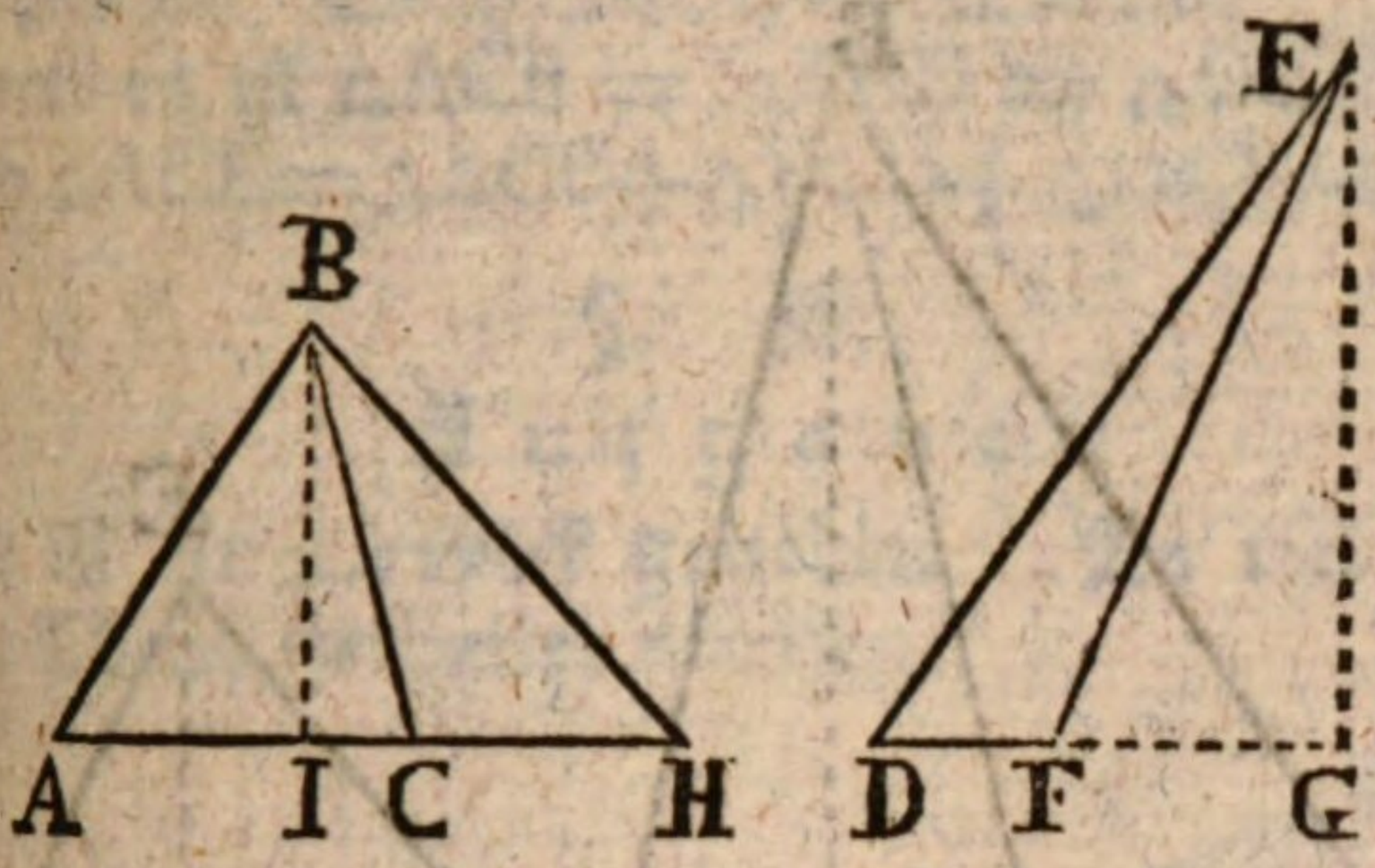
folglich △ABC = △K.

§. 53.

Aufgabe.

Es sind zwey Dreyecke gegeben. Das eine soll zum andern addirt oder hinzugethan werden.

Auflö=



Auflösung. Zum Dreyeck ABC soll das Dreyeck DEF hinzugethan werden.

Sage

BI, EG :: DF, CH.

Da nun CH gefunden, so seße CH an die Grundlinie AC an, und ziehe BH.

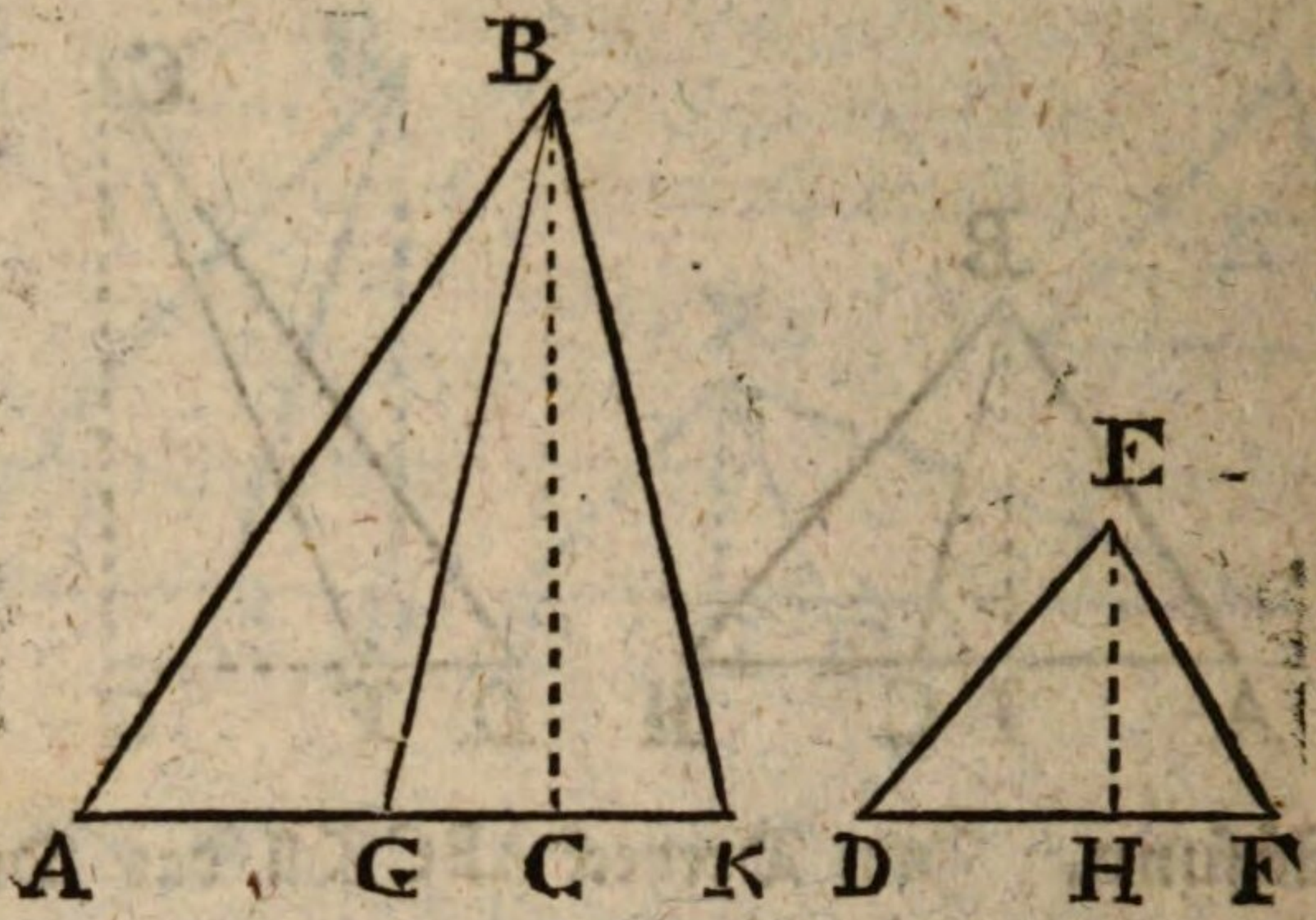
So ist $\triangle CBH = \triangle DEF$ (§. 32.)

Folglich ist $\triangle ABH = \triangle ABC + \triangle DEF$.

§. 54.

Aufgabe.

Es sind zwey Dreyecke gegeben. Das kleinere soll vom größeren abgezogen werden.



Auflösung. Vom Dreyeck ABK soll das Dreyeck DEF abgenommen werden. Sage

BC, EH :: DF, KG,

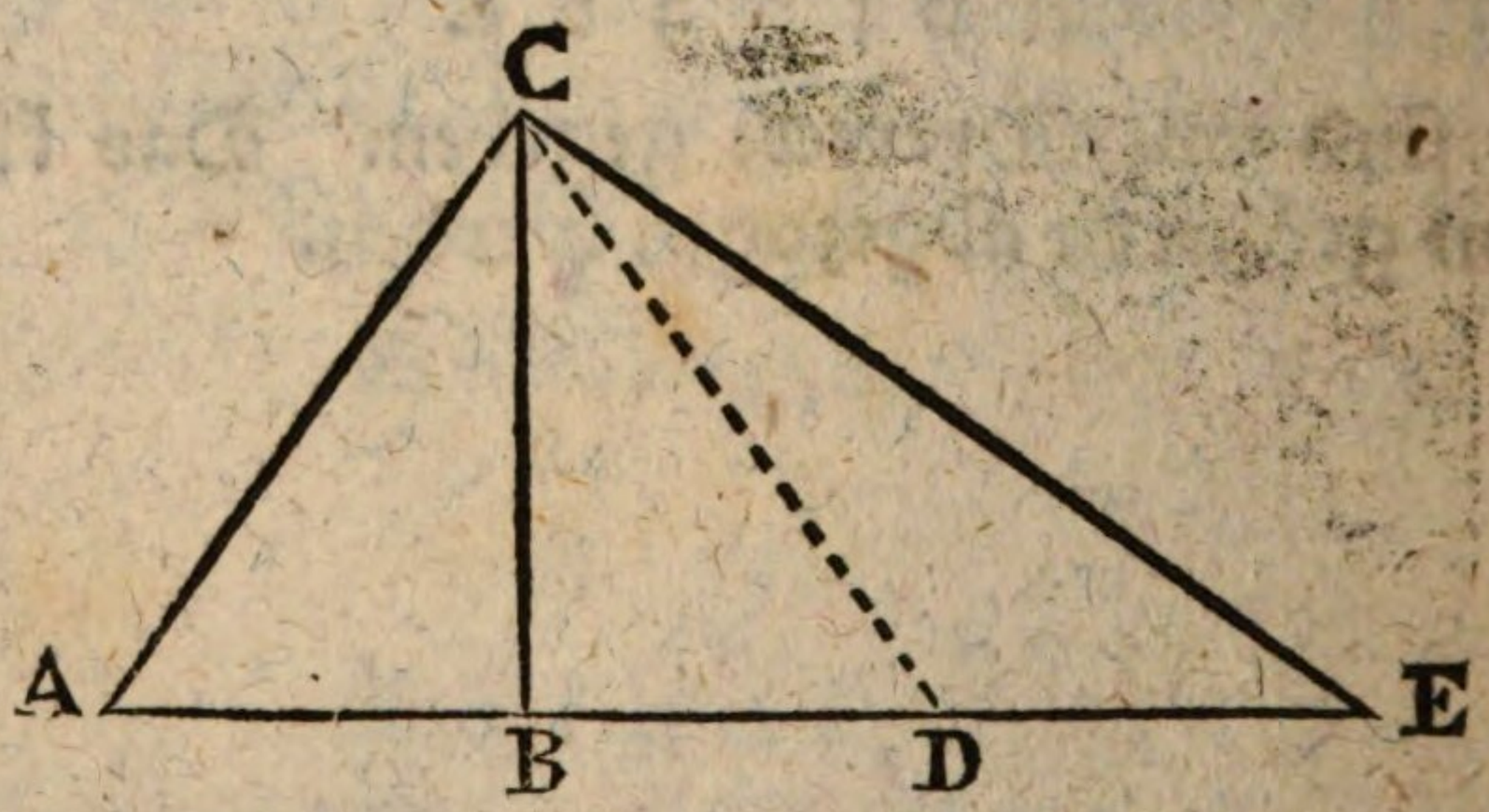
und nimm KG von der Grundlinie AK ab. Ziehe BG. So ist △G*B*K = △DEF. (§. 32.) Folglich

△ABG = △ABK — △GBK = △ABK — △DEF

§. 55.

Aufgabe.

Es ist ein Dreyeck gegeben. Es soll vervielfältigt, das ist, etnigemal größer gemacht werden.



Auflösung. Das Dreyeck ACB, soll dreymal größer gemacht werden. Mache die Grundlinie AB dreymal größer, so daß A*B* = AB, BD = AB, DE = AB.

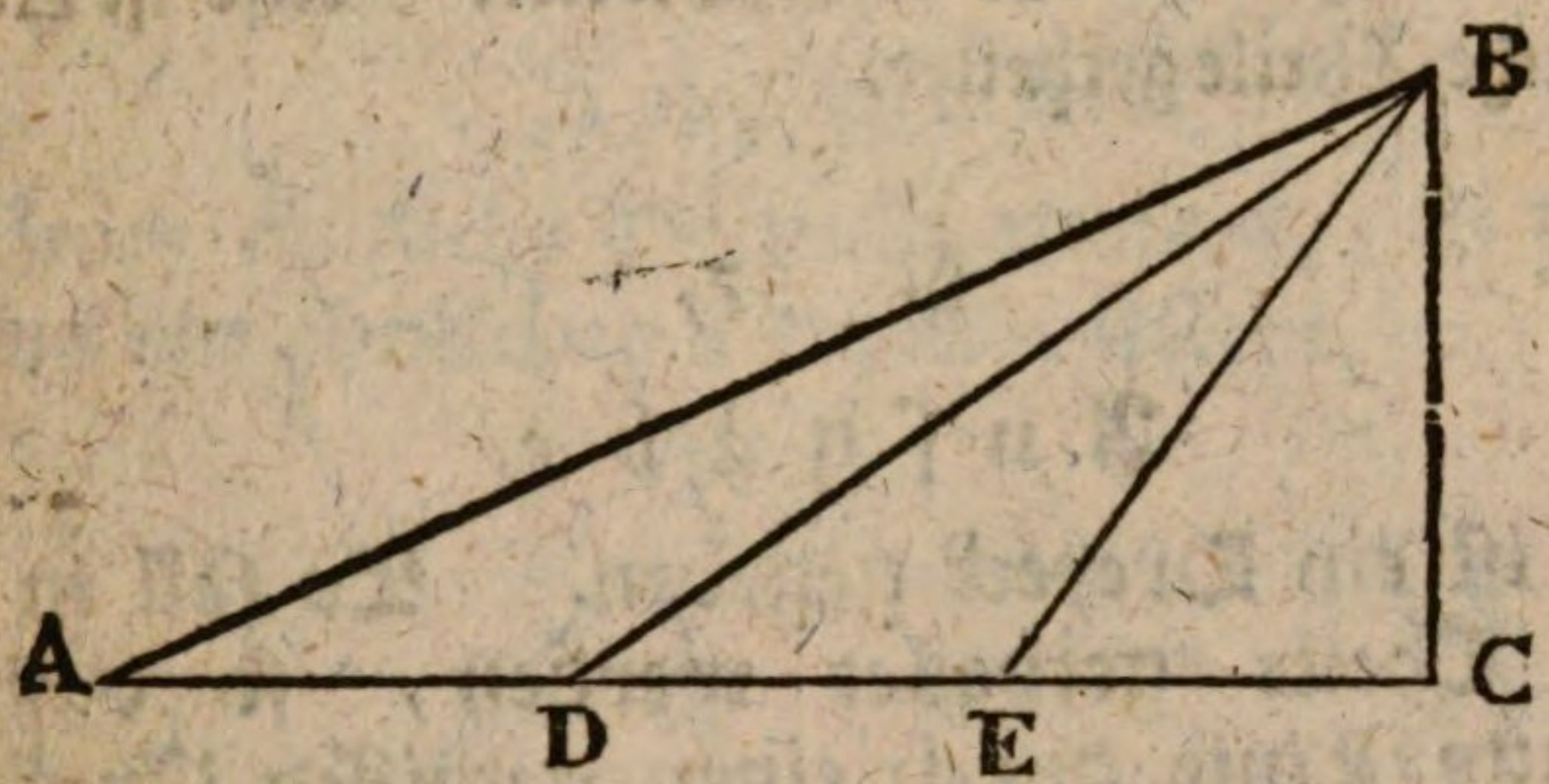
Ziehe

Ziehe CE. So ist △ACE = 3△ACB.
Denn es ist △ACB = △BCD = △DCE. (§. 26.)
Folglich △ACE=△ACB+△BCD+△DCE=3 △ACB.

§. 56.

Aufgabe.

Es ist ein Dreyeck gegeben Es soll in einige gleiche Theile getheilet werden.



Auflösung. Das Dreyeck ABC soll in 3 gleiche Theile getheilet werden. Theile die Grundlinie AC in 3 gleiche Theile AD, DE, EC.

Ziehe DB, EB. So ist △ABD = △DBE = △EBC (§. 26.). Folglich ist jedes der kleineren Dreyecke der dritte Theil des gegebenen.

Anders. Es soll das Dreyeck MNO in vier gleiche Theile getheilet werden.

Nimm

Nimm MP = $\frac{1}{4}$ MO und ziehe PN, so ist △MPN = $\frac{1}{4}$ △MON, da man MP, MO als die Grundlinien betrachtet. Folglich muß △PNO noch 3 Theile enthalten.

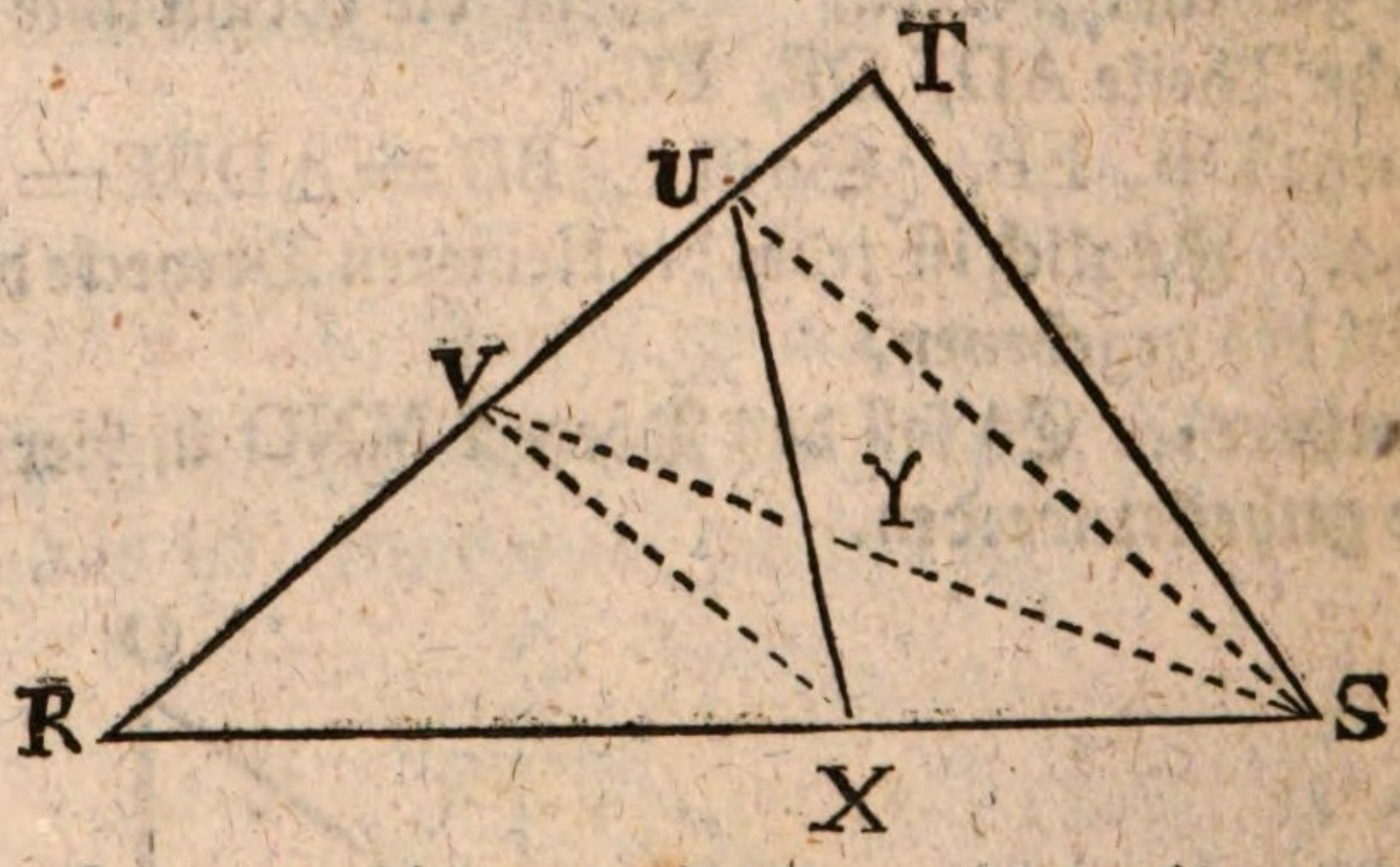
Nimm NQ = $\frac{1}{3}$ NO nnd ziehe PQ, so ist △NPQ der dritte Theil von △NPO oder $\frac{1}{4}$ △MON. Nun muß △PQO noch 2 Theile enthalten. Nimm daher PR = $\frac{1}{2}$ PO und ziehe RQ, so ist △PQR = $\frac{1}{2}$ △PQO = $\frac{1}{4}$ △MON.

Und △RQO ist das letzte Viertel. Also ist △MON in 4 gleiche Theile getheilet.

§. 57.

Aufgabe.

Es ist ein Dreyeck gegeben. Es soll in zwey gleiche Theile getheilet werden, so daß die Theilungs-Linie durch einen gewissen Punkt des Umfanges gehe.



Auflösung. Es soll △RST durch den Punkt U halbiret werden.

Ziehe US.

Nimm RV = $\frac{1}{2}$ RT, und ziehe VX parallel mit US.

Ziehe UX, so ist dieses die Theilungs-Linie.

Denn es ist △VSX = △VUX (§. 26.)

oder △VYX + △XYS = △VYX + △VYU

daher △XYS = ... △VYU

Es

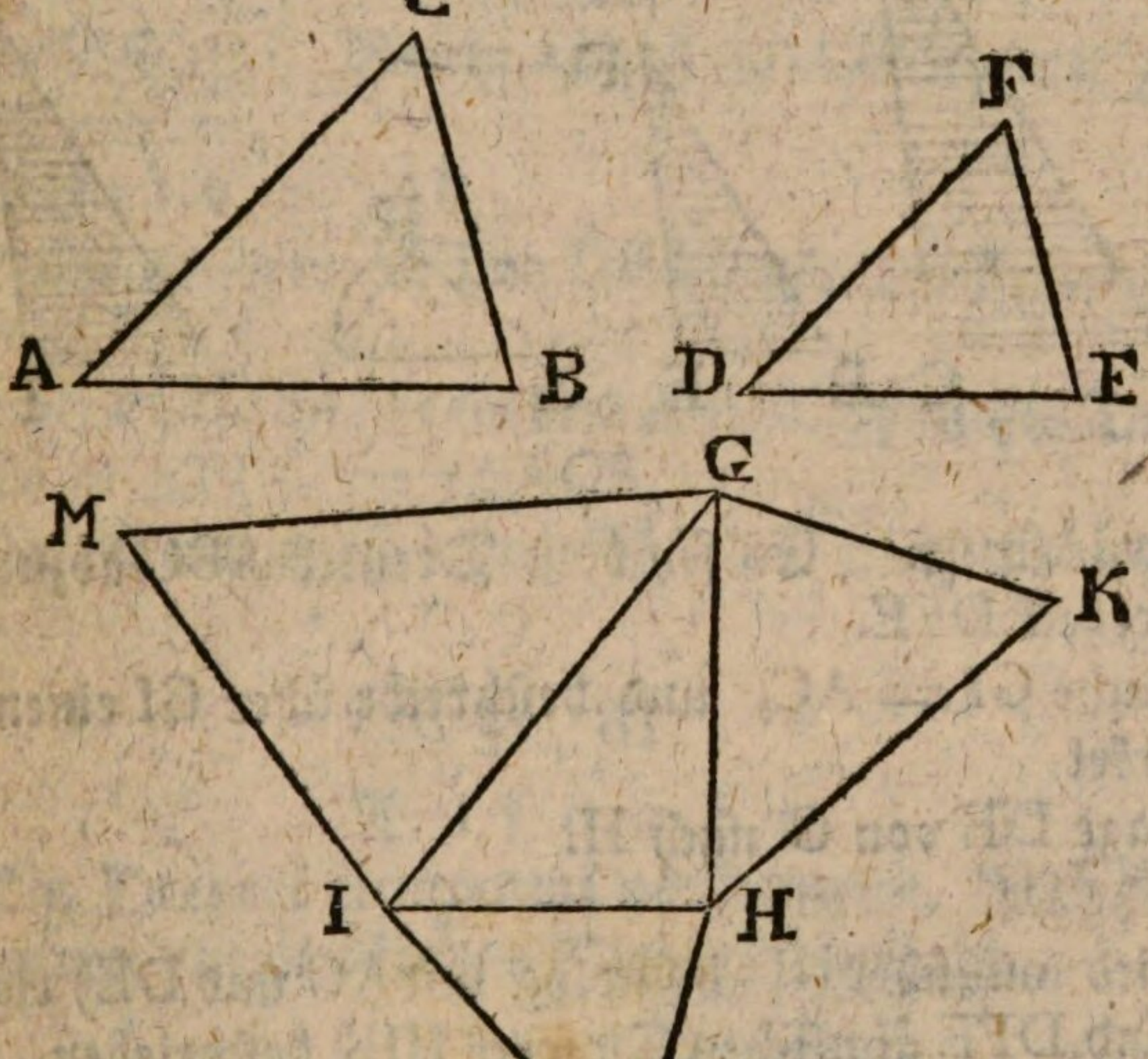
Es ist ferner $\triangle SVR = \frac{1}{2} \triangle STR$. Von $\triangle SVR$ nimm einerseits ab $\triangle XYS$, und setze anderseits zu $\triangle VYU$, welcher dem $\triangle XYS$ gleich ist; so ist $\triangle XUR = \triangle SVR = \frac{1}{2} \triangle STR$.

Zusatz. Hätte man genommen $RV = \frac{1}{3} RT$, so hätte man den dritten Theil des Dreyeckes abschneiden können, und so auch den vierten, fünften Theil, u. s. f.

§. 58.

Aufgabe.

Zwey ähnliche Dreyecke addiren, so daß wiederum ein ähnliches Dreyeck entstehe.



Auflösung. Es seyen gegeben die Dreyecke ACB und DFE.

Mache den rechten Winkel GHI und $GH = AB$, $HI = DE$, Ziehe GI.

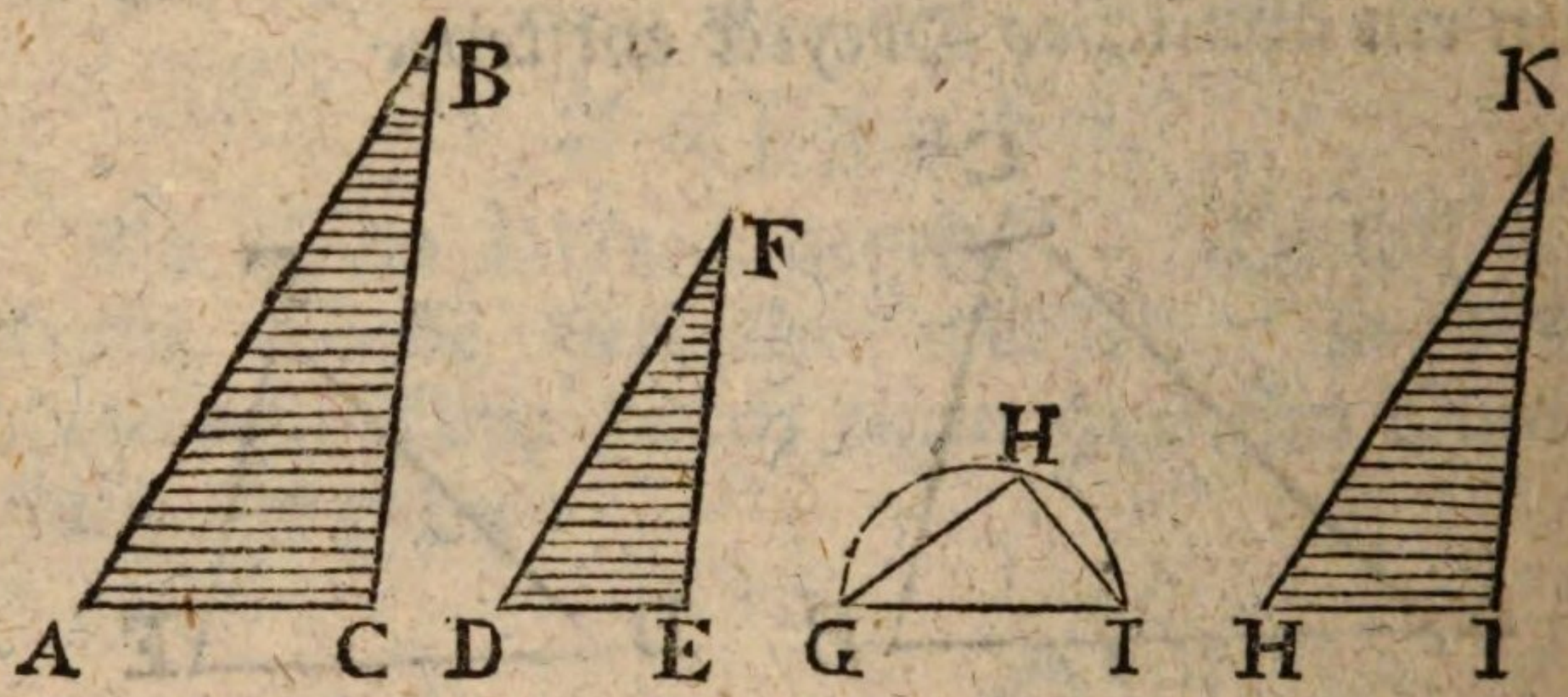
Beschreibe auf der Grundlinie GI ein Dreyeck GMI ∽ △ACB ∽ △DFE.

So ist △GMI = △GKH + △HLI = △ACB + △DFE (§. 37.)

§. 59.

Aufgabe.

Von einem Dreyecke ein ähnliches kleineres abziehen, so daß ein ähnliches Dreyeck übrig bleibe.



Auflösung. Es sey vom Dreyeck ABC abzuziehen das Dreyeck DFE.

Mache GI = AC, und beschreibe über GI einen halben Zirkel

Trage DE von G nach H.

Ziehe HI.

Wird nun über HI (homolog mit AC und DE) ein mit ABC und DFE ähnliches Dreyeck HIK beschrieben, so ist

$$\triangle HIK = \triangle ABC - \triangle DFE.$$

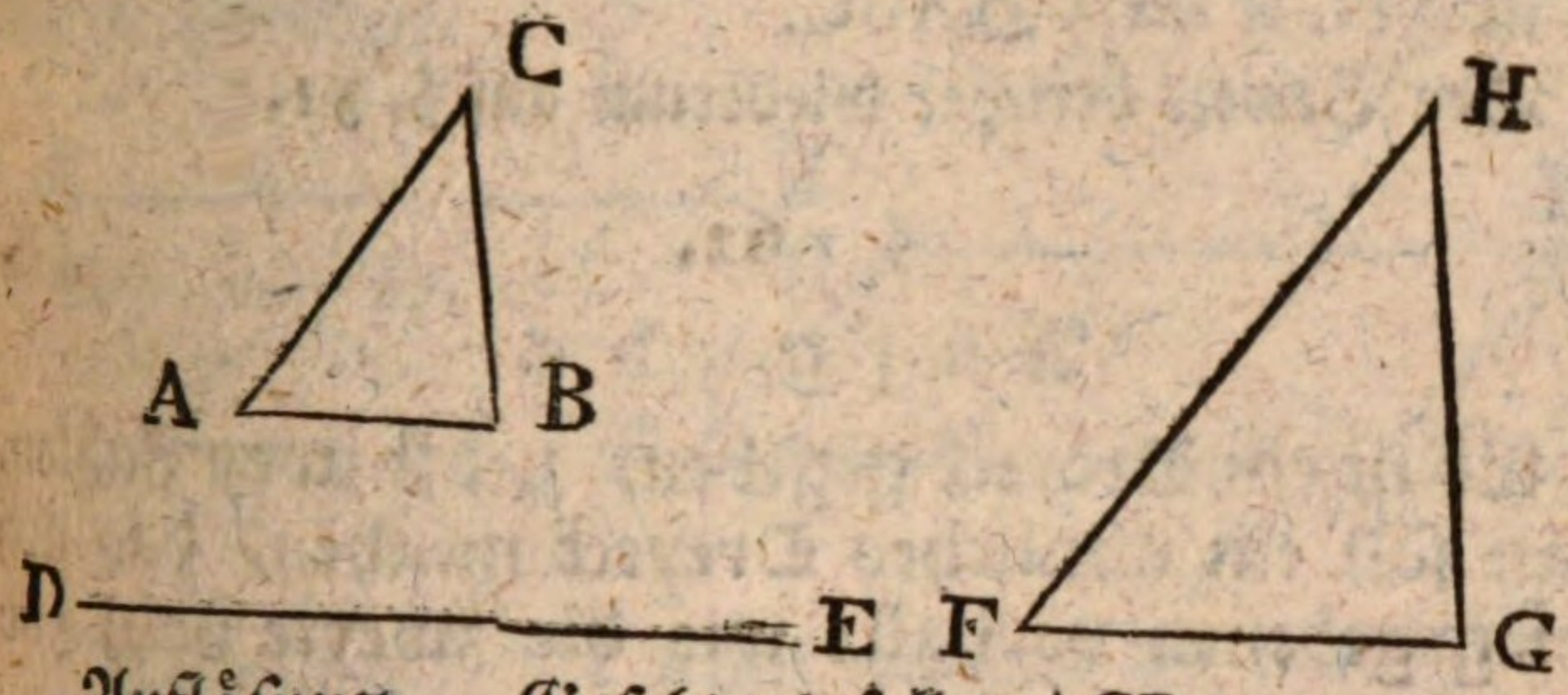
Denn es ist GHI ein rechtwinkliches Dreyeck (III. §. 33). Folglich ist das Dreyeck, was GI zur Grundlinie hat, so groß als beyde ähnliche Dreyecke über GH und HI. Oder das Dreyeck über HI ist gleich dem Dreyecke über GI weniger dem Dreyecke über GH.(§. 37.)

§. 60.

§. 60.

Aufgabe.

Ein Dreyeck einigemal vergrößern, so daß wiederum ein ähnliches Dreyeck entstehe.



Auflösung. Gesetzt es soll △ACB dreymal größer gemacht werden.

Mache DE = 3AB.

Suche zwischen AB und DE die mittlere Proporzional-linie FG. (III. §. 39.)

Ueber FG beschreibe ein dem △ ABC ähnliches Dreyeck.

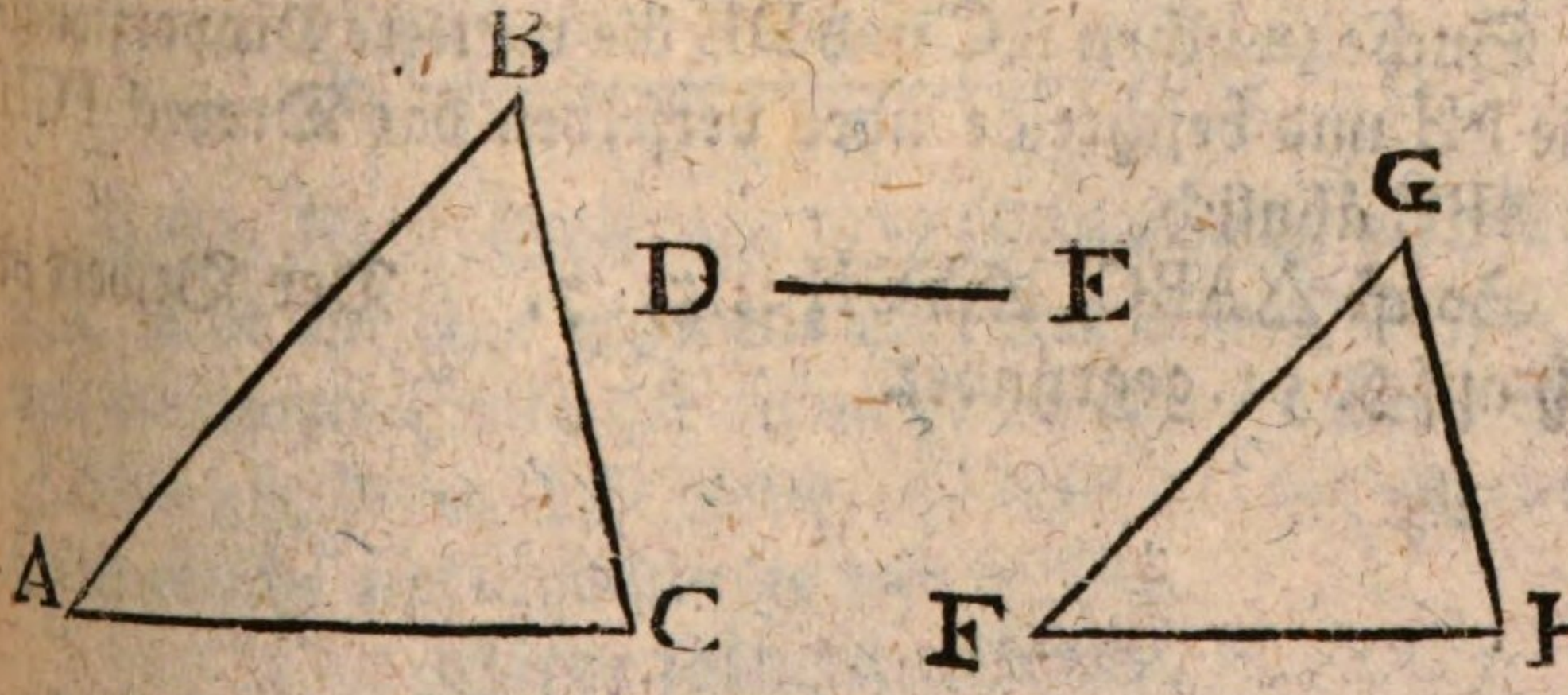
So ist △FHG = 3△ACB.

Der Beweis ist ohngefähr der nemliche wie bey §. 51.

§. 61.

Aufgabe.

Ein Dreyeck einigemal verkleinern, doch so daß wiederum ein ähnliches Dreyeck entstehe.



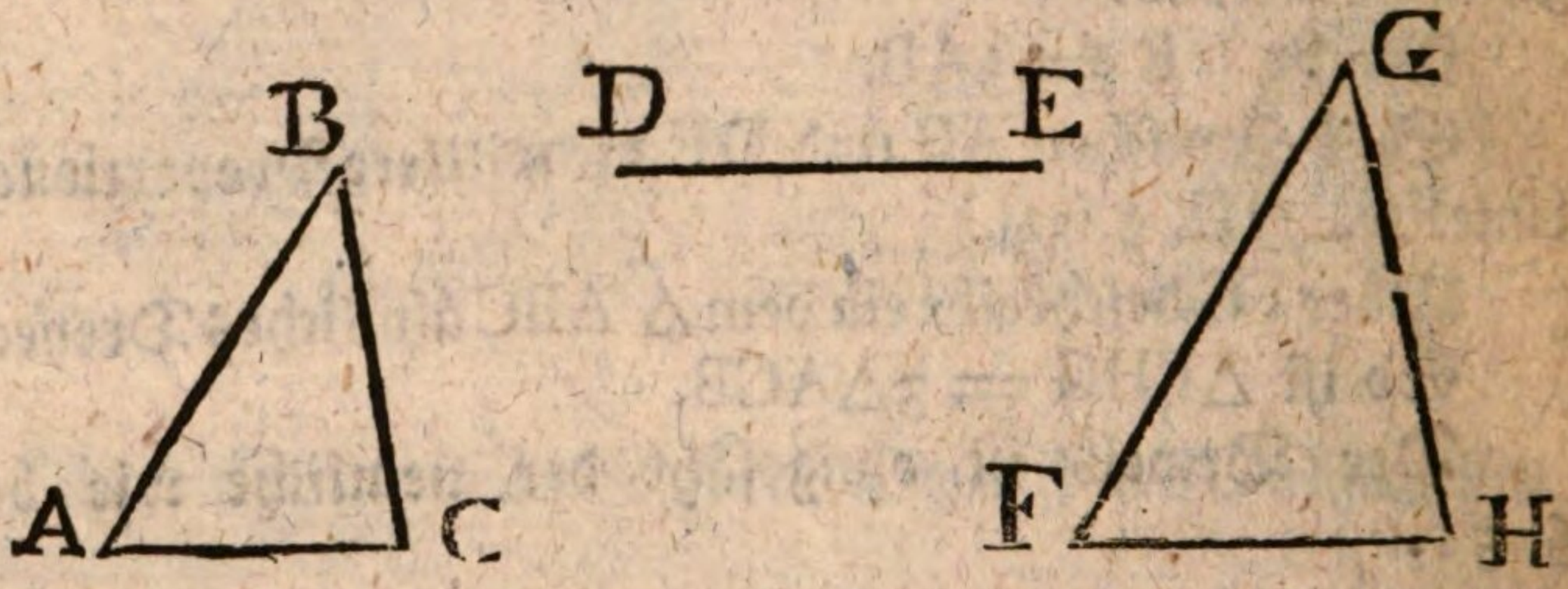
Auflösung. Es soll ein Dreyeck gemacht werden, das dem △ABC ähnlich, und dreymal kleiner sey. Mache DE dreymal kleiner als die Grundlinie AC. Suche zwischen AC und DE die mittleee Proporzional-Linie FH. Ueber dieser beschreibe das Dreyeck FGH mit ABC ähnlich. So ist △FGH = $\frac{1}{3}$ △ABC.

Der Beweis beruhet wiederum auf §. 51.

§ 62.

Aufgabe.

Es ist ein Dreyeck gegeben, nebst zwey Zahlen. Man soll ein ähnliches Dreyeck machen, das sich zum gegebenen verhalte wie die zweyte Zahl zur ersten.



Auflösung. Es sey gegeben △ABC, und ein Dreyeck verlanget, so daß das gegebene sich zum gesuchten verhalte wie 5 zu 7.

Ziehe DE, so daß AC, DE :: 5, 7 (III. §. 40). Oder theile AC in 5 Theile, und gieb der DE 7 solche Theile.

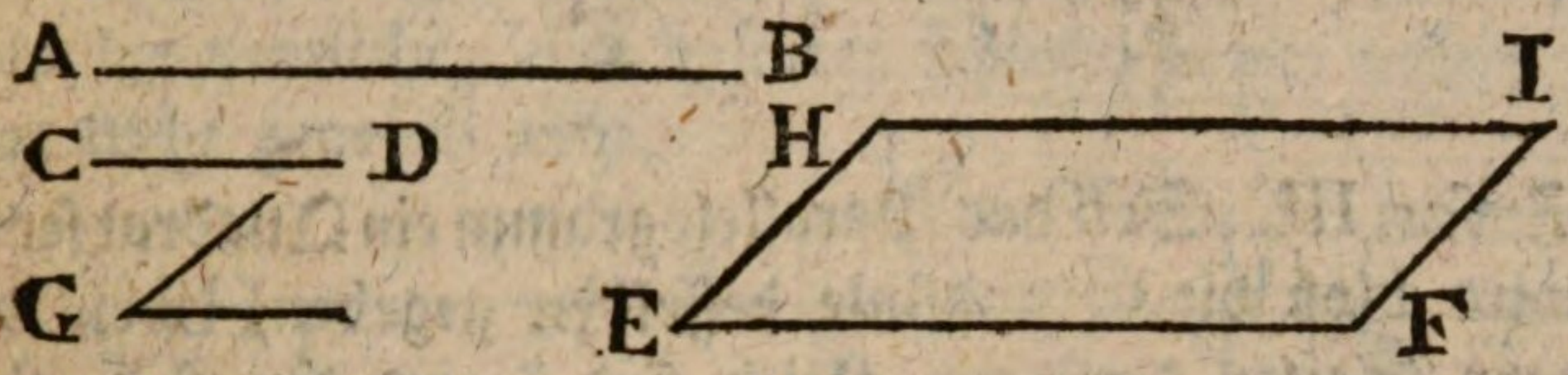
Suche zwischen AC und DE die mittlere Proporzional-Linie FH und beschreibe über derselben das Dreyeck FGH mit ABC ähnlich.

So ist △ABC, △FGH :: 5, 7. Der Beweis ist noch auf §. 51. gegründet.

§. 63.

Aufgabe.

Es sind zwey gerade Linien nnd ein Winkel gegeben. Es soll daraus ein Parallelogramm gemacht werden.



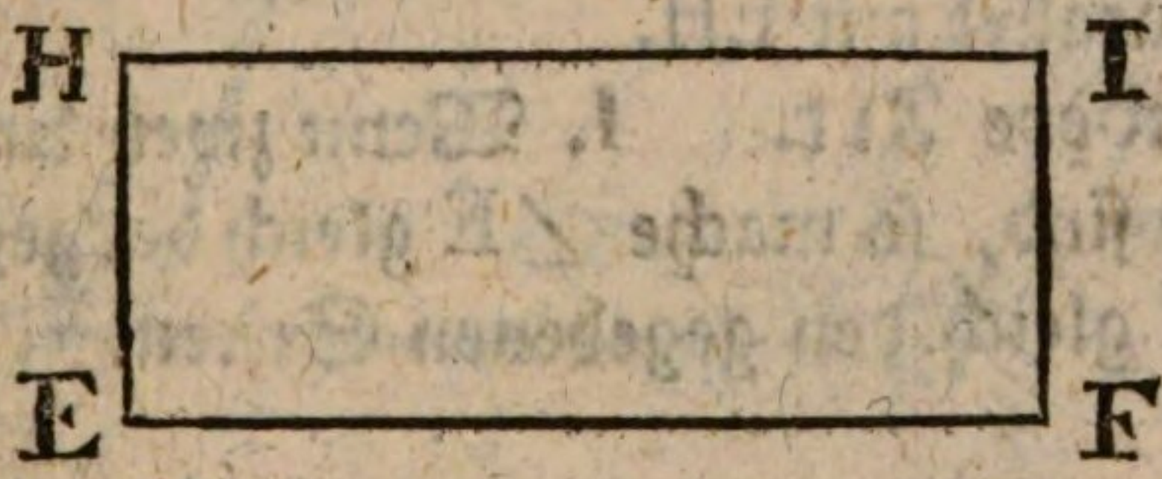
Auflösung. Es seyen gegeben die Linien AB und CD nebst dem Winkel G.

Mache EF = AB. In E mache einen Winkel = ∠ G. Mache EH = CD.

Ziehe HI mit EF und FI mit EH parallel.

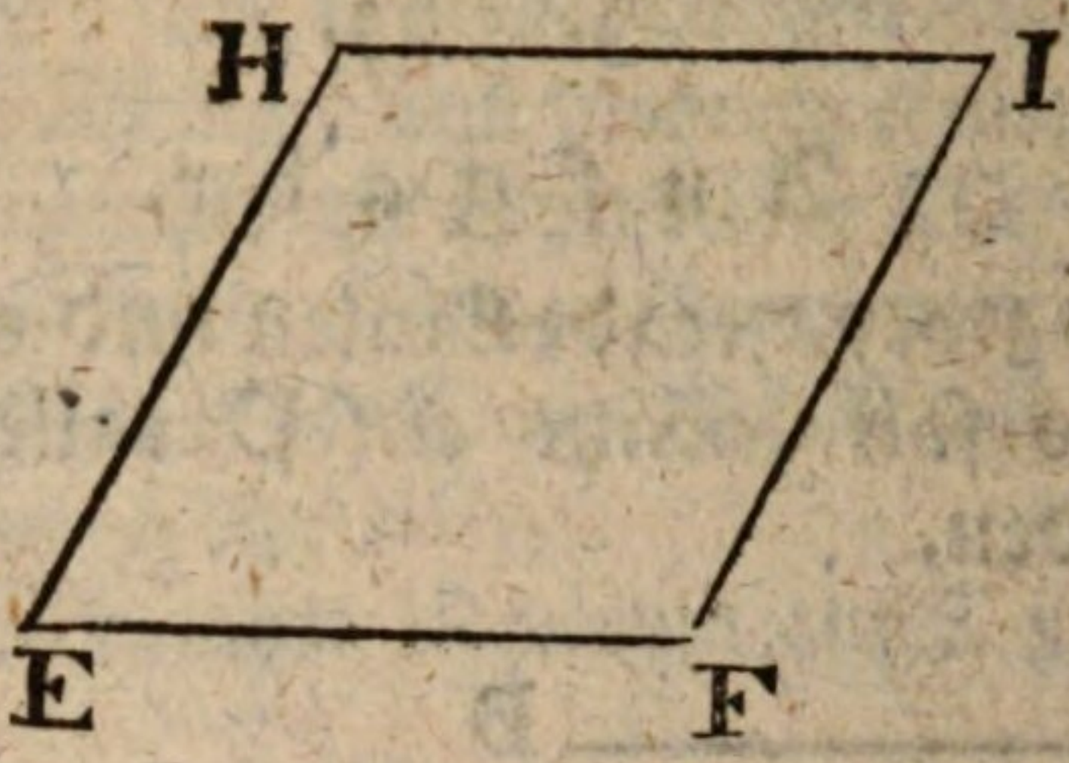
So ist EI das verlangte Parallelogramm.

Zusatz. I. Soll das Parallelogramm ein Rechteck seyn, so ist die gegebene Ecke G nicht nöthig. Man errichtet EH (=CD) senkrecht über EF (= AB) und ziehet HI mit EF, FI mit EH parallel.

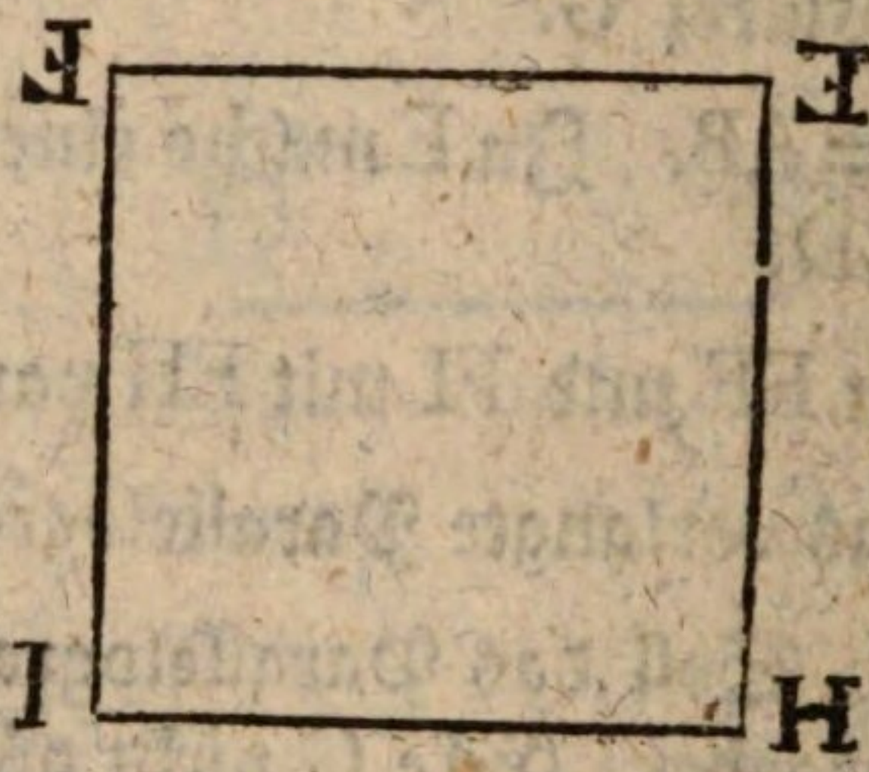


Zusatz II. Soll das Parallelogramm eine Raute seyn, so ist nur eine gegebene Ecke und eine Seite nöthig, weil die zweyte Seite der ersten gleich ist. Man macht ∠ E der gegebenen Ecke gleich, EF und EH der gegebenen Seite gleich, und das übrige wie vorher.

Siehe folgende Figur.

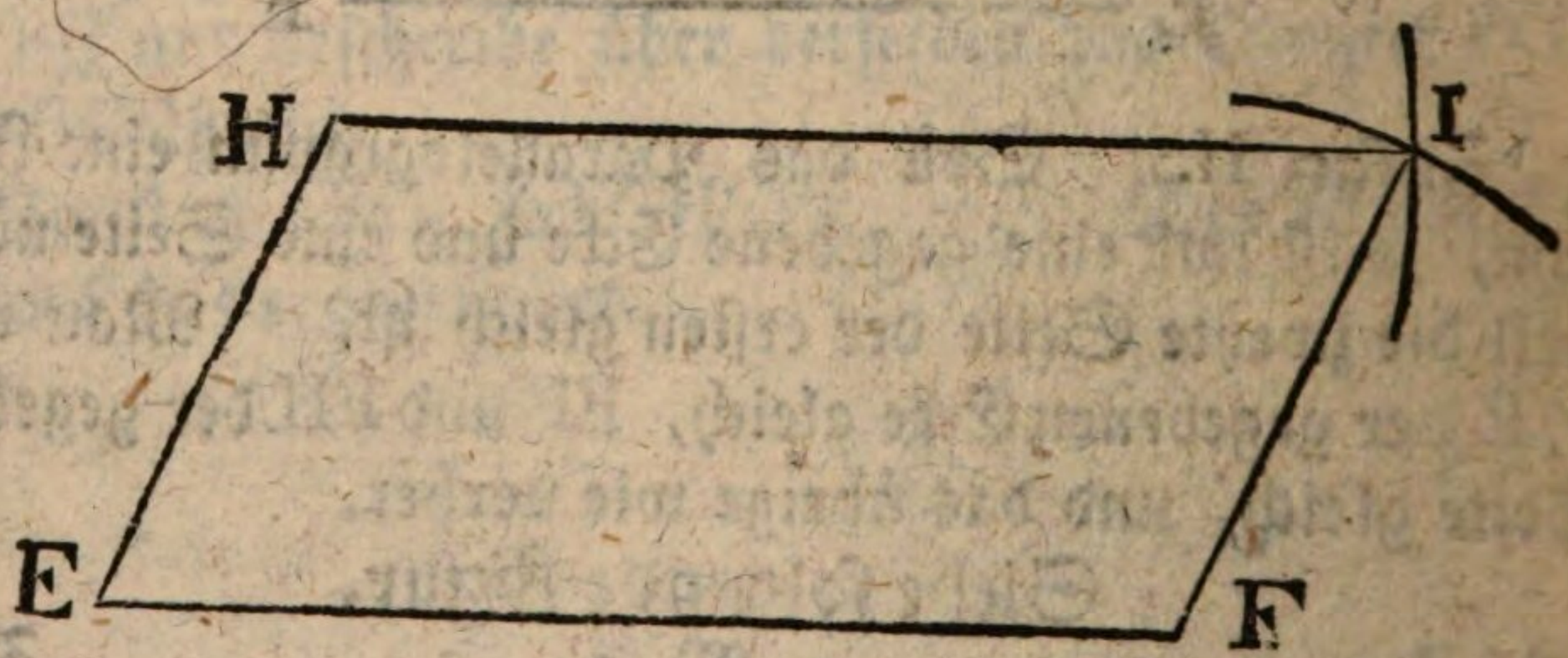


Zusatz III. Soll das Parallelogramm ein Quadrat seyn, so wird bloß die Grundlinie desselben gegeben, weil die andern Seiten derselben gleich sind, und die Ecke eine rechte ist.



Man machet also EF der gegebenen Grundlinie gleich, macht in E eine rechte Ecke, EH = EF, HI parallel mit EF und FI parallel mit EH.

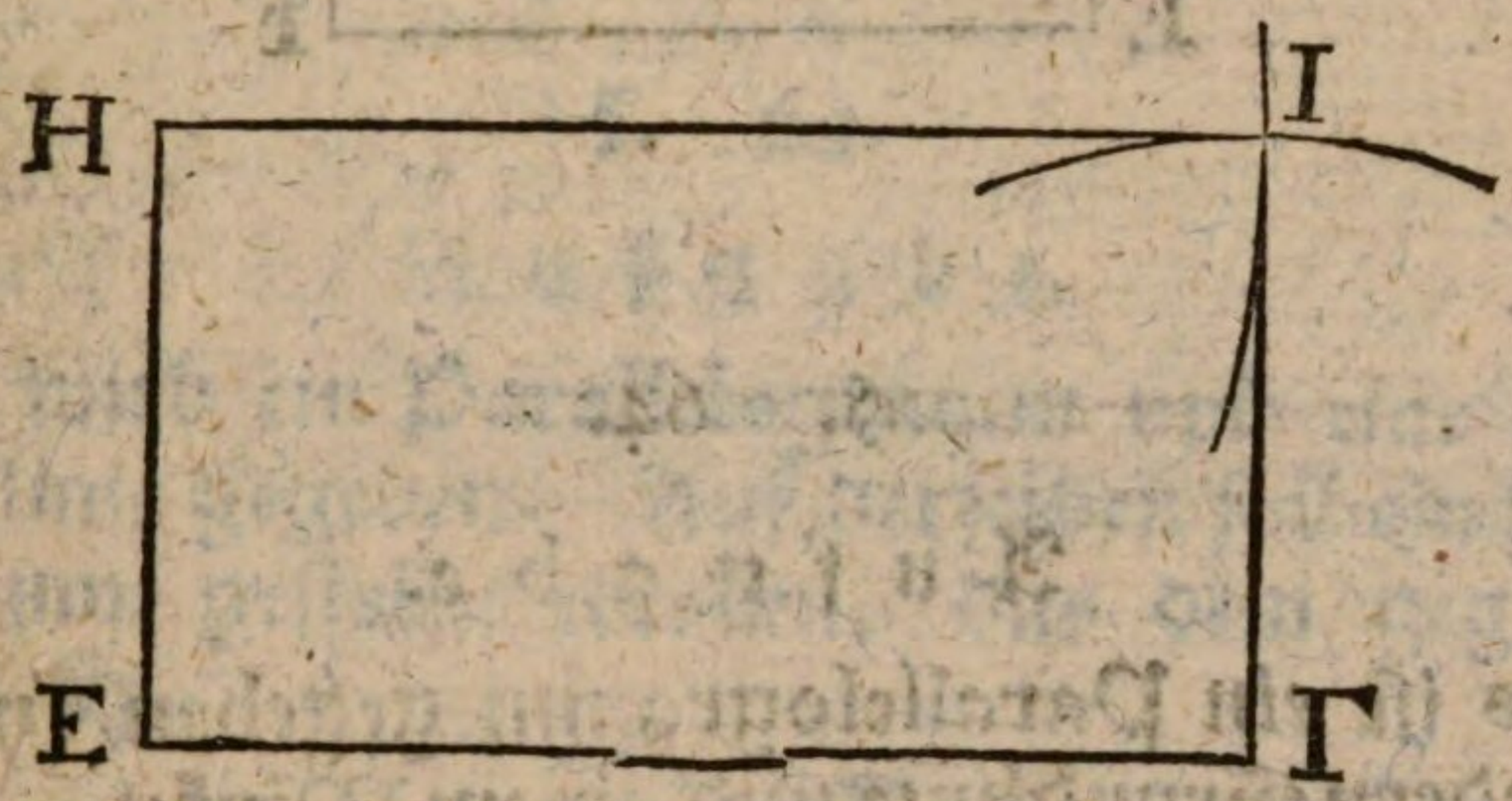
Eine andere Art. I. Wenn zwey Linien und eine Ecke gegeben sind, so mache ∠E gleich der gegebenen Ecke und EF, EH gleich den gegebenen Seiten.



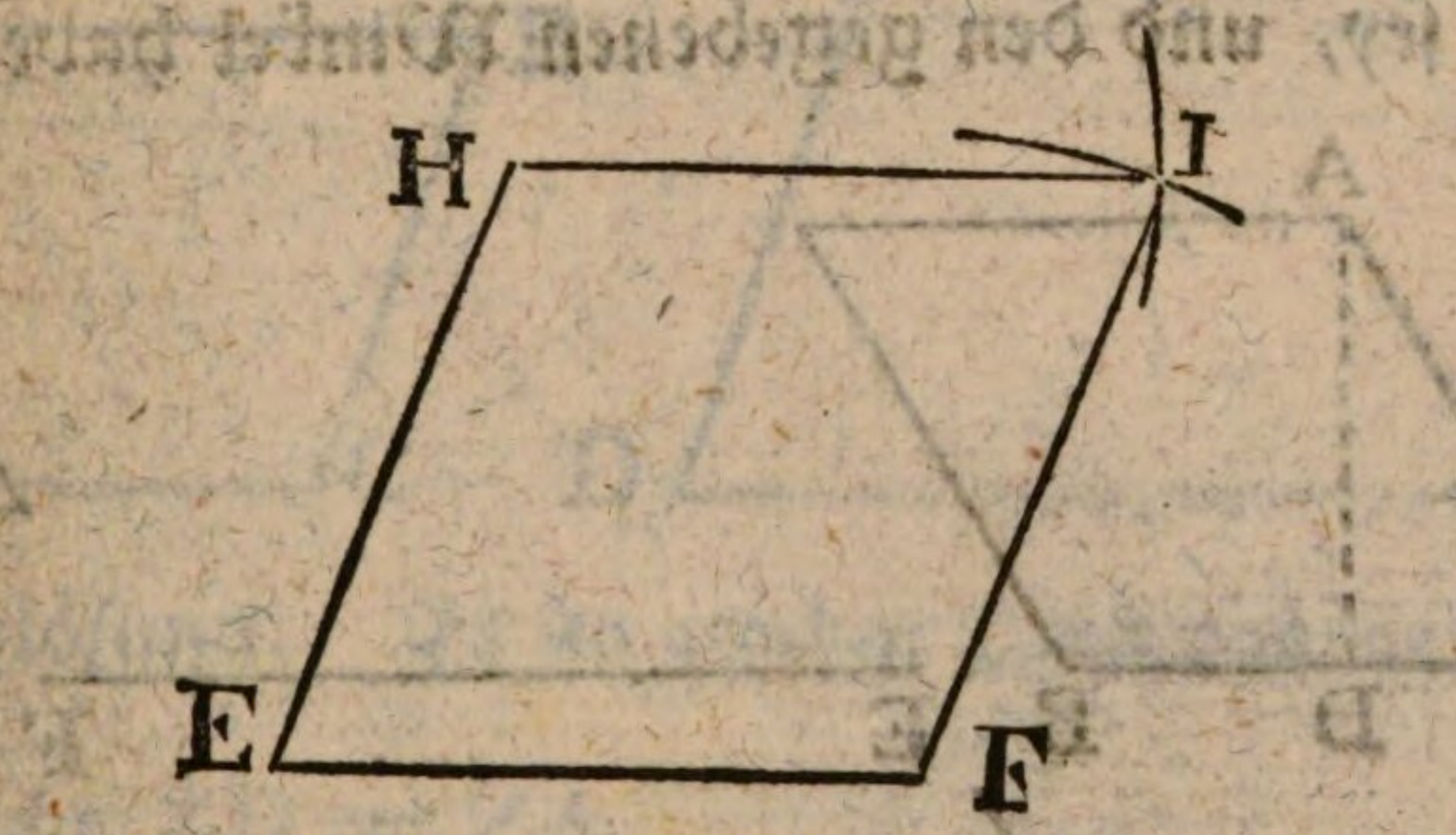
Aus

Aus H mit dem Halbmesser EF und aus F mit den Halbmesser EH beschreibe Bogen oder Zirkel, die sich irgendwo in I schneiden werden. Ziehe HI und FI, so ist HI = EF, FI = EH (II. §. 10). Folglich sind auch die gegenüberstehenden Seiten parallel, (II. §. 38. Zus.) und die Figur ist ein Parallelogramm.

II. Soll die Figur ein Rechteck seyn, so ist die Konstrukzion die nemliche, nur daß der Winkel E ein rechter ist, und nicht gegeben wird.

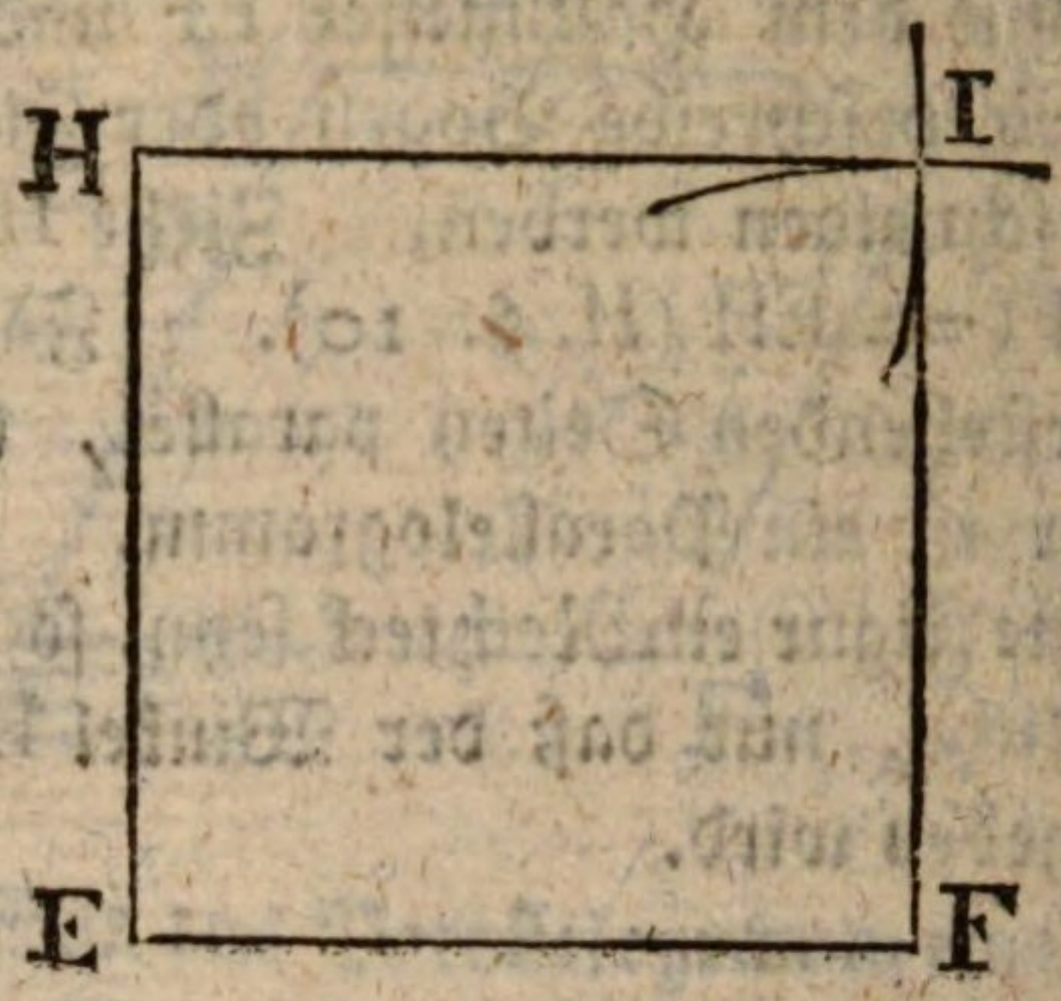


III. Wird ein Rhombus verlanget, so ist EH = EF, der Winkel E ist gegeben.



IV. Wird ein Quadrat verlangt, so ist EH = EF, und weil der Winkel E ein rechter ist, so braucht er nicht gegeben zu werden. Uebrigens bleibt die Konstrukzion allemal wie im ersten Falle.

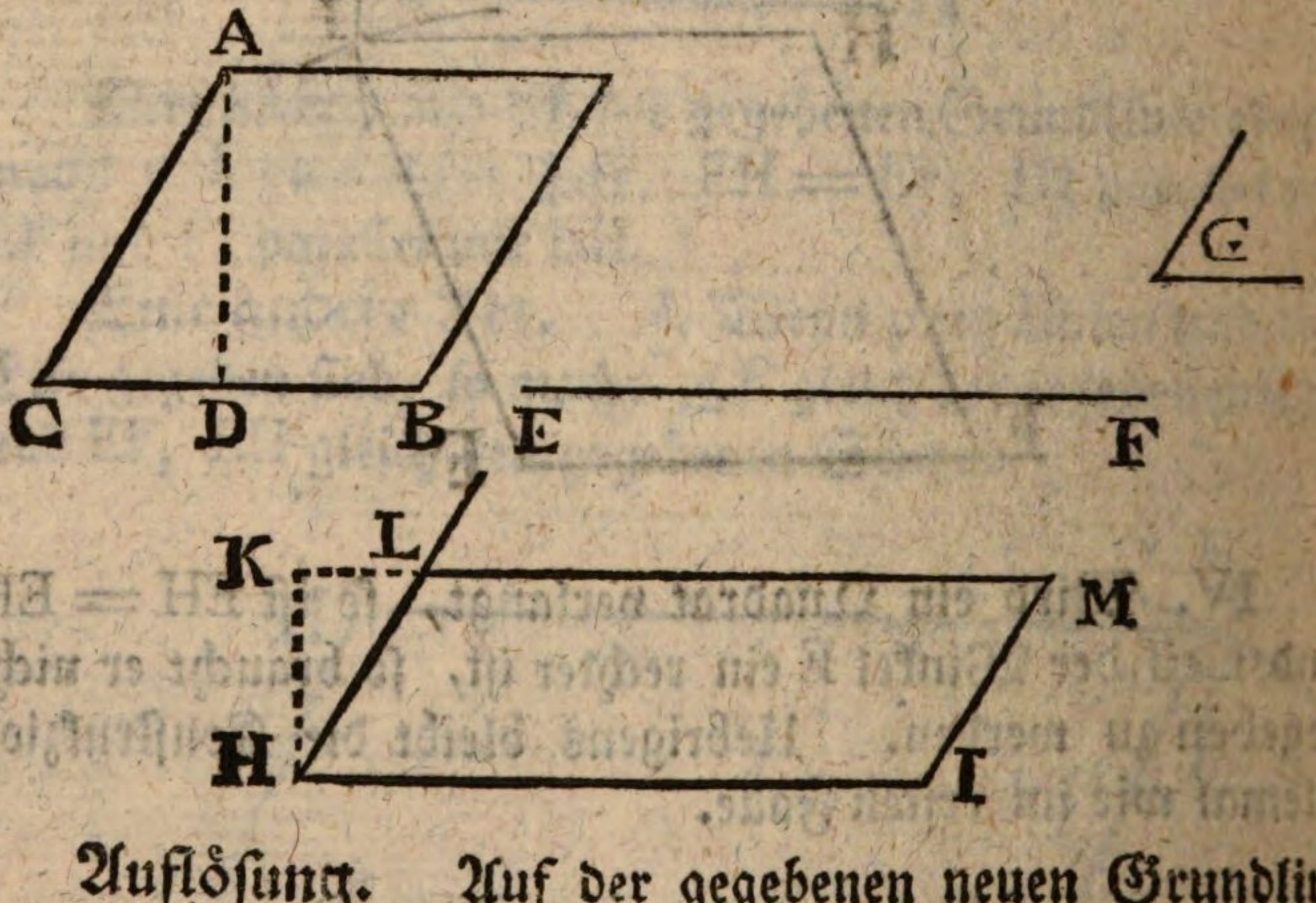
(Siehe die folgende Figur.)



§. 64.

Aufgabe.

Es ist ein Parallelogramm gegeben, nebst einer andern Grundlinie und einem Winkel. Es soll auf solcher Grundlinie ein Parallelogramm gestellet werden, das dem gegebenen am Flächen-Inhalte gleich sey, und den gegebenen Winkel habe.



Auflösung. Auf der gegebenen neuen Grundlinie HI (= EF), mache ∠H = ∠G.

Sage

Sage: wie die Grundlinie HI zur Grundlinie CB, so ist die Höhe AD zur Höhe HK.

Nachdem auf solcher Art HK gefunden, so errichte diese HK in H senkrecht auf HI.

Ziehe KM parallel mit HI.

So ist HL die andere Seite des Parallelogramms.

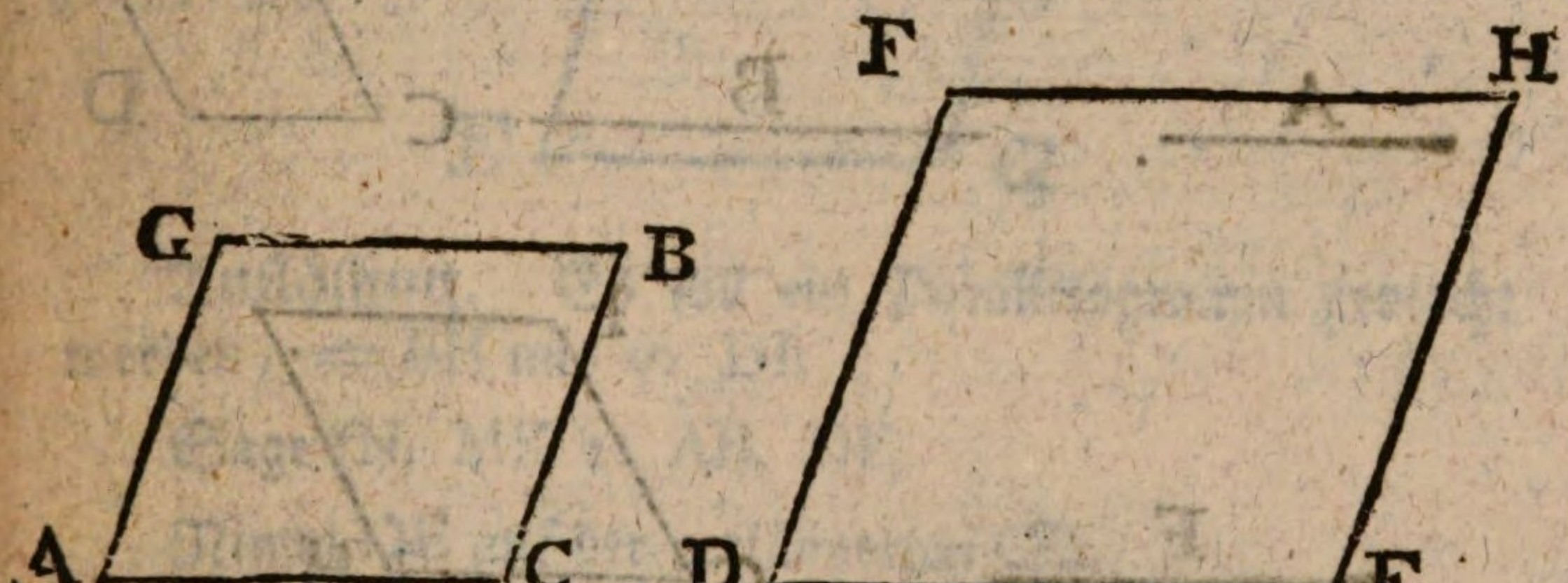
Ziehe IM parallel mit HL.

So ist □HM = □BA, weil die Höhen sich umgekehrt verhalten, wie die Grundlinien.

§. 65.

Aufgabe.

Es wird ein Parallelogramm und eine andere Grundlinie gegeben. Auf derselben soll ein Parallelogramm gestellet werden, das dem gegebenen ähnlich sey.



Auflösung. Es sey gegeben □AB und die Grundlinie DE.

Mache ∠D = ∠A.

Suche DF vermittelst dieser Proporzion: AC, DE :: AG, DF.

Vollende das Parallelogramm DH (§. 63.).

So ist es mit dem gegebenen ähnlich.

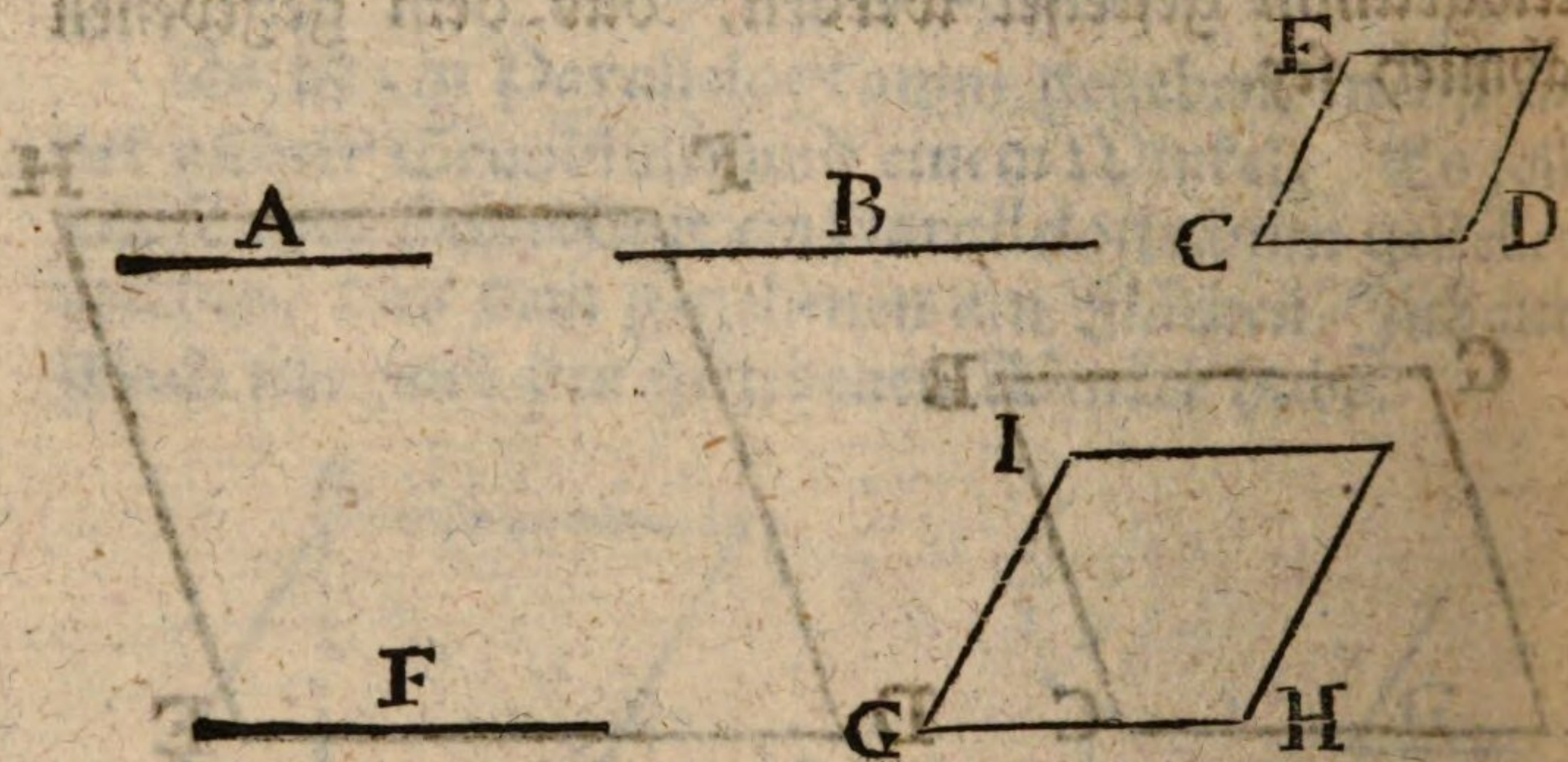
Denn es sind die homologen Seiten proporzionirt. Auch sind die Winkel gleich. Denn es ist ∠A = ∠D. Folglich ∠B = ∠H. Die Winkel

$\angle A + \angle C = 2\,\Re$
$\angle D + \angle E = 2\,\Re$
folglich $\angle A + \angle C = \angle D + \angle E$
ziehe ab $\angle A \ldots = \angle D$
so ist $\ldots \angle C = \ldots \angle E$
Weil $\angle C = \angle E$,
so ist auch $\angle G = \angle F$.

§. 66.

Aufgabe.

Es sind zwey gerade Linien und ein Parallelogramm gegeben. Es soll ein ähnliches Parallelogramm gemacht werden, das sich zum gegebenen verhalte wie die zweyte Linie zur ersten.



Auflösung. Wie A zu B, so soll sich das Parallelogramm DE zum gesuchten ähnlichen verhalten.

Suche F, indem du sagest A, B :: CD, F.

Zwischen CD und F suche die mittlere Proporzionallinie GH.

Ueber der Grundlinie GH beschreibe das Parallelogramm HI mit DE ähnlich, so ist

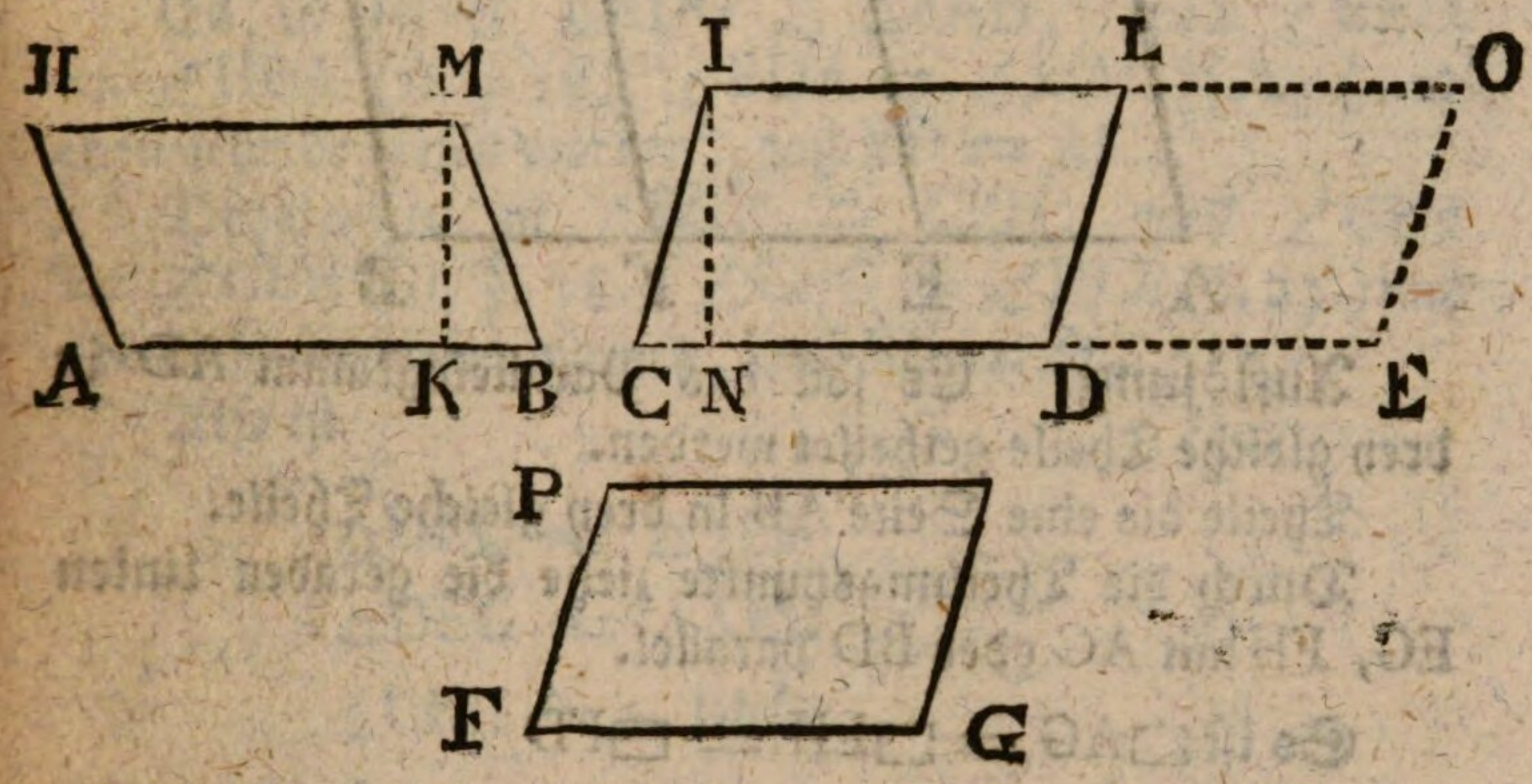
A, B :: □DE, □HI.

Der Beweis ist wie bey den Dreyecken. (Siehe §. 51.)

§. 67.

Aufgabe.

Es sind zwey Parallelogramme gegeben. Es soll ein drittes gemacht werden, das dem einen gleich und dem andern ähnlich sey.



Auflösung. Es soll ein Parallelogramm gemacht werden, = BH und ∽ DI.

Sage IN, MK :: AB, DE.

Nimm DE auf der verlängerten CD.
Verlängere IL nach O. Ziehe EO mit DL parallel.

So ist □DO = □BH.

Zwischen CD und DE suche die mittlere Proporzional-Linie FG, und beschreibe über derselben das Parallelogramm GP mit □DI ähnlich.

So ist □GP ∽ □DI und = □BH.

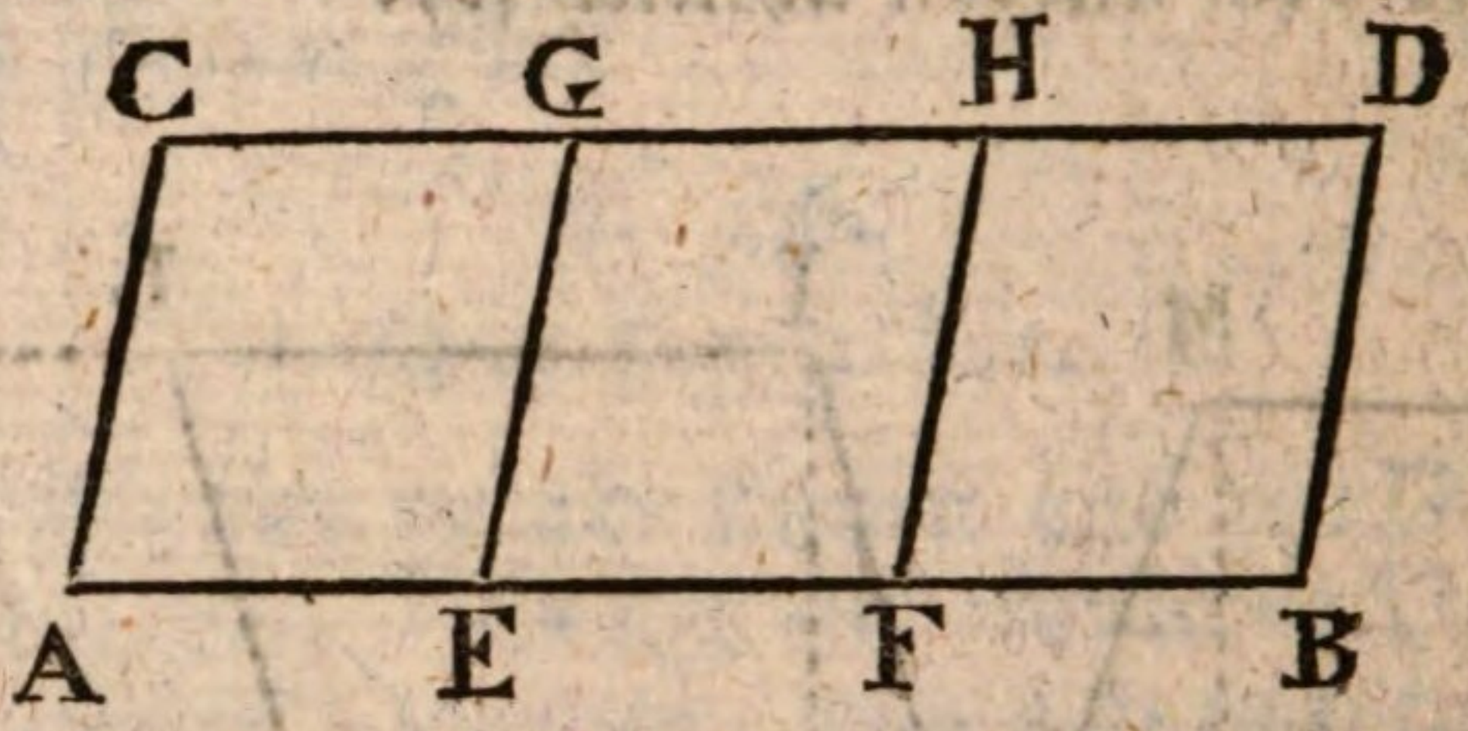
Der Beweis ist wie bey den Dreyecken.

§. 68.

§. 68.

Aufgabe.

Ein Parallelogramm in einige gleiche Theile eintheilen.



Auflösung. Es soll das Parallelogramm AD in drey gleiche Theile getheilet werden.

Theile die eine Seite AB in drey gleiche Theile.

Durch die Theilungspunkte ziehe die geraden Linien EG, FH mit AC oder BD parallel.

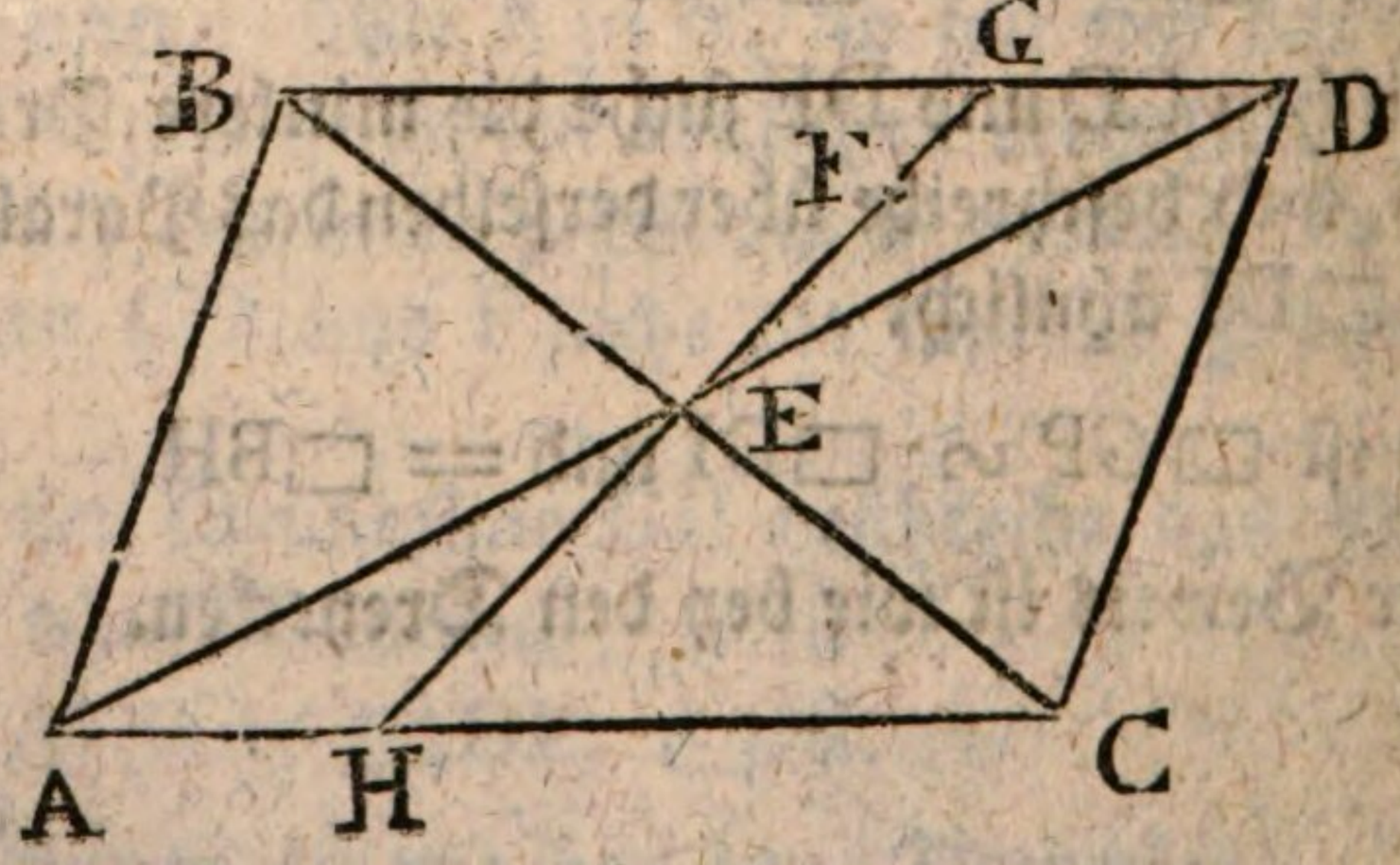
So ist □AG = □EH = □FD

Folglich sind die drey Theile gleich.

§. 69.

Aufgabe.

Ein Parallelogramm halbiren, so daß die Theilungslinie durch einen bestimmten Punkt gehe.



Auf-

Auflösung. Ziehe die beyden Digonal-Linien AD und BC. Merke den Punkt E, wo sie einander schneiden. Durch diesen Punkt E nnd den gegebenen Punkt F ziehe die Theilungs-Linie GH.

So ist der Theil GDCHG gleich dem Theile GHABG.

Denn es ist $\triangle DEC \cong \triangle AEB$, weil $DC = AB$ (I. §. 29) $\angle ADC = \angle DAB$ (§. 25.) und $\angle BCD = \angle CBA$.

Es ist ferner $\triangle EDG \cong \triangle EAH$, weil $\angle GED = \angle HEA$ (II. §. 18), $\angle BDA = \angle DAC$ (§. 23.) und eben jetzt bewiesen worden, daß $ED = AE$.

Desgleichen ist $\triangle EGB \cong CEH$, weil $\angle GEB = \angle CEH$ (II. §. 18.), $\angle GBC = \angle HCB$ (§. 23.) und eben jetzt bewiesen worden, daß $BE = EC$.

Also ist

$$\triangle DEC = \triangle AEB$$
$$\triangle DEG = \triangle AEH$$
$$\triangle CEH = \triangle BEG$$

folglich

$\triangle DEC + \triangle DEG + \triangle CEH = \triangle AEB + AEH + BEG$, oder

Trapez GHCDG = Trap. GHABG.

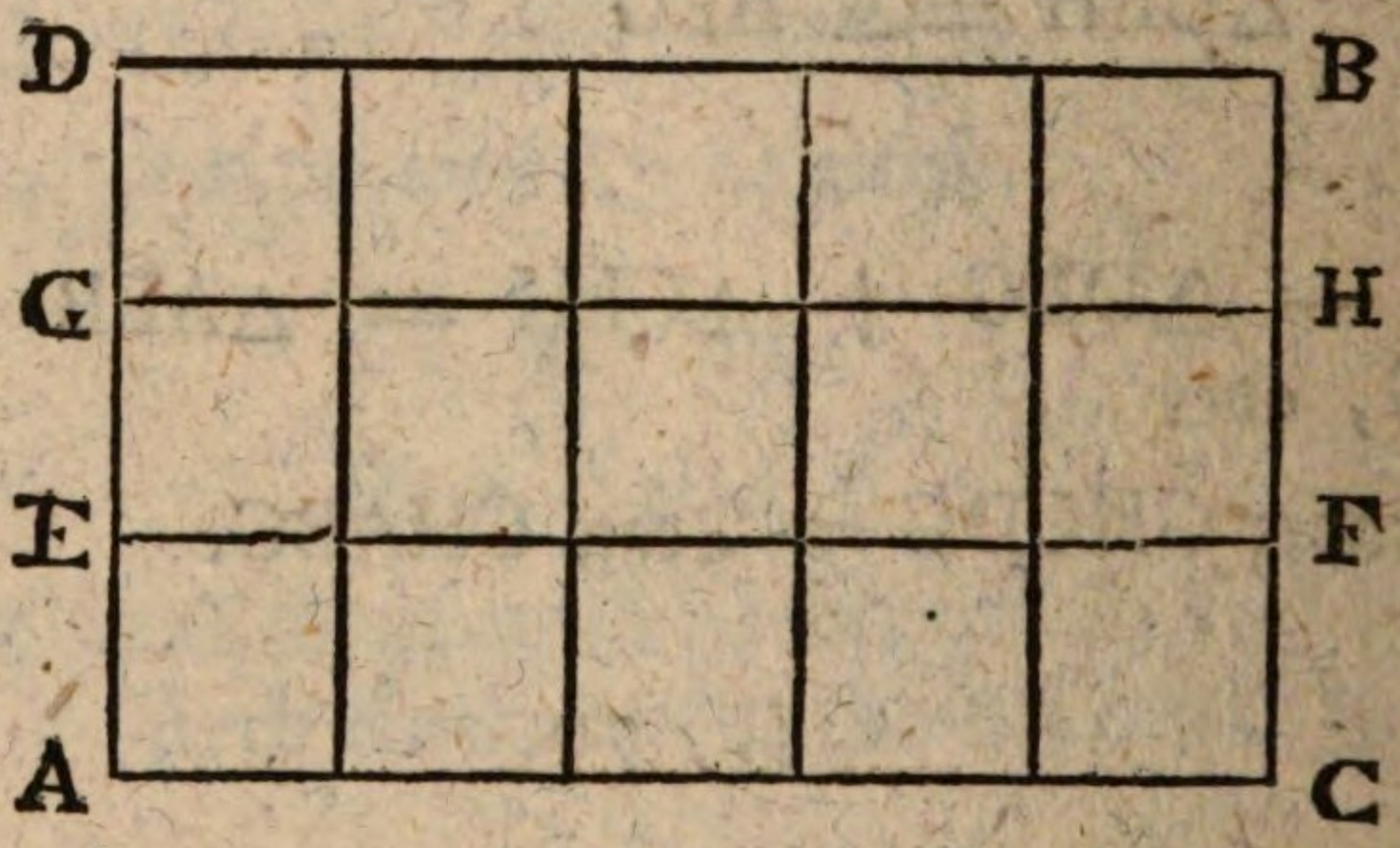
§. 70.

Wenn Flächen ausgemessen werden sollen, so kann man sich nicht des bloßen Längemaaßes bedienen, sondern das Maaß oder die Einheit muß auch eine Fläche seyn, weil Größen von verschiedener Natur sich nicht mit einander vergleichen lassen. Deswegen nimmt man zum Flächenmaaß ein Quadrat an, was eine bekannte Grundlinie hat, wie schon oben bey Gelegenheit der Proporzion gerader Linien gesagt worden.

Es wäre in den meisten Fällen eine sehr mühsame Arbeit eine Fläche eigentlich mit dem Quadrat-Maaße auszumessen, oder dasselbe so oft als möglich auf der Fläche anzulegen, und zu zählen wie oft es darin enthalten ist. Es ist weit bequemer die Flächen auszurechnen, das ist, vermittelst der Länge und Breite zu suchen, wie groß der Flächen-Inhalt seyn muß.

§. 71.

Es enthalte die Länge AC eines Parallelogramms eine gewisse Anzahl an Zollen, z. E. 5. So können auf der Grundlinie AC eben so viel Quadrat-Zolle neben einander stehen, welche das Parallelogramm AEFC ausmachen. Ueber der gleichen Grundlinie EF stehen wiederum eben so viel Quadrat-Zolle, welche das Parallelogramm EGHF ausmachen. Ueber der Grundlinie GH stehen wiederum eben so viel Quadrat-Zolle welche das Parallelogramm GDBH ausmachen.



Die Lage AEFC, von so viel Quadrat-Zollen als die Grundlinie Einheiten hat, ist also im ganzen Parallelogramm AB so oft enthalten als die Einheit AE in der Höhe AD.

Oder es verhält sich die Einheit AE zur Höhe AD, wie die Anzahl der Quadrat-Zolle auf der Grundlinie AC, zur Anzahl der Quadrat-Zolle im Parallelogramm AB.

Oder,

Oder, da die Anzahl der Quadrat-Zolle auf AC die nemliche mit der Anzahl der Zolle in der Länge ist, so verhält sich 1 zur Zahl der Höhe, wie die Zahl der Grundlinie zur Zahl des Flächen-Inhalts.

Wenn also die Höhe $= 3$, und die Grundlinie $= 5$, der Flächen-Inhalt $= x$, so ist

$$1, 3 :: 5, x (= 3 \times 5 = 15)$$

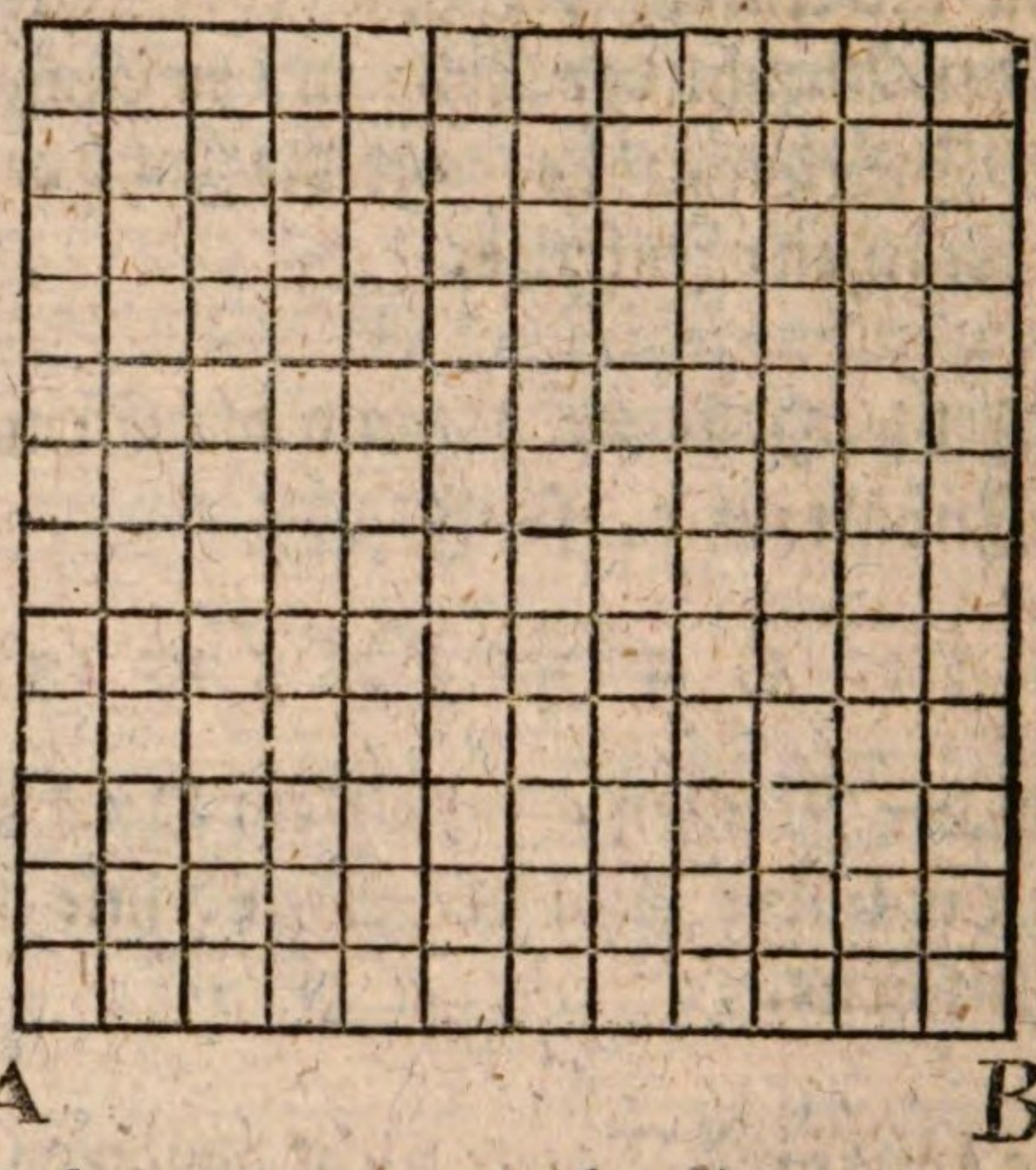
Folglich wird der Flächen-Inhalt im Quadratmaaße gefunden, wenn man die Zahl der Grundlinie mit der Zahl der Höhe multiplicirt.

Sollte die Länge und Breite nicht genau vom angenommenen Längenmaaße gemessen worden, so kann man kleinere Theile des Maaßes zur Hülfe nehmen, und folglich der wahren Länge und Breite so nahe kommen als man will. Je genauer nun die Länge und Breite genommen werden, desto genauer drücket das Produkt auch den Flächen-Inhalt aus, oder wenn a und b die Gränzen der gemessenen Länge nnd Breite sind, so ist $a \times b$ oder ab die Gränze des gemessenen Parallelogramms. Daher wennn die Länge und Breite die Zahlen a und b sind, so ist allemal ab der Flächen-Inhalt im Quadrat-Maaße.

§. 72.

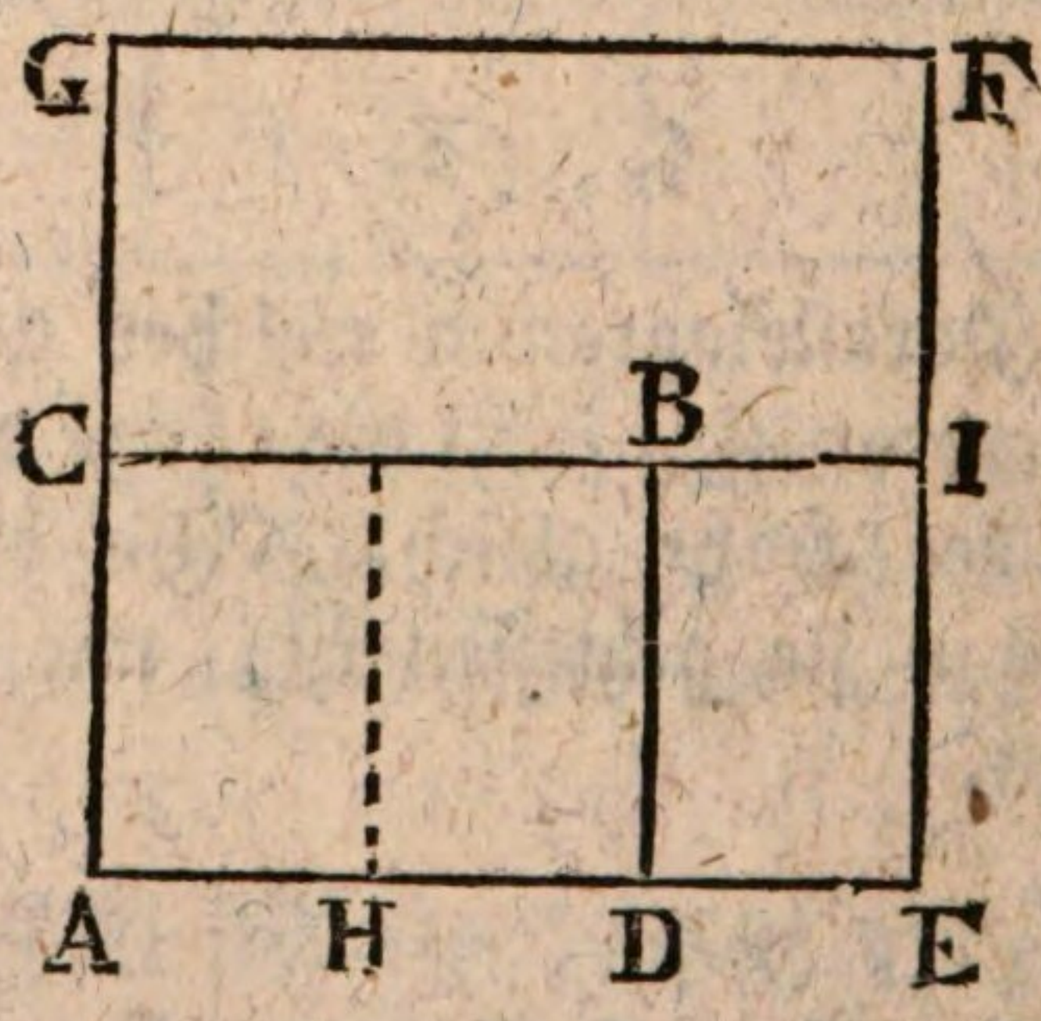
Wenn das Parallelogramm welches gemessen werden soll selbst ein Quadrat ist, so ist die Länge der Breite oder die Grundlinie der Höhe gleich. Also braucht nur die Grundlinie, wenn sie gemessen ist, mit sich selbst multiplizirt zu werden.

Hieraus



Hieraus kann man zugleich ersehen, daß, wenn das Längemaaß 12 Theile hat, das Quadratmaaß 12 × 12 oder 144 Theile bekomme. Denn wenn man einen Fuß AB in seine zwölf Zolle eintheilet, so ist es sichtbar, daß der darüber beschriebene Quadrat-Fuß 12mal 12 oder 144 Quadrat-Zolle enthalten muß.

Aus diesem Grunde läßt sich auch leicht erklären, wie die Zahl des Flächen-Inhalts, kleiner werden kann als die Zahl der Länge und Breite, wenn nemlich diese letzte Zahlen Brüche sind.



Es sey im Parallelogramm ACBD die Grundlinie AD = $\frac{2}{3}$ Fuß, nemlich AH = $\frac{1}{3}$ Fuß und HD = $\frac{1}{3}$ Fuß, und

und die Höhe AC = $\frac{1}{2}$ Fuß, so ist der Flächen-Inhalt $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ Quadrat-Fuß. Denn man nehme AE = 1 Fuß und AG = 1 Fuß, und beschreibe den Quadrat-Fuß AGFE, So ist □GFIC = □CIEA = $\frac{1}{2}$ □Fuß. Nun ist ferner □HC = □HB = □BE = $\frac{1}{3}$ □AI = $\frac{1}{6}$ □AF. Also □HC + □HB (= □AB) = $\frac{2}{3}$ □AI = $\frac{2}{6}$ □AF.

Oder wenn AE = 12 Zoll und AG = 12 Zoll, so ist AD = 8 Zoll, und AC = 6 Zoll, folglich □AB = 48 Zoll □. Zu einem Quadrat-Fuße gehören aber 144 Zoll □, oder es ist 1 Zoll □ = $\frac{1}{144}$ Fuß □, also 48 Zoll □ = $\frac{48}{144}$ Fuß □ = $\frac{1}{3}$ Fuß □.

Das Dezimal-Maaß hat hier die Bequemlichkeit, daß sich der Flächen-Inhalt, ohne weitere Redukzion, sogleich in Dezimal-Theilen giebt. Es sey AD = 0,666 ...., und AD = 0,5, so multiplizire man nach den Regeln der Dezinal-Brüche

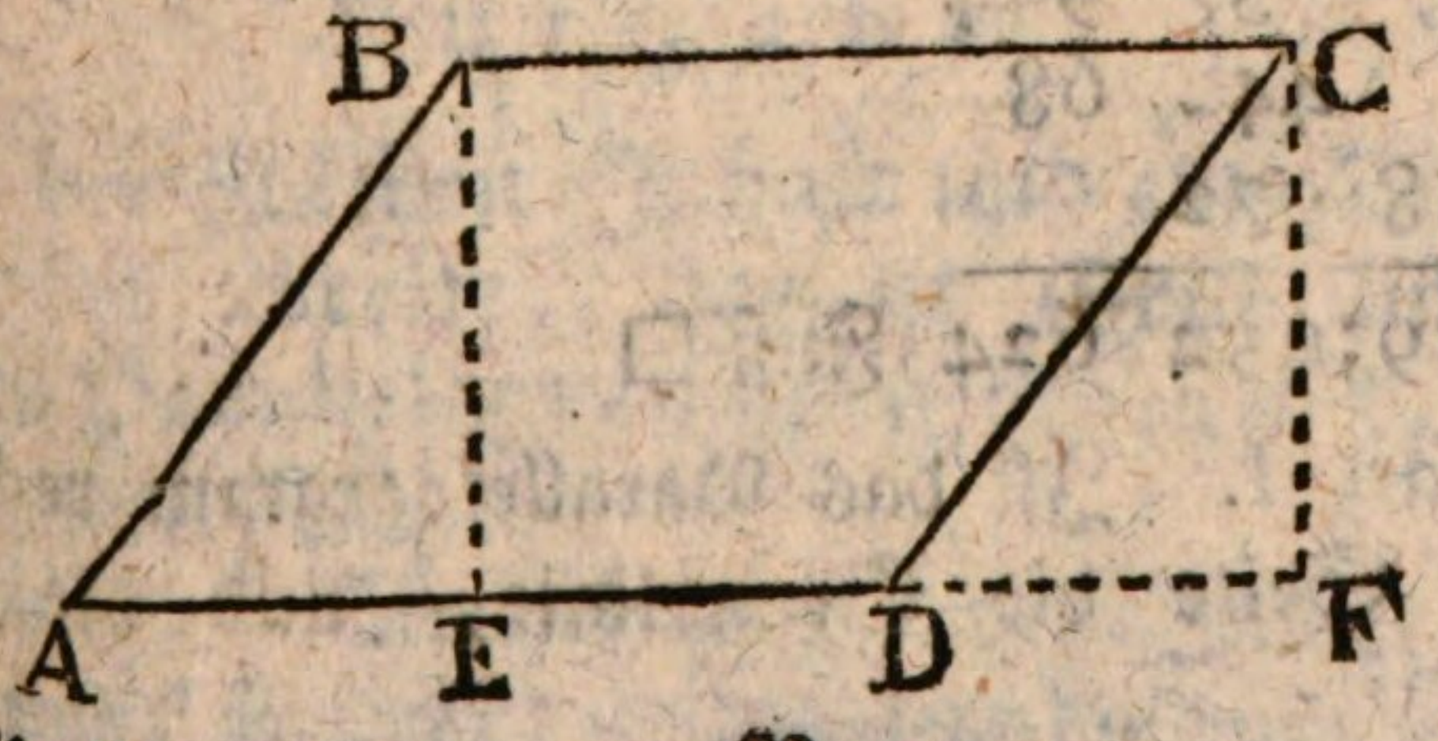
0,666
0,5

0,3330

Da im Produkte so viel Dezimal-Ziffern abgeschnitten werden müssen, als deren in beyden Faktoren sind, nemlich 4, so kömmt keine ganze Zahl sondern ein Bruch heraus, welcher kleiner ist als die gegebenen Brüche, und den Flächen-Inhalt im Quadratmaaße ausdrücket.

§. 73.

Wenn ein Parallelogramm ABCD schiefwinklich ist, so ist es einem rechtwinklichen EBCF gleich was mit demselben



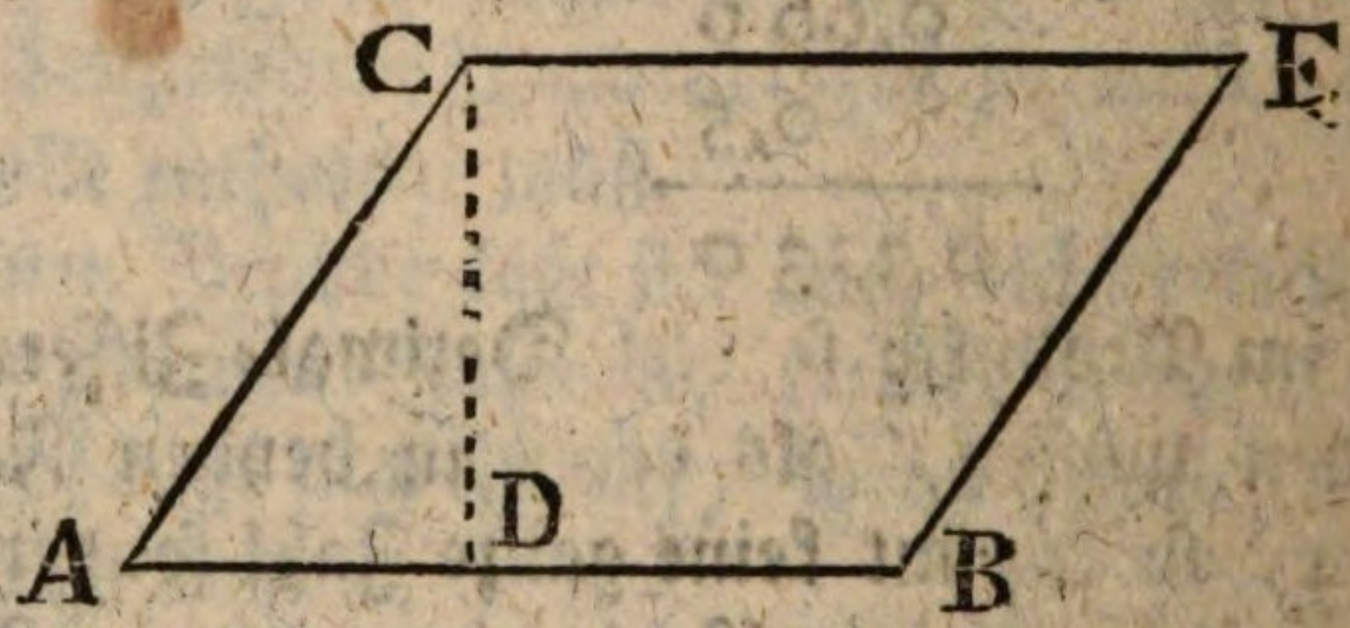
gleiche Grundlinie BC oder EF und gleiche Höhe BE oder CF hat. Es wird aber das Parallelogramm EBCF ausgerechnet, wenn man EF (= AD) mit der Höhe CF oder BE multipliziret. Also erhält man auch den Flächen-Inhalt des Parallelogramms ABCD wenn man die Grundlinie AD mit der Höhe BE oder CF multiplizirt.

§. 74.

Aufgabe.

Wenn die Grundlinie und die Höhe eines Parallelogramms in Zahlen gegeben sind, den Flächen-Inhalt desselben finden.

Auflösung. Multiplizire die Grundlinie mit der Höhe, so drücket das Produkt den Flächen-Inhalt in Quadrat-Maaße aus, wie in vorigen Absätzen bewiesen worden.



Exempel. Es sey die Grundlinie AB = 6; 324 Fuß, und die Höhe CD = 3;076 Fuß.

6;324
3;076

37 944
442 68
18 972

19;452 624 Fuß □

Zusatz I. Ist das Parallelogramm rechteckigt, so ist eine Seite die Grundlinie, und die andere die Höhe.

Zusatz II. Ist das Parallelogramm ein Quadrat, so ist die Höhe der Grundlinie gleich, und diese wird also mit sich selbst multiplizirt.

Anmerkung. Hieraus entstehet also eine neue Bedeutung des algebraischen Ausdruckes ab. Wir haben schon gesehen, daß, wenn $ab = x$ oder $\frac{ab}{1} = x$, so heiße dieses (III. §. 42.)

$$1, a :: b, x\,(= ab)$$

oder $1, b :: a, x\,(= ab)$

Es kann aber auch $ab = x$ bedeuten, daß x ein Parallelogramm ist, das b zur Grundlinie und a zur Höhe, oder a zur Höhe und b zur Grundlinie hat, oder ein rechteckiges Parallelogramm aus a und b.

Im Grunde kömmt diese Bedeutung mit der vorigen überein, denn ist a die Höhe, b die Grundlinie und x der Flächen-Inhalt eines Parallelogramms, so hat man auch (§. 71.)

$$1, a :: b, x\,(= ab)$$

Da ab das Parallelogramm aus a und b vorstellen kann, so kann auch aa oder a^2 das Parallelogramm aus a und a, das ist das Quadrat der Linie a vorstellen. Und dieses ist die Ursach warum die zweyte Potenz einer Zahl auch das Quadrat derselben genannt wird.

§. 75.

Aufgabe.

Wenn der Flächen-Inhalt und eine Dimension (Länge oder Breite, das ist Grundlinie oder Höhe) eines Parallelogramms gegeben sind, die andere Dimension finden.

Auflösung. Dividire den Flächen-Inhalt durch die eine Dimension, so giebt der Quozient die andere. Denn

es sey $ab = x$, wo a und b beyde Dimensionen, x aber der Flächen: Inhalt ist, so folget daraus

$$a = \frac{x}{b}$$

$$\text{oder } b = \frac{x}{a}$$

Exempel. Man will ein Parallelogramm haben, dessen Flächen: Inhalt seyn soll 39;045 Quadrat: Fuß, und die Höhe 7;426 Fuß, wie groß muß die Grundlinie seyn?

```
3 9;0 4 5   :7;426 = 5:257 .....
3 7.1 3 0
-----------
  1 9 1 5 0
  1 4.8.5.2
-----------
    4 2 9 8 0
    3 7 1 3 0
-----------
      5 8 5 0 0
      5 1.9.8.2
-----------
        6 5 1 8
```

Die Grundlinie ist also 5;257 .... Fuß. Oder soll die Grundlinie seyn 7;426, so wird die Höhe 5;257....

Anmerkung. Es kann also auch $\frac{A}{b}$ bedeuten die Höhe eines Parallelogramms dessen Inhalt durch die Zahl A und dessen Grundlinie b ist, oder die Grundlinie eines Parallelogramms, dessen Inhalt A und dessen Höhe b ist.

§. 76.

Aufgabe.

Wenn der Flächen: Inhalt eines Quadrats gegeben ist, dessen Grundlinie finden.

Auflö-

Auflösung. Ziehe aus der gegebenen Zahl die Quadrat-Wurzel, so giebt dieselbe die Grundlinie des Quadrats. Denn die Wurzel mit sich selbst multiplizirt giebt die Quadratzahl, und diese drücket die Größe des geometrischen Quadrats aus.

Exempel. Es sey die Grundlinie zu einem Quadrate verlangt, dessen Inhalt von 7;586 Quadratfuß sey.

$\surd$ 7|58|60 = 2;754.... verlangte Wurzel

4

358	20	270	2750
3.29	2	2	2
2960	40	540	5500
2725	7	5	4
23500	280	2700	22000
220.1.6	+49	25	16
1484	329	2725	22016

Anmerk. Es kann also $\surd a$ oder $\surd 1a$ sowohl die mittlere Proporzional-Linie zwischen 1 und a, als auch die Grundlinie eines Quadrats bedeuten, dessen Flächen-Inhalt durch die Zahl a angedeutet wird.

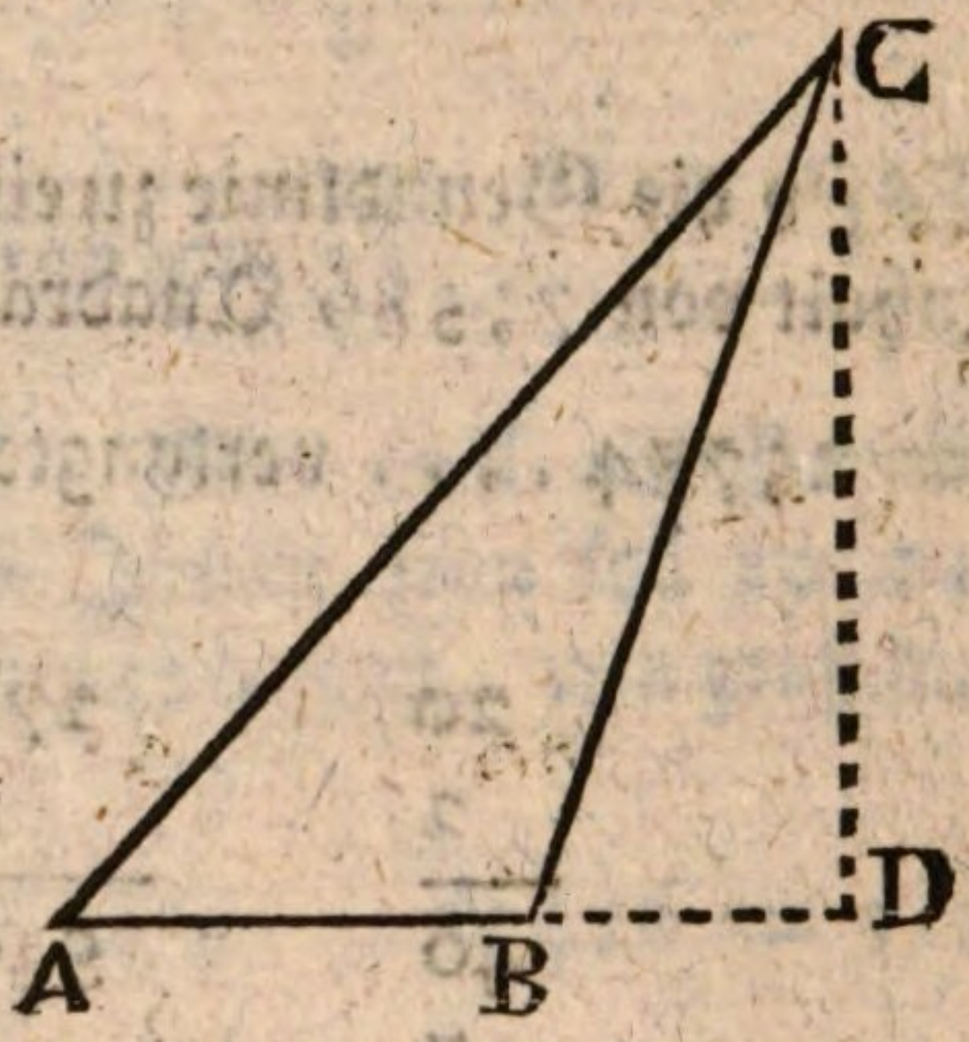
§. 77.

Aufgabe.

Wenn die Grundlinie und die Höhe eines Dreyecks in Zahlen gegeben sind, dessen Flächen-Inhalt finden.

Auflösung. Multiplizire die Grundlinie und die Höhe mit einander, und nimm die Hälfte des Produktes, oder multiplizire die Grundlinie mit der halben Höhe, oder die Höhe mit der halben Grundlinie. Denn wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplizirt, so bekömmt man das Parallelogramm welches diese Grundlinie und

Höhe hat. (§. 74.) Davon ist aber das Dreyeck die Hälfte. (§. 24.) Deswegen muß das Produkt halbiret werden, welches auch geschiehet wenn man gleich anfänglich den einen Faktor halbirt.



Exempel. Es sey die Grundlinie AB = 5;784 und die Höhe CD = 4;96

		oder	
5;7 84	Grundlinie	5;7 84	Grundlinie
4;96	Höhe	2;48	halbe Höhe
34704		46272	
52056		23136	
23136		11568	
28;68864		14;34432	

die 2)

14;34432 Inhalt des △

oder

2;892	halbe Grundlinie
4;96	Höhe
17352	
26028	
11568	
14;344432	Inhalt des △

§. 78.

§. 78.

Aufgabe.

Wenn der Flächen-Inhalt eines Dreyecks, und eine seiner Dimensionen (Grundlinie oder Höhe) gegeben sind, die andere Dimension finden.

Auflösung. Doppele den Flächen-Inhalt und dividire durch die gegebene Dimension, so kömmt die andere Dimension. Denn es sey die Grundlinie des Dreyecks b, die Höhe x, der Flächen-Inhalt c, so ist

$$\frac{bx}{2} = c \text{ (§. 77.)}$$

folgt $bx = 2c$

$$x = \frac{2c}{b}$$

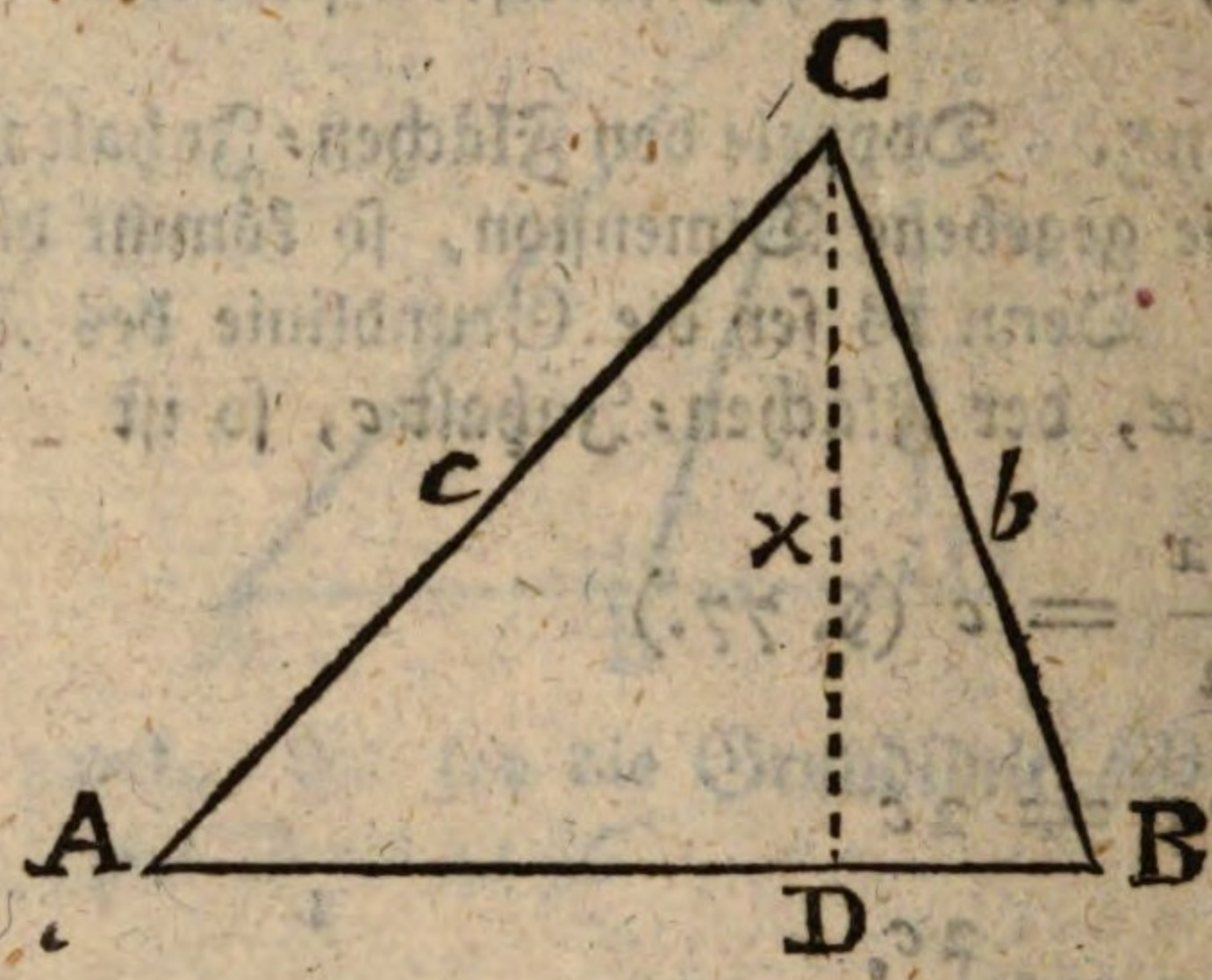
Exempel. Es sey der Flächen-Inhalt des Dreyecks 14;34432, und die Grundlinie 5;784

14;34432
× 2
28;68864 : 5;784 = 4;96 Höhe.
23136
55526
52056
34704
34704
0

§. 79.

Aufgabe.

Es sind die drey Seiten eines Dreyecks gegeben, und die eine wird zur Grundlinie genommen. Man soll die Höhe finden.



Auflösung. Es sey im Dreyecke ACB die Grundlinie $AB = a$, die Seite $AC = c$, die Seite $CB = b$, wo unter a, c und b gewisse Zahlen verstanden werden. Die unbekannte Höhe CD sey $= x$.

Weil die Höhe CD winkelrecht auf AB stehet, so sind CDB und CDA rechtwinkliche Dreyecke. Und es ist im Dreyecke CDB das Quadrat der Seite CB gleich der Summe der Quadrate der Seiten CD und DB, oder

$$b^2 = x^2 + (DB)^2$$

$$\text{oder } (DB)^2 = b^2 - x^2$$

$$\text{oder } DB = \sqrt{(b^2 - x^2)}$$

Eben so findet man, daß im Dreyecke CDA

$$AD = \sqrt{(c^2 - x^2)}$$

Es ist aber $DB + AD = AB = a$. also ist

$$\sqrt{(b^2 - x^2)} + \sqrt{(c^2 - x^2)} = a.$$

Man

Man quadrire beyderseits, so kömmt

$$b^2 - x^2 + 2\sqrt{(b^2 - x^2)}\sqrt{(c^2 - x^2)} + c^2 - x^2 = a^2$$

oder $b^2 + c^2 - 2x^2 + 2\sqrt{(b^2 - x^2)(c^2 - x^2)} = a^2$

$$2\sqrt{(b^2 - x^2)(c^2 - x^2)} = 2x^2 - b^2 - c^2 + a^2$$

$$2\sqrt{(b^2 - x^2)(c^2 - x^2)} = 2x^2 - (b^2 + c^2 - a^2)$$

Man quadrire beyderseits, so kömmt

$$4(b^2 - x^2)(c^2 - x^2) = 4x^4 - 4x^2(b^2 + c^2 - a^2) + (b^2 + c^2 - a^2)^2$$

oder $4b^2c^2 - 4b^2x^2 - 4c^2x^2 + 4x^4 = 4x^4 - 4b^2x^2 - 4c^2x^2 + 4a^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)^2)$

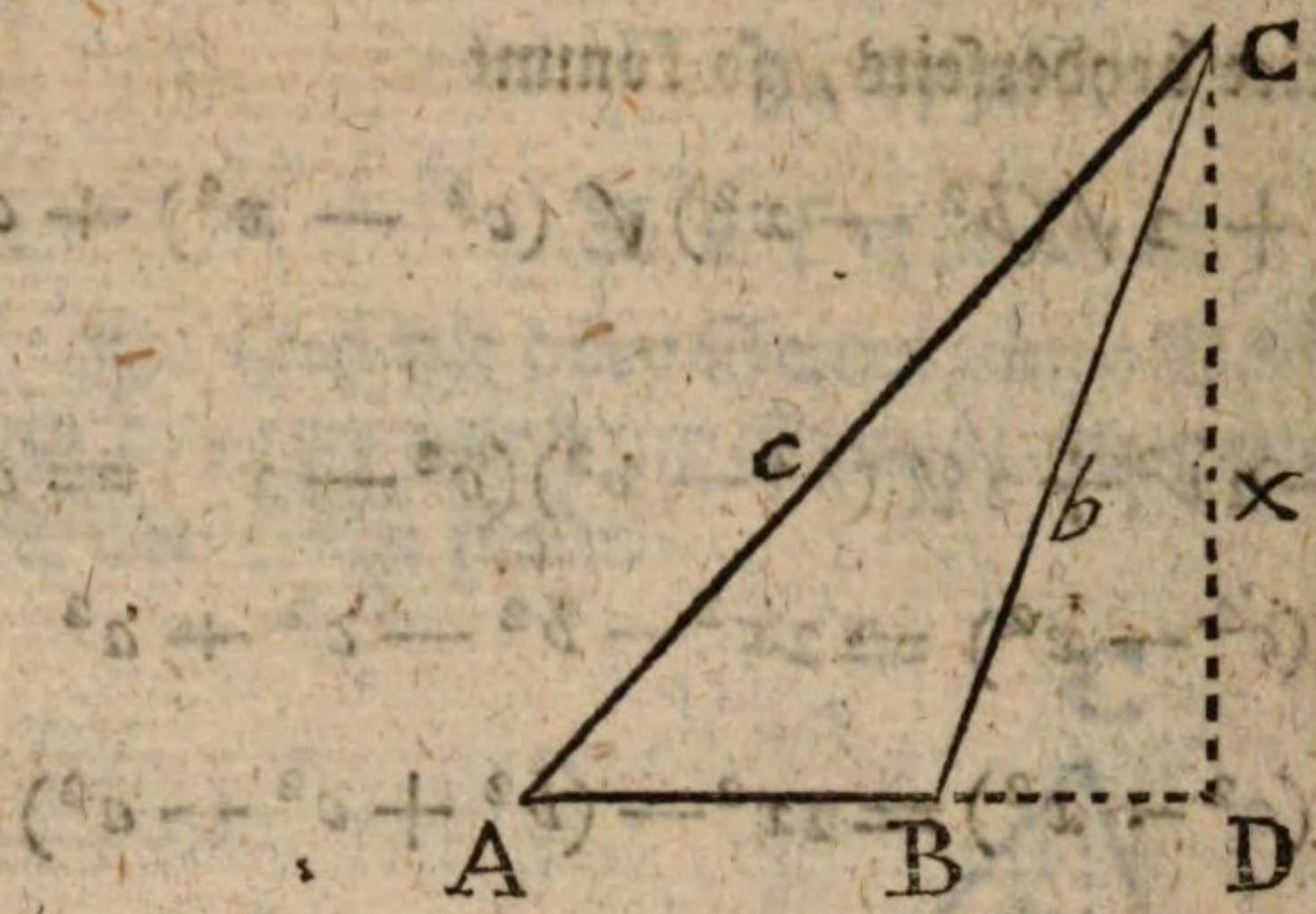
Wenn man die gleichen Sätze beyderseits wegläßt, so ist

$$4b^2c^2 = 4a^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)^2$$

$$4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = 4a^2x^2$$

$$\frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4a^2} = x^2$$

$$\frac{\sqrt{[4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2]}}{2a} = x$$



Gesetzt das Dreyeck sey stumpfwinklich, und der Perpendikel CD falle außerhalb desselben. So ist im rechtwinklicher Dreyeck ADC

$$AD = \sqrt{(c^2 - x^2)}$$

und im rechtwinklichten Dreyecke BDC ist

$$BD = \sqrt{(b^2 - x^2)}$$

Es ist aber $AD - BD = AB = a$, folglich ist

$$\sqrt{(c^2 - x^2)} - \sqrt{(b^2 - x^2)} = a$$

und wenn man beyderseits quadriret

$$c^2 - x^2 - 2\sqrt{(c^2 - x^2)(b^2 - x^2)} + b^2 - x^2 = a^2 \text{ oder}$$

$$b^2 + c^2 - 2x^2 - 2\sqrt{(c^2 - x^2)(b^2 - x^2)} = a^2$$

daher ist

$$-2\sqrt{(c^2 - x^2)(b^2 - x^2)} = 2x^2 - b^2 - c^2 + a^2$$

oder

$$-2\sqrt{(c^2 - x^2)(b^2 - x^2)} = 2x^2 - (b^2 + c^2 - a^2)$$

Quadrire beyderseits, so kömmt

$$+2(c^2 - x^2)(b^2 - x^2) = 4x^4 - 4x^2(b^2 + c^2 - a^2) + (b^2 + c^2 - a^2)^2$$

Woraus

Woraus man die nemliche Formel ziehet als vorher. Die Formel passet also auf alle Fälle.

Exempel. Es sey

$$AB\ (=a) = 5$$
$$BC\ (=b) = 7$$
$$AC\ (=c) = 11$$

Setze diese Werthe in die Formel

$$x = \frac{\sqrt{[4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2]}}{2a}$$

so kömmt

$$x = \frac{\sqrt{[4.49.121 - (49 + 121 - 25)^2]}}{2.5}$$
$$= \frac{\sqrt{[23716 - (145)^2]}}{10}$$
$$= \frac{\sqrt{(23716 - 20925)}}{10}$$
$$= \frac{\sqrt{2791}}{10}$$
$$= \frac{52;829....}{10}$$
$$= 5;2929....$$

beynahe $= 5;283$

Dieses ist also die Höhe des Dreyecks dessen Grundlinie $= 5$, und beyde Seiten $= 7$ und 11. Will man den Inhalt haben, so kann man ihn nach der gewöhnlichen Methode finden. (§. 77.)

Zusatz.

Zusatz. Will man aus den drey Seiten gerades Weges den Inhalt haben, so multiplizire man die Höhe

$$\frac{\sqrt{[4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2]}}{2a}$$

mit der Grundlinie a, so kömmt

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{[4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2]}$$

Man halbire das Produkt, so hat man zum Flächen-Inhalte

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{[4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2]}$$

Im vorigen Exempel war $\sqrt{[4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2]} = 52;829....$ Hiervon ist $\frac{1}{4}$,

$13;207.....$ Flächen-Inhalt.

Zusatz II. Wenn das Dreyeck gleichschenklich ist, so wird $b = c$, und setzet man b anstatt c in der Formel

$$x = \frac{\sqrt{[4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2]}}{2a}$$

so ist die Höhe des Dreyecks

$$x = \frac{\sqrt{[4b^4-(2b^2-a^2)^2]}}{2a}$$

oder weil $(2b^2-a^2)^2 = 4b^4-4a^2b^2+a^4$ und also

$$4b^4-(2b^2-a^2)^2 = 4b^4-4b^4+4a^2b^2-a^4$$
$$= 4a^2b^2-a^4$$
$$= a^2(4b^2-a^2)$$

so wird die Formel

$$x = \frac{\sqrt{a^2(4b^2-a^2)}}{2a}$$

oder $$x = \frac{a\sqrt{(4b^2-a^2)}}{2a}$$

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4b^2-a^2)}$$

Der Flächen-Inhalt wird $\frac{1}{2}\sqrt{(4b^2 - a^2)} \times \frac{1}{2}a$

$\frac{1}{4}a\sqrt{(4b^2 - a^2)}$

Zusatz III. Ist das Dreyeck gleichseitig, so wird auch $a = b$, und

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{(4b^2 - b^2)}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{(3b^2)}$$
$$= \frac{b\sqrt{3}}{2}$$

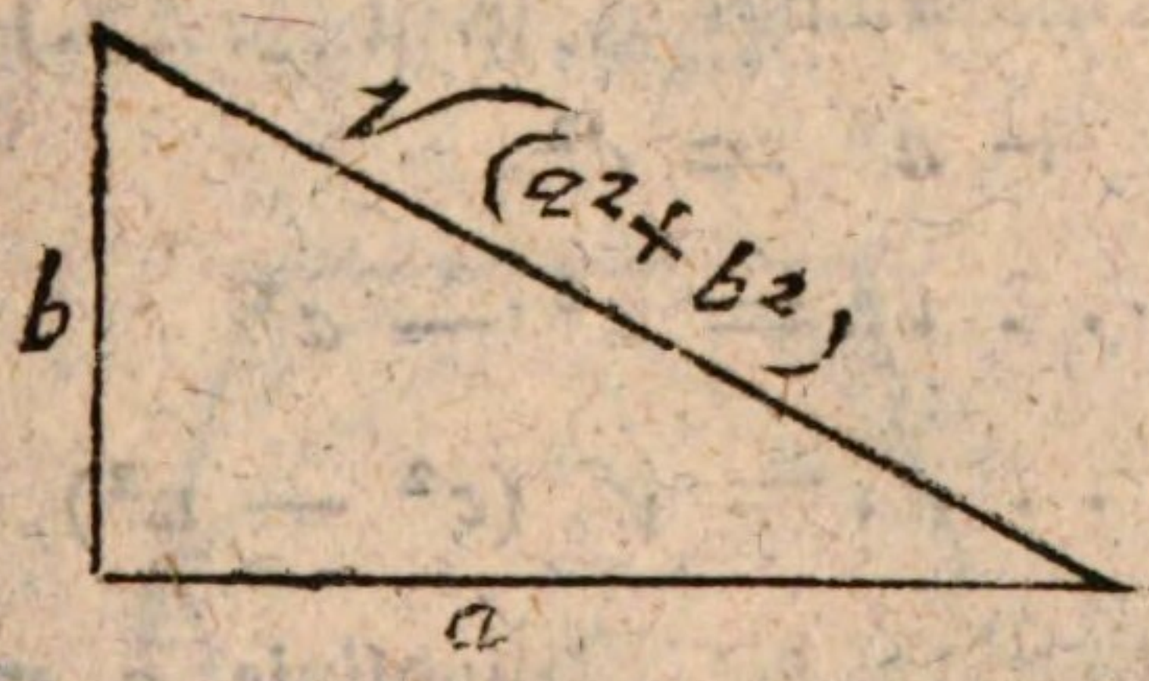
Multiplizirt man diese Höhe mit der halben Grundlinie, das ist mit $\frac{1}{2}b$ oder $\frac{b}{2}$, so kömmt zum Flächen-Inhalte

$$\frac{b^2\sqrt{3}}{4}$$

§. 80.

Aufgabe.

Es sind beyde Katheten eines rechtwinklichen Dreyecks gegeben. Es soll die Hypotenuse, wie auch der Flächen-Inhalt des Dreyecks gefunden werden.



Auflösung. I) Es sey der eine Kathete a und der andere b, so ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate von a und b, also ist

$$(\text{Hypot.})^2 = a^2 + b^2$$
$$(\text{Hypot.}) = \sqrt{(a^2 + b^2)}$$

II)

II) Weil b auf a senkrecht stehet, so ist a die Grundlinie und b die Höhe des Dreyecks, also ist

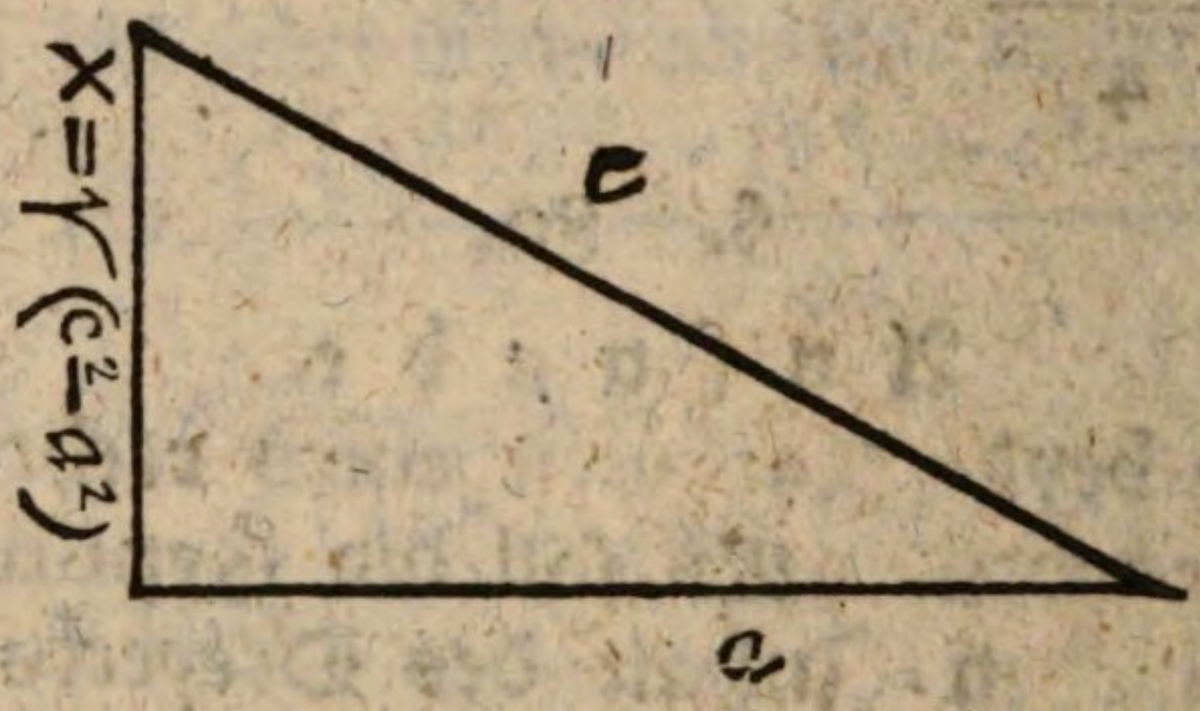
$$\text{Flächen-Inhalt} = \frac{ab}{2}$$

Die Hypotenuse kömmt hier gar nicht in Betrachtung.

§. 81.

Aufgabe.

Es ist die Hypotenuse und ein Kathete gegeben. Es soll der andere Kathete, wie auch der Flächen-Inhalt gefunden werden.



Auflösung I. Es sey die Hypotenuse c, der bekannte Kathete a, der unbekannte x, so ist (§. 27.)

$$x^2 + a^2 = c^2$$

$$x^2 \ldots\ldots = c^2 - a^2$$

$$x \ldots\ldots = \sqrt{(c^2 - a^2)}$$

II) Multiplizire die Grundlinie a mit der Höhe $\sqrt{(c^2 - a^2)}$, und nimm die Hälfte des Produktes, (§. 77.) so kömmt

$$\text{Flächen-Inhalt} = \frac{a\sqrt{(c^2 - a^2)}}{2}$$

Fünftes Hauptstück.

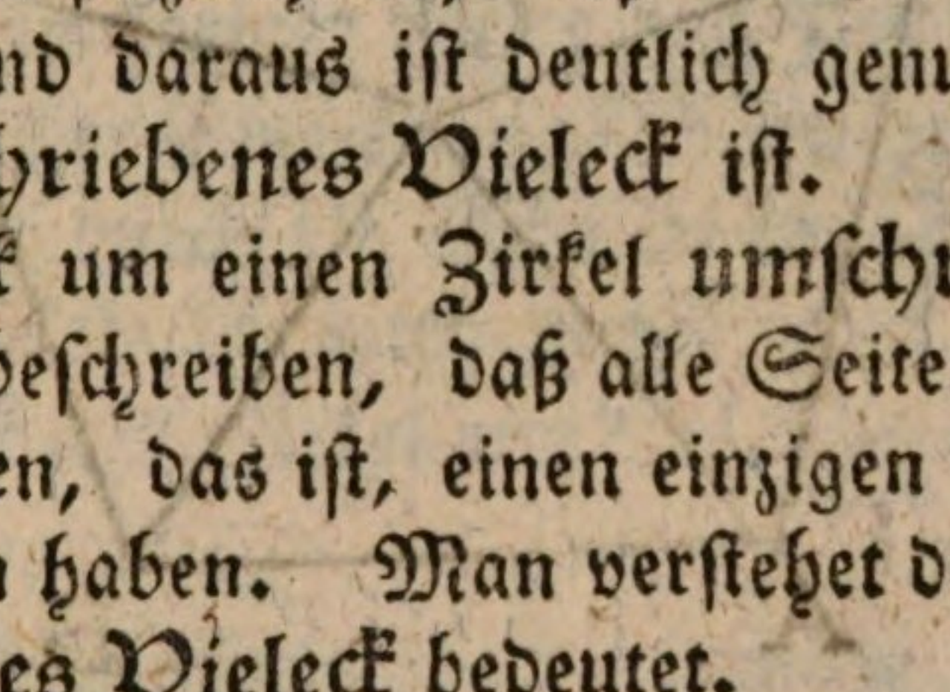
Von vieleckigten Figuren.

§. 1.

Wer die Lehre von den Dreyecken und Parallelogrammen gut begriffen hat, wird bey den Vielecken keine Schwierigkeit finden. Die Erklärungen der nöthigen Kunstwörter sind schon aus dem ersten Hauptstücke (§. 23. 24.) bekannt. Wir wollen hier nur noch folgende beyfügen.

Ein Vieleck in einem Zirkel einschreiben heißt, das Vieleck im Zirkel so zeichnen, daß die Ecken alle im Umkreise liegen, und daraus ist deutlich genug zu verstehen, was ein eingeschriebenes Vieleck ist.

Ein Vieleck um einen Zirkel umschreiben, heißt, das Vieleck so beschreiben, daß alle Seiten desselben den Umkreis berühren, das ist, einen einzigen Punkt mit dem Umkreise gemein haben. Man verstehet demnach was ein umgeschriebenes Vieleck bedeutet.



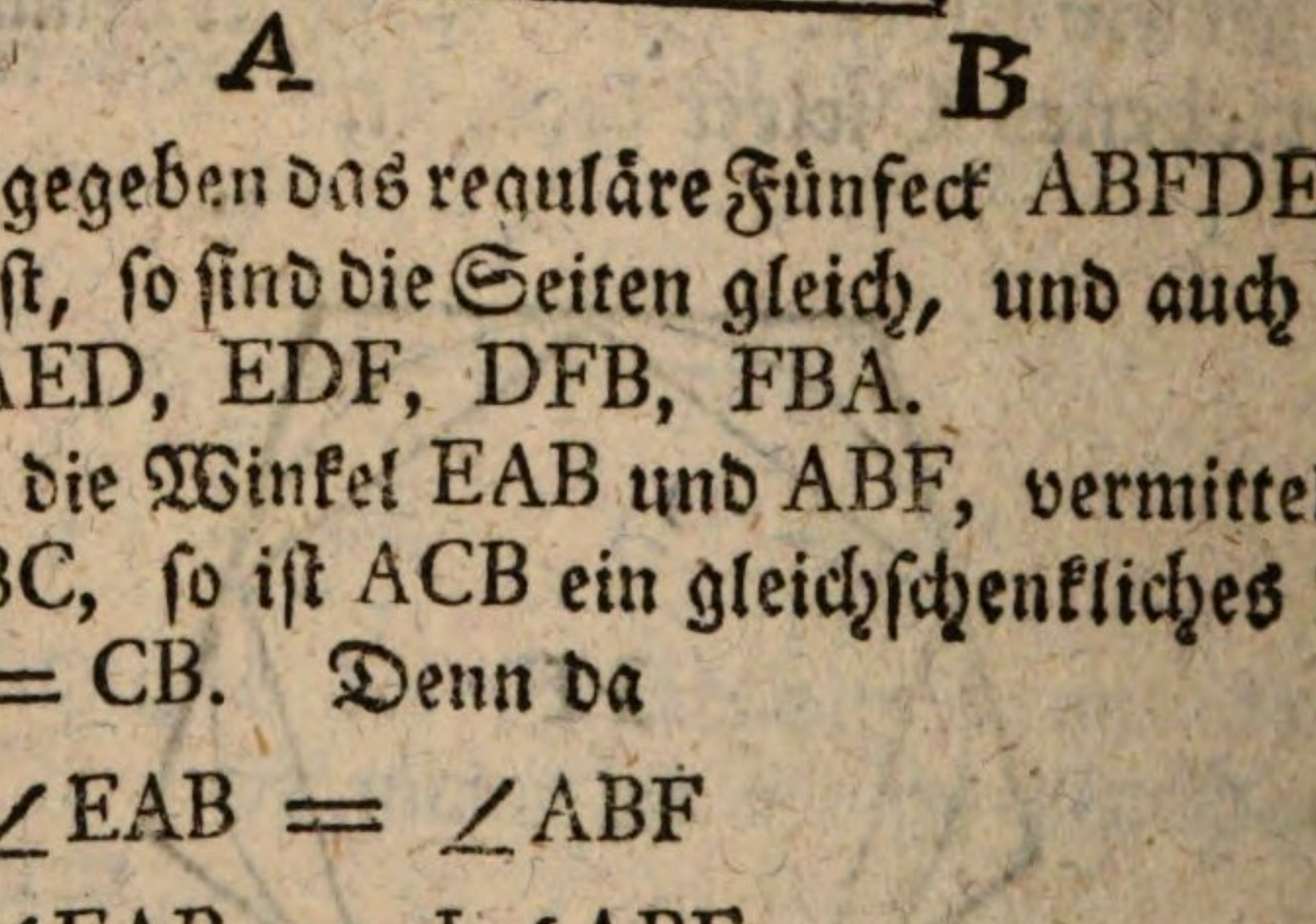
Die

Die Figur M stellet einen Zirkel vor, mit einem eingeschriebenen und einem umgeschriebenen Fünfecke.

Ueberhaupt ist eine Figur in einer andern eingeschrieben, wenn die erste ganz in der andern liegt, und wenn die Gränzen der ersten, so viel es die Beschaffenheit der Figuren zuläßt, die Gränzen der andern berühren. Diese andere heißt alsdann die umgeschriebene Figur.

§. 2.

Jedes reguläre Vieleck kann in so viel ähnlichgleiche und gleichschenkliche Dreyecke eingetheilet werden, als es Seiten hat.



Es sey gegeben das reguläre Fünfeck ABFDE. Weil es regulär ist, so sind die Seiten gleich, und auch die Winkel BAE, AED, EDF, DFB, FBA.

Halbire die Winkel EAB und ABF, vermittelst der Linien AC, BC, so ist ACB ein gleichschenkliches Dreyeck, worin AC = CB. Denn da

$$\angle EAB = \angle ABF$$

$$\text{so ist } \tfrac{1}{2}\angle EAB = \tfrac{1}{2}\angle ABF$$

$$\text{oder } \angle CAB = \angle CBA$$

also ist auch CB = CA (§. 14.).

Aus

Aus dem Punkte C ziehe CE, so ist in den Dreyecken CAB und CAE

$$CA = CA$$

$$AB = AE$$

$$\angle CAB = \angle CAE \ (= \tfrac{1}{2} \angle EAB)$$

Also ist $\triangle CAB \overset{S}{=} \triangle CAE$, und $\angle CEA = \angle CBA = \angle CAB = \tfrac{1}{2} \angle EAB = \tfrac{1}{2} \angle AED$.

Ziehe CD, so läßt sich auf gleicher Art beweisen, daß $\triangle CDE \overset{S}{=} \triangle CAE \overset{S}{=} \triangle CBA$, und so mit den übrigen Dreyecken CDF und CFB.

§. 3.

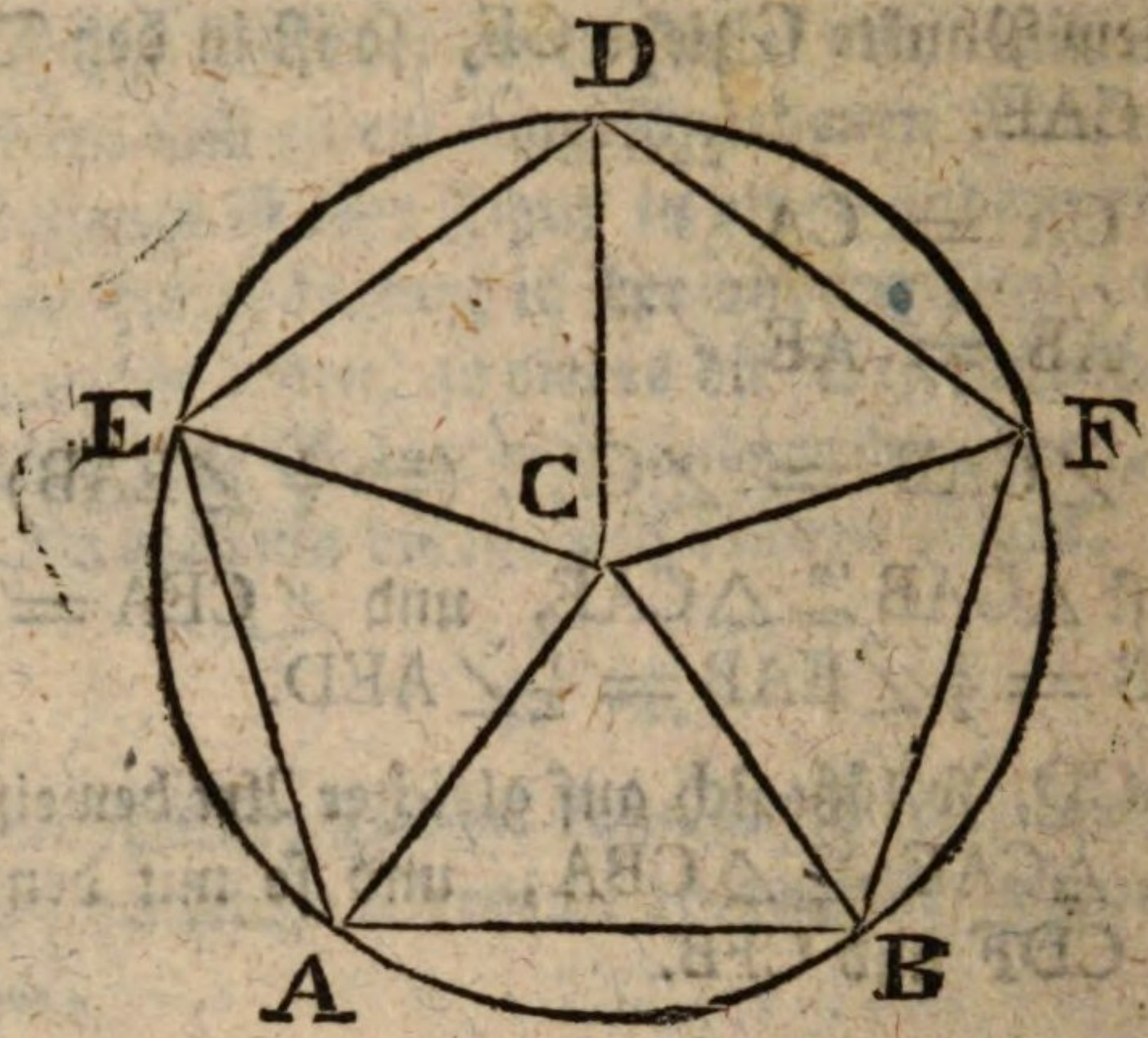
Um jedes reguläre Vieleck läßt sich ein Zirkel umschreiben.

Man nehme in voriger Figur den Punkt C zum Mittelpunkte, und in der Entfernung CA beschreibe man einen Zirkel, so wird er durch die Scheitel der Ecken A, B, F, D und E gehen, folglich wird das Vieleck im Zirkel eingeschrieben, oder der Zirkel um das Vieleck umgeschrieben seyn.

Daß aber der Umkreis alle die Punkte A, B, F, D, E treffen wird, ist leicht einzusehen. Denn weil die fünf Dreyecke ähnlichgleich und gleichschenklich sind, so ist $CA = CB = CF = CD = CE$. Folglich können diese Linien alle Halbmesser des nemlichen Zirkels abgeben.

§. 4.

Wenn am ganzen Umkreise eines Zirkels lauter gleiche Sehnen gezogen werden; so bilden alle diese Sehnen ein reguläres Vieleck.



Es seyen die Sehnen AB, BF, FD, DE, EA gezogen, und alle gleich.

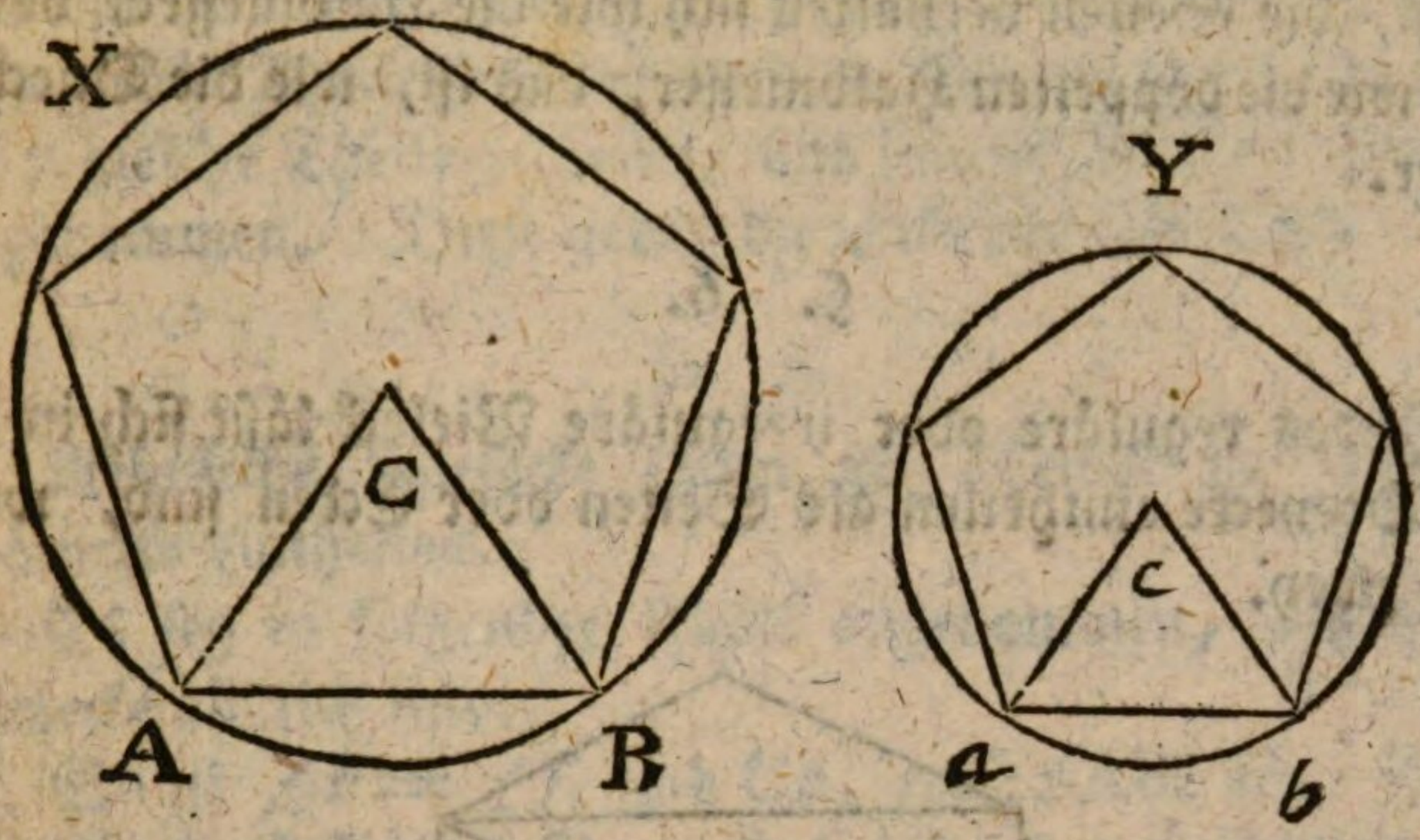
Die Halbmesser AC, BC, FC, DC, EC sind auch gleich.

Daraus ist leicht zu schliessen, erstlich daß alle Dreyecke ACB, BCF, FCD, u. s. f. ähnlichgleich; zweytens daß sie alle gleichschenklich sind und an den Grundlinien gleiche Winkel haben, z. E. $\angle CAB = \angle CBA$, drittens daß alle Winkel CAB, CBA, CBF, CFB, u. s. f. gleich sind; viertens daß folglich auch zwey und zwey derselben gleiche Winkel machen. Also ist z. E. $\angle CAE + \angle CAB = \angle CBA + \angle CAF$, oder $\angle EAB = \angle ABF$.

Und so läßt sich überhaupt beweisen, daß zwey und zwey an einander stoßende gleiche Sehnen allemal gleiche Winkel bilden. Da nun die Seiten AB, BF, FD, DE, EA der Figur und auch die Winkel EAB, ABF, BFD, FDE, DEA gleich sind, so ist die Figur ein reguläres Vieleck.

§. 5.

Die Seiten ähnlicher regulärer Vielecke verhalten sich wie die Halbmesser oder wie die Durchmesser der umgeschriebenen Zirkel.



Es seyen zwey ähnliche reguläre Vielecke X und Y, das ist reguläre Vielecke von gleich viel Seiten, z. E. von 5 Seiten.

Das Vieleck X bestehet aus 5 ähnlichgleichen Dreyecken wie ACB, die um den Mittelpunkt C gleiche Winkel haben. (§. 2.)

Da nun alle 5 Winkel um den Punkt C so viel machen als 4 R. (II. §. 15), so ist jeder Winkel als $ACB = \frac{4R}{5} = \frac{4}{5} R$.

Aus der nemlichen Ursach ist $\angle acb = \frac{4}{5} R$; also ist $\angle ACB = \angle acb$.

Es ist ferner (§. 2.)

$$AC = BC$$

$$ac = bc$$

folglich $AC, ac :: BC, bc$.

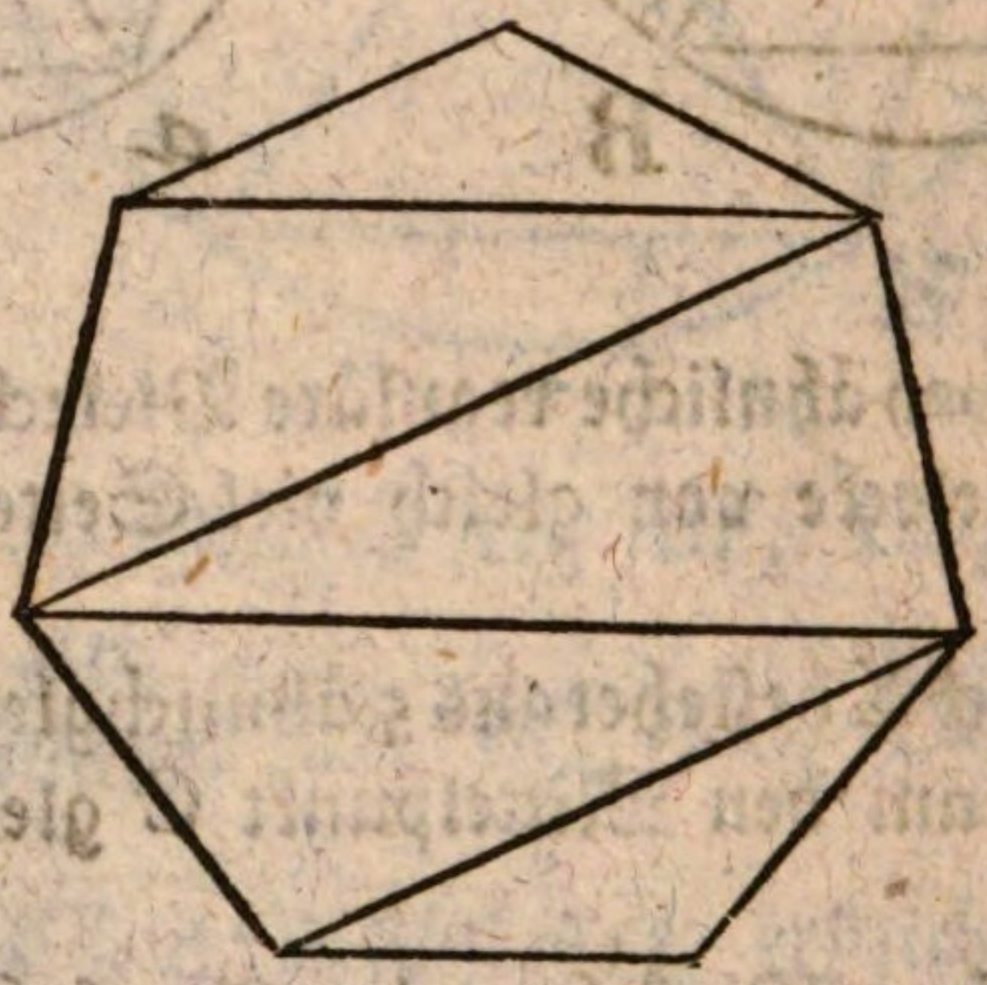
Die Dreyecke ACB und *acb* haben also den nemlichen Winkel in C und *c*, und die anliegenden Seiten sind proporzioniret. Folglich sind beyde Dreyecke ähnlich (IV. §. 7.) und es ist

$$AB, ab :: AC, ac$$

das ist, die Seiten verhalten sich wie die Halbmesser, oder auch wie die doppelten Halbmesser, das ist, wie die Durchmesser.

§. 6.

Jedes reguläre oder irreguläre Vieleck läßt sich in so viel Dreyecke eintheilen als Seiten oder Ecken sind, weniger zwey.



Um diese Theilung zu verrichten, ziehe man, wie in der Figur zu sehen ist, gerade Linien von einer Ecke zur andern, von der linken zur rechten und von der rechten zur linken, so giebt jede Seite ein Dreyeck, ausgenommen am Anfange und am Ende, da zwey Seiten des Vielecks das erste und letzte Dreyeck geben.

§. 7.

In einem regulären Vielecke erhält man die Ecke, welche zwey uud zwey Seiten mit einander machen, wenn man zwey rechte Ecken in so viel gleiche Theile theilet, als Ecken oder Seiten sind, und zwey Theile wegläßt.

In voriger Figur ist das Vieleck ein Siebeneck. Es ist in 7 weniger 2 Dreyecke getheilet. Die Ecken jedes Dreyeckes machen zusammen den Werth von 2 Rechten. Also machen alle Ecken zusammen so viel als 7 weniger 2mal 2 R.

Da-

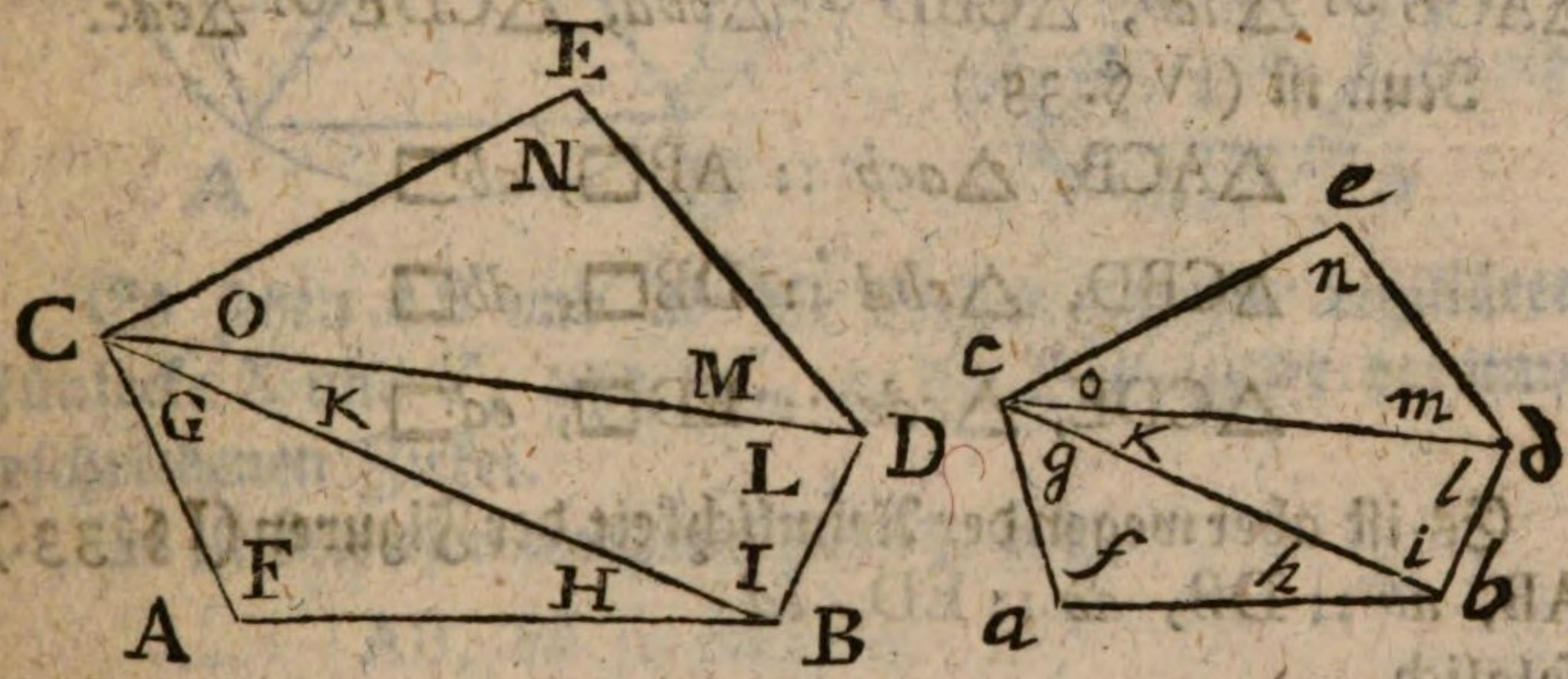
Da nun im VIIeck 7 gleiche Ecken sind, so muß dieses Produkt in 7 gleiche Theile getheilet werden. Oder es werden 2 rechte in 7 gleiche Theile getheilet, und solcher Theile 7 weniger 2 genommen. Diese geben die Ecke des Vieleckes.

§. 8.

Aehnliche Vielecke lassen sich allemal in ähnliche Dreyecke eintheilen.

Es sey in folgender Figur angenommen, daß beyde Vielecke ähnlich sind.

So ist $\angle F = \angle f$, und CA, *ca*, :: AB, *ab*. Folglich (IV §. 7) sind die Dreyecke CAB und *cab* ähnlich, es ist also $\angle G = \angle g$, $\angle H = \angle h$, und auch CB, *cb* :: AB, *ab* :: BD, *bd*.



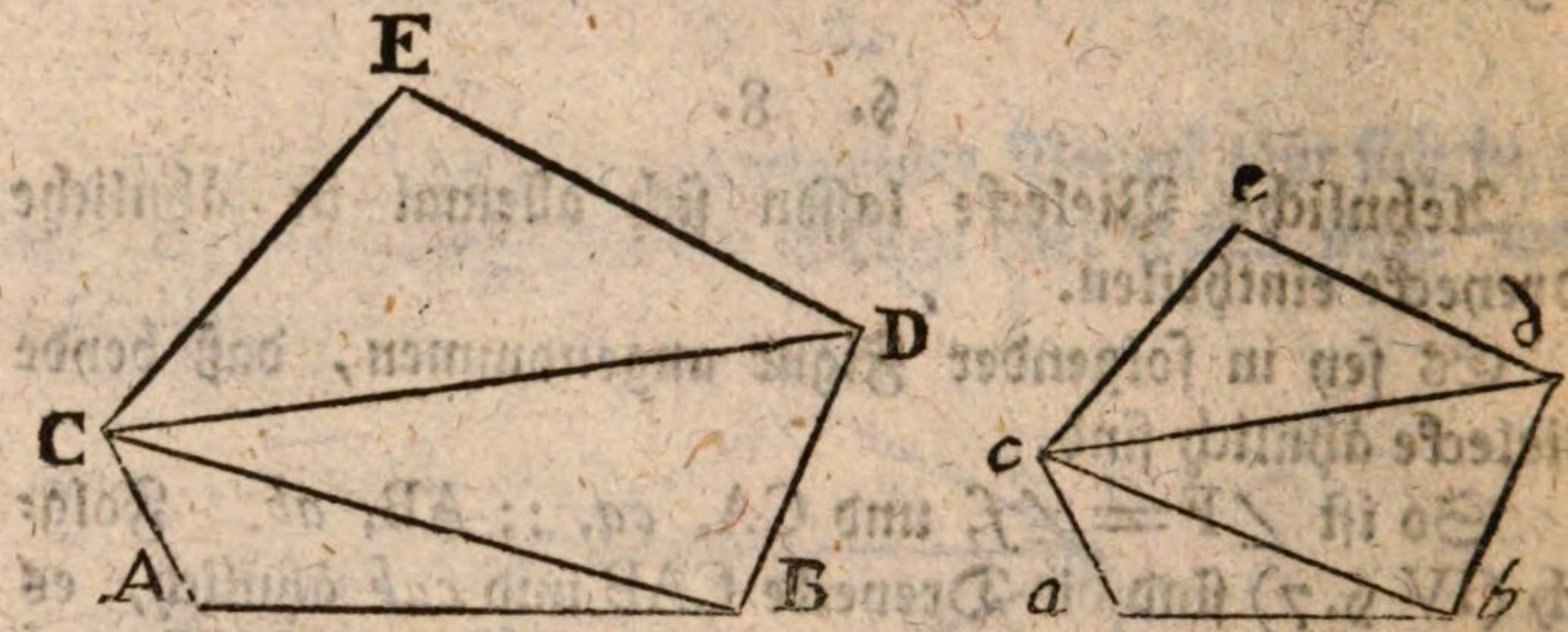
Weil $\angle (H + I) = \angle (h + i)$ und jetzt bewiesen, daß $\angle H = \angle h$, so ist $\angle I = \angle i$. Da nun $\angle I = \angle i$, und CB, *cb* :: BD, *bd*, so sind die Dreyecke CBD, *cbd* ähnlich, und es ist $\angle L = \angle l$, $\angle K = \angle k$, und CD, *cd* :: BD, *bd* :: DE, *de*.

Weil $\angle (L + M) = \angle (l + m)$ und CD, *cd* :: ED, *ed*, so sind wiederum die Dreyecke CDE, *cde* ähnlich.

Und so kann man den Beweis nöthigen Falls weiter fortsetzen.

§. 9.

Aehnliche Vielecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer homologen Seiten.



Beweis. Es seyen ABDEC, *abdec* zwey ähnliche Vielecke, z. E. Fünfecke.

So lassen sie sich in ähnliche Dreyecke eintheilen, als $\triangle ACB \sim \triangle acb$, $\triangle CBD \sim \triangle cbd$, $\triangle CDE \sim \triangle cde$.

Nun ist (IV §. 35.)

$$\triangle ACB, \triangle acb :: AB\square, ab\square$$

$$\triangle CBD, \triangle cbd :: DB\square, db\square$$

$$\triangle CDE, \triangle cde :: ED\square, ed\square$$

Es ist aber wegen der Aehnlichkeit der Figuren (I §. 33.)

$$AB, ab :: DB, db :: ED, ed$$

folglich

$$AB\square, ab\square :: DB\square, db\square :: ED\square, ed\square$$

Folglich ist

$$\left.\begin{matrix}\triangle ACB, \triangle acb \\ \triangle CDB, \triangle cbd \\ \triangle CDE, \triangle cde\end{matrix}\right\} :: AB\square, ab\square$$

folglich ist

$$(\triangle ACB + \triangle CDB + \triangle CDE), (\triangle acb + \triangle cbd + \triangle cde) :: AB\square, ab\square$$

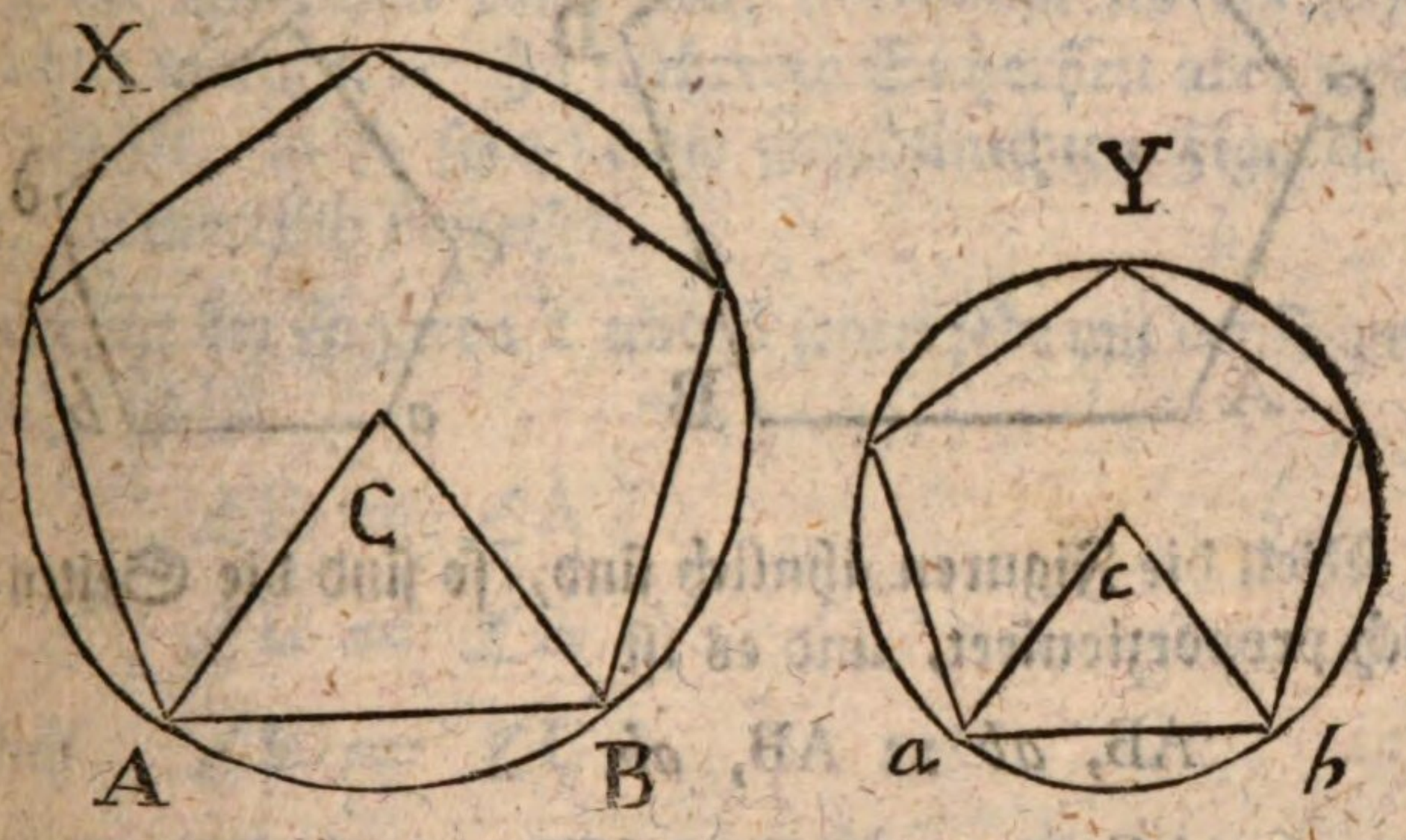
oder

oder

Vieleck ABDEC, Vieleck *abdec* :: AB□, *ab*□.

§. 10.

Reguläre Vielecke von gleich viel Seiten verhalten sich wie die Quadrate der Halbmesser oder der Durchmesser der umgeschriebenen Zirkel.



Es seyen AB und *ab* die Seiten zweyer regulärer Fünfecke X und Y, und AC, *ac* die Halbmesser der umgeschriebenen Zirkel.

Es ist bewiesen worden, daß (§. 5.)

AB, *ab* :: AC, *ac*

daher ist AB², *ab*² :: AC², *ac*²

Es ist aber AB², *ab*² :: X, Y ((§. 9.)

folglich X, Y :: AC², *ac*²

Nimmt man die Halbmesser 2AC, 2*ac*, so ist $(2AC)^2 = 4(AC)^2$ und $(2ac)^2 = 4(ac)^2$, und weil

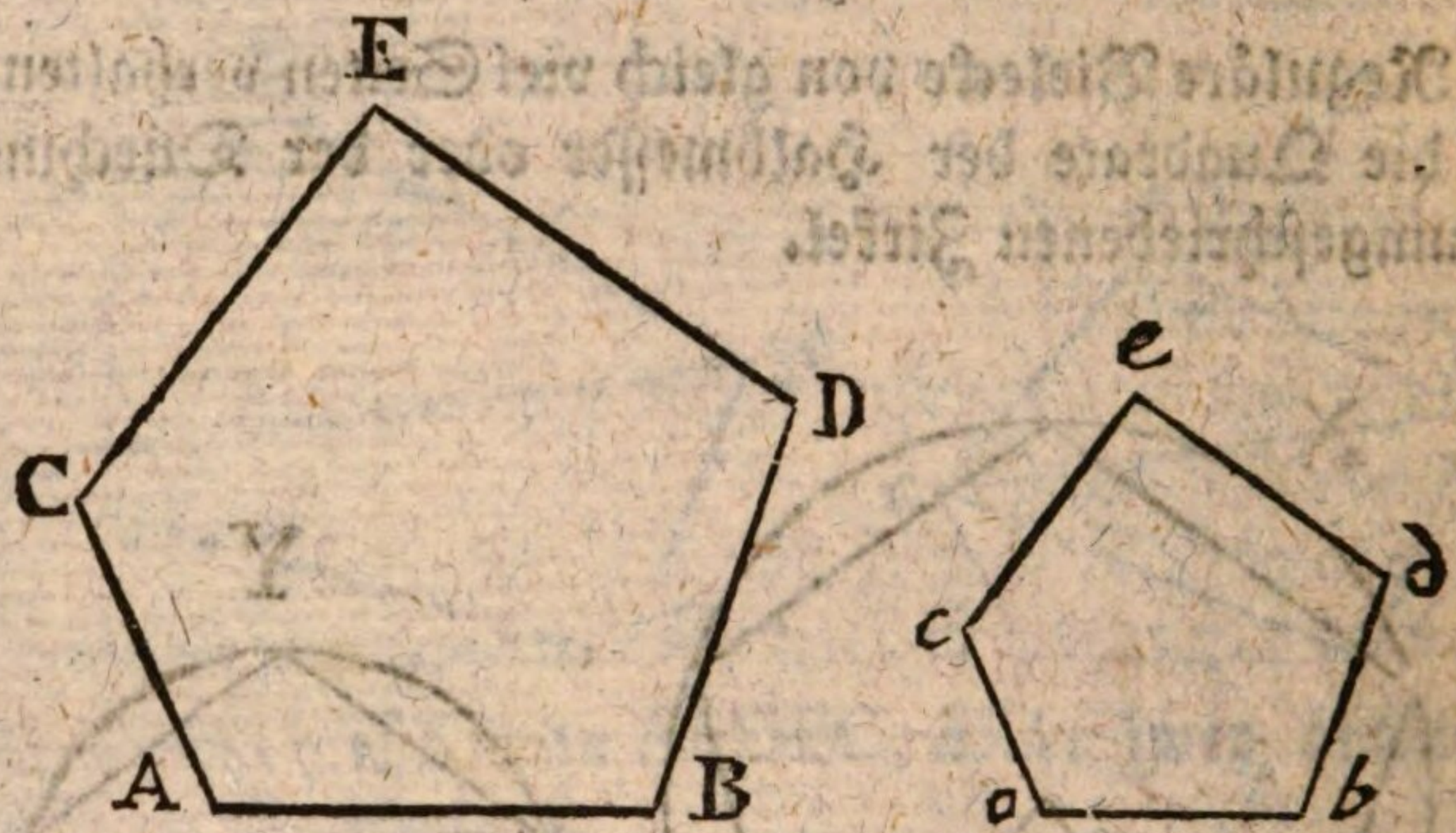
X, Y :: AC², *ac*²

so ist auch X, Y :: $4(AC)^2$, $4(ac)^4$

oder X, Y :: $(2AC)^2$, $(2ac)^2$

§. 11.

Die Umfänge oder Perimeter ähnliche Figuren, verhalten sich wie die homologen Seiten der Figuren.



Weil die Figuren ähnlich sind, so sind die Seiten alle gleich proporzioniret, und es ist

AB, *ab* :: AB, *ab*

AC, *ac* :: AB, *ab*

CE, *ce* :: AB, *ab*

ED, *ed* :: AB, *ab*

DB, *db* :: AB, *ab* ::

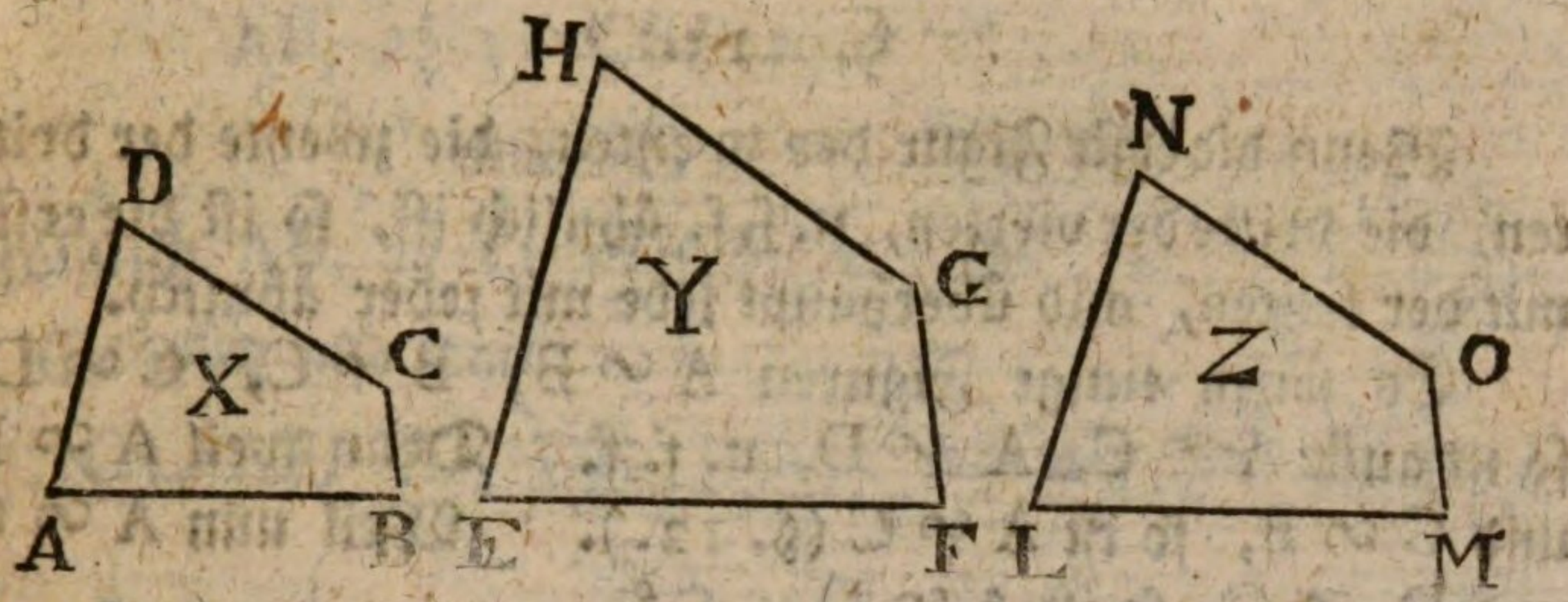
Folglich ist

(AB + AC + CE + ED + DB), (*ab* + *ac* + *ce* + *ed* + *db*)
:: AB, *ab*

Das ist, der ganze Umfang ACEDBA verhält sich zum ganzen Umfange *acedba* wie die Seiten AB und *ab*.

§. 12.

Wenn zwey Figuren jede einer dritten ähnlich sind, so sind sie auch unter sich ähnlich.



Diese Wahrheit kann zwar überhaupt als ein Axiom betrachtet werden. Zu mehrerer Sicherheit aber wollen wir dieselbe, in so fern sie die geradlinichten Figuren betrifft, geometrisch beweisen.

Gesetzt die Figuren Y und Z seyen jede mit der Figur X ähnlich, so ist

$$\angle E = \angle A$$

$$\angle L = \angle A$$

folglich $\angle E = \angle L$

und so sind alle übrigen Winkel der Figur Y den homologen Winkeln der Figur Z gleich.

Ferner ist

EF, EH :: AB, AD

ML, LN :: AB, AD

folglich EF, EH :: ML, LN

oder EF, ML :: EH, LN

und so läßt sich von jedem andern Paar Seiten in beyden Figuren Y und Z beweisen, daß sie in gleichem Verhältnisse stehen.

Da also in den Figuren Y und Z die homologen Seiten proporzioniret und die Winkel gleich sind, so sind beyde Figuren ähnlich.

§. 13.

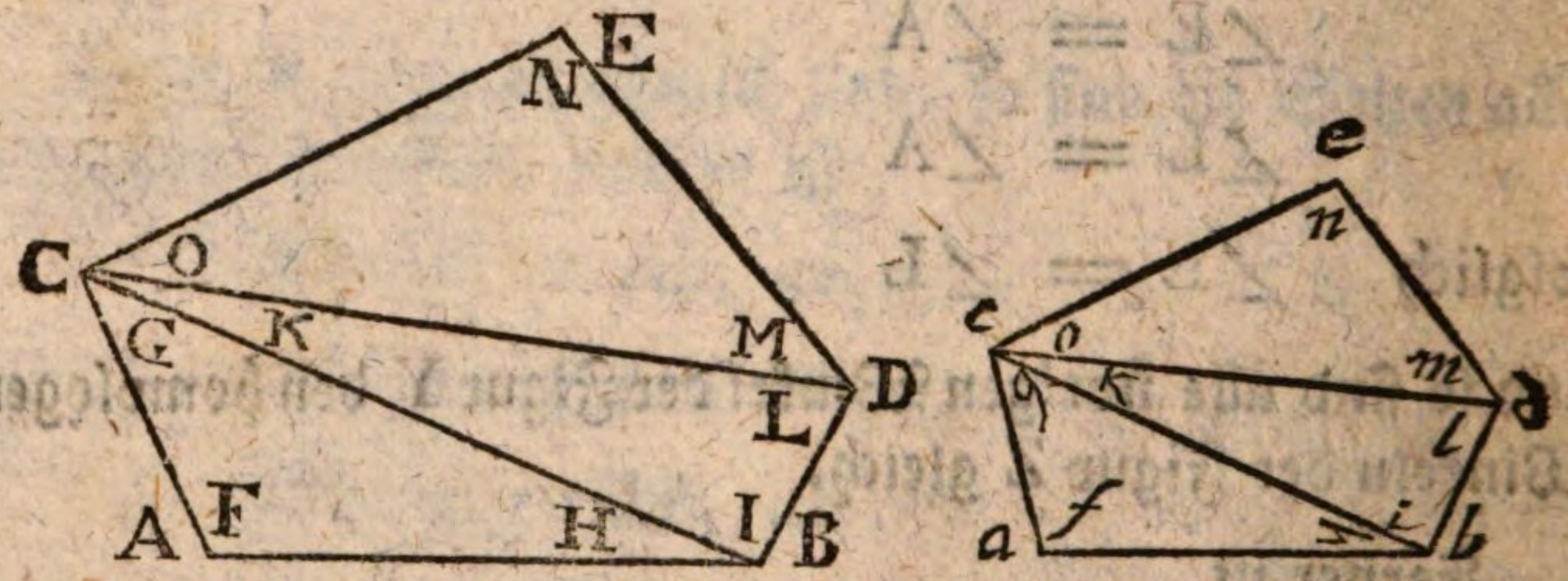
Wenn die erste Figur der zweyten, die zweyte der dritten, die dritte der vierten, u. s. f. ähnlich ist, so ist die erste mit der letzten, und überhaupt jede mit jeder ähnlich.

Es seyen einige Figuren A ∽ B, B ∽ C, C ∽ D, so ist auch A ∽ C, A ∽ D, u. s. f. Denn weil A ∽ B und C ∽ B, so ist A ∽ C (§. 12.). Weil nun A ∽ C und D ∽ C, so ist A ∽ D u. s. f.

§. 14.

Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie eine geradlinichte Figur beschreiben die einer gegebenen ähnlich sey.



Auflösung. Es solle auf *ab* eine Figur beschrieben werden, die der Figur ABDECA ähnlich sey.

Theile die gegebene Figur in lauter Dreyecke ACB, BCD, DEC, und beschreibe über *ab* ähnliche Dreyecke *acb*, *bcd*, *dec*.

So sind die Winkel beyderseits gleich. Denn es ist ∠F = ∠*f*. Es ist ∠H = ∠*h* und ∠I = ∠*i*, folglich ∠(H + I) = ∠(*h* + *i*). Es ist ∠L = ∠*l*, ∠M = ∠*m*, folglich ∠(L + M) = ∠(*l* + *m*). Es ist ∠N = ∠*n*. Ferner ∠O = ∠*o*, ∠K = ∠*k*, ∠G = ∠*g*, folglich ∠(O + K + G) = ∠(*o* + *k* + *g*).

Die Seiten sind proporzionirt. Denn es ist wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke CA, *ca* :: AB, *ab*. Ferner ist

AB,

AB, *ab* : : CB, *cb*

und CB, *cb* : : BD, *bd*

folglich AB, *ab* : : BD, *bd* u. s. w.

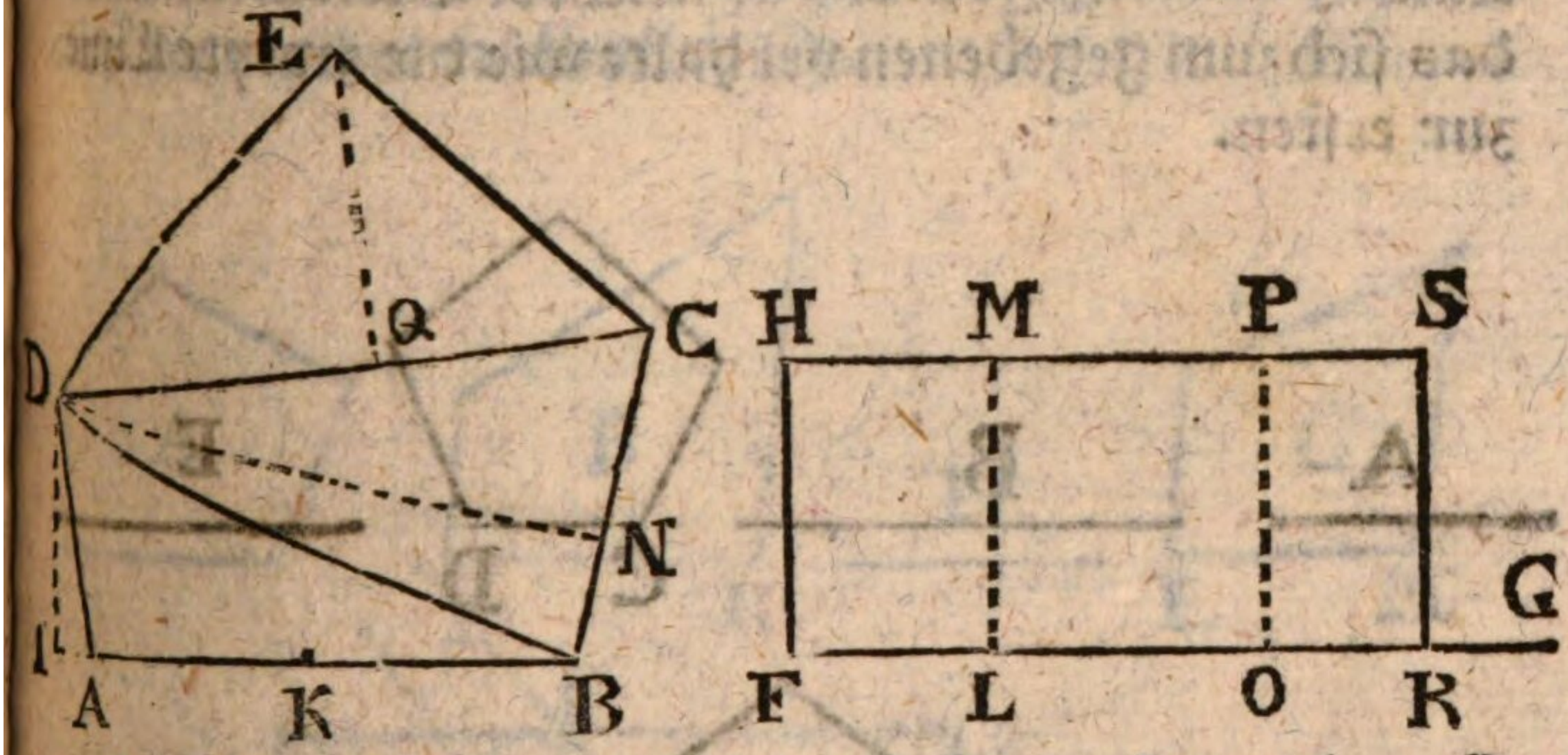
Es wird also seyn

CA, AB, BD, DE, EC : : *ca*, *ab*, *bd*, *de*, *ec*.

§. 15.

Aufgabe.

Es ist ein Vieleck gegeben. Es soll ein Parallelogramm gemacht werden das ihm am Flächen-Inhalte gleich sey.



Auflösung. Theile das Vieleck in lauter Dreyecke, z. E. das Fünfeck ABCED in die Dreyecke ABD, BDC, CED.

Ziehe eine unbestimmte Linie FG, und nimm die willkührliche Höhe FH.

Sage wie FH Höhe des Parallelogramms, zu DI, Höhe des Dreyecks ABD, so ist AK halbe Grundlinie des Dreyecks ABD zu FL Grundlinie des Parallelogramms LH das dem Dreyecke gleich ist. (§. 49. 64.)

Sage ferner: wie ML (= FH) zu DN, so ist $\frac{1}{2}$ BC zu LO, Grundlinie des Parallelogramms OM = △DBC.

Sage, wie OP zu EQ, so ist $\frac{1}{2}$ DC zu OR, Grundlinie des Parallelogramms RP = △DCE.

Da

Da nun $\triangle ABD = \square LH$
$\triangle DBC = \square OM$
$\triangle DCE = \square RP$

so ist

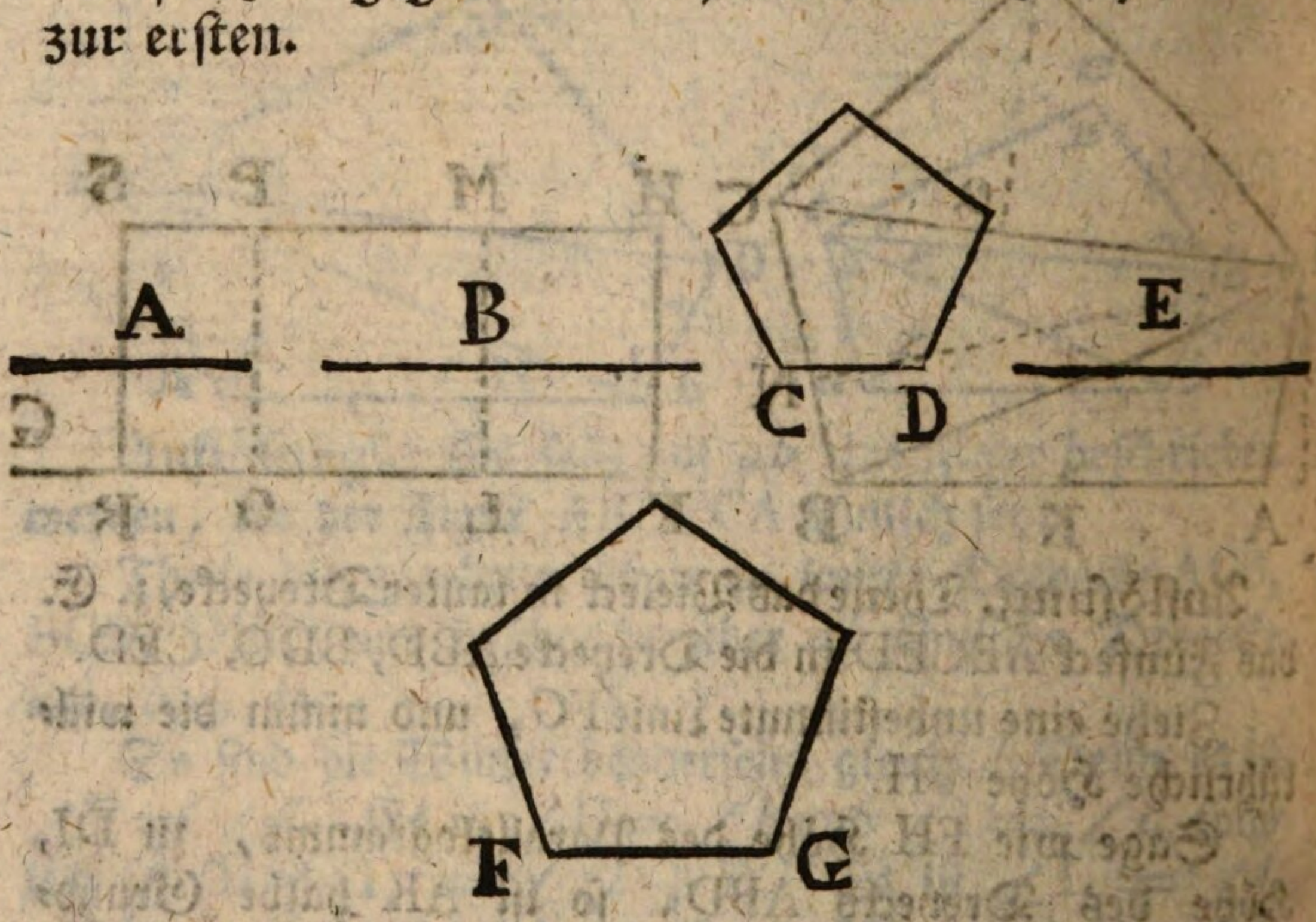
$\triangle ABD + \triangle DBC + \triangle DCE = \square LH + \square OM + \square RP$

oder, Vieleck $ABCED = \square FS$.

§. 16.

Aufgabe.

Es sind gegeben ein Vieleck und zwey gerade Linien. Man soll ein ähnliches Vieleck machen das sich zum gegebenen verhalte wie die zweyte Linie zur ersten.



Auflösung. Die Auflösung geschiehet wie beym Dreyecke (§. 51.) und beym Parallelogramm.

Man suchet E vermittelst dieser Proporzion

A, B :: CD, E.

Zwi-

Zwischen CD und E wird die mittlere Proporzionallinie FG gesucht.

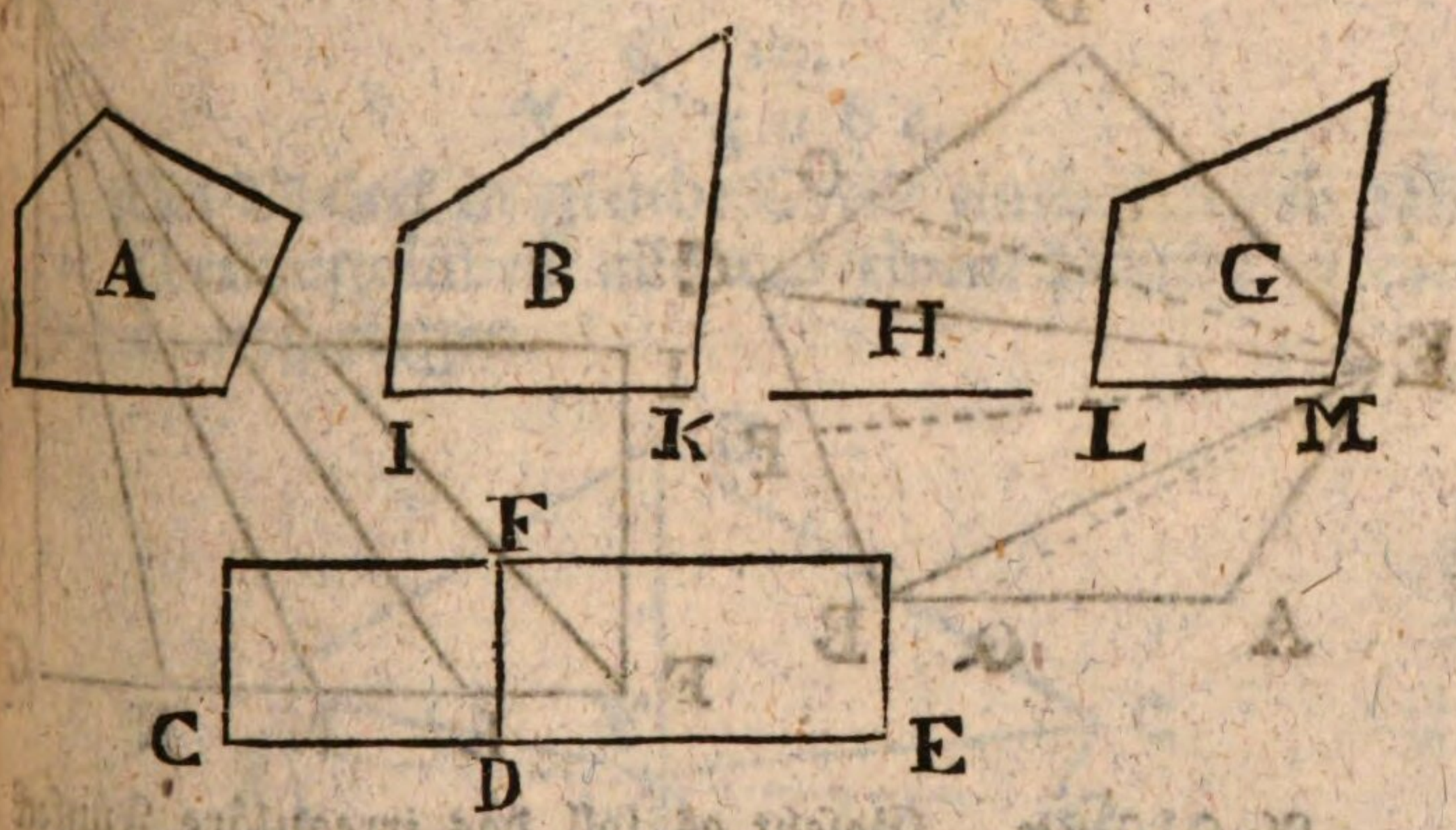
Auf dieser wird ein Vieleck beschrieben das dem gegebenen auf CD ähnlich sey.

Der Beweis ist wie beym Dreyecke, indem sich nicht nur die Dreyecke sondern überhaupt alle Vielecke verhalten, wie die Quadrate ihrer homologen Seiten, oder ihrer Grundlinien.

§. 17.

Aufgabe.

Es sind zwey Vielecke gegeben. Es soll ein drittes gemacht werden, das dem einen gegebenen gleich, und dem anderen ähnlich sey.



Auflösung. Es soll ein Vieleck gemacht werden, das dem A gleich und dem B ähnlich sey.

Verwandle die Figur A in ein Parallelogramm CF. (§. 15)

Verwandle auch die Figur B in ein Parallelogramm EF von gleicher Höhe DF.

So ist

$$\square CF, \square EF :: CD, DE$$

oder

oder Figur A, Fig. B :: CD, DE.

Nun muß also eine Figur G gemacht werden, ähnlich mit B und gleich mit A. so daß

B, G :: B, A

oder B, G :: DE, CD

Deswegen (§. 16.) wird zu DE, CD und IK die vierte Proporzional-Linie H gesucht.

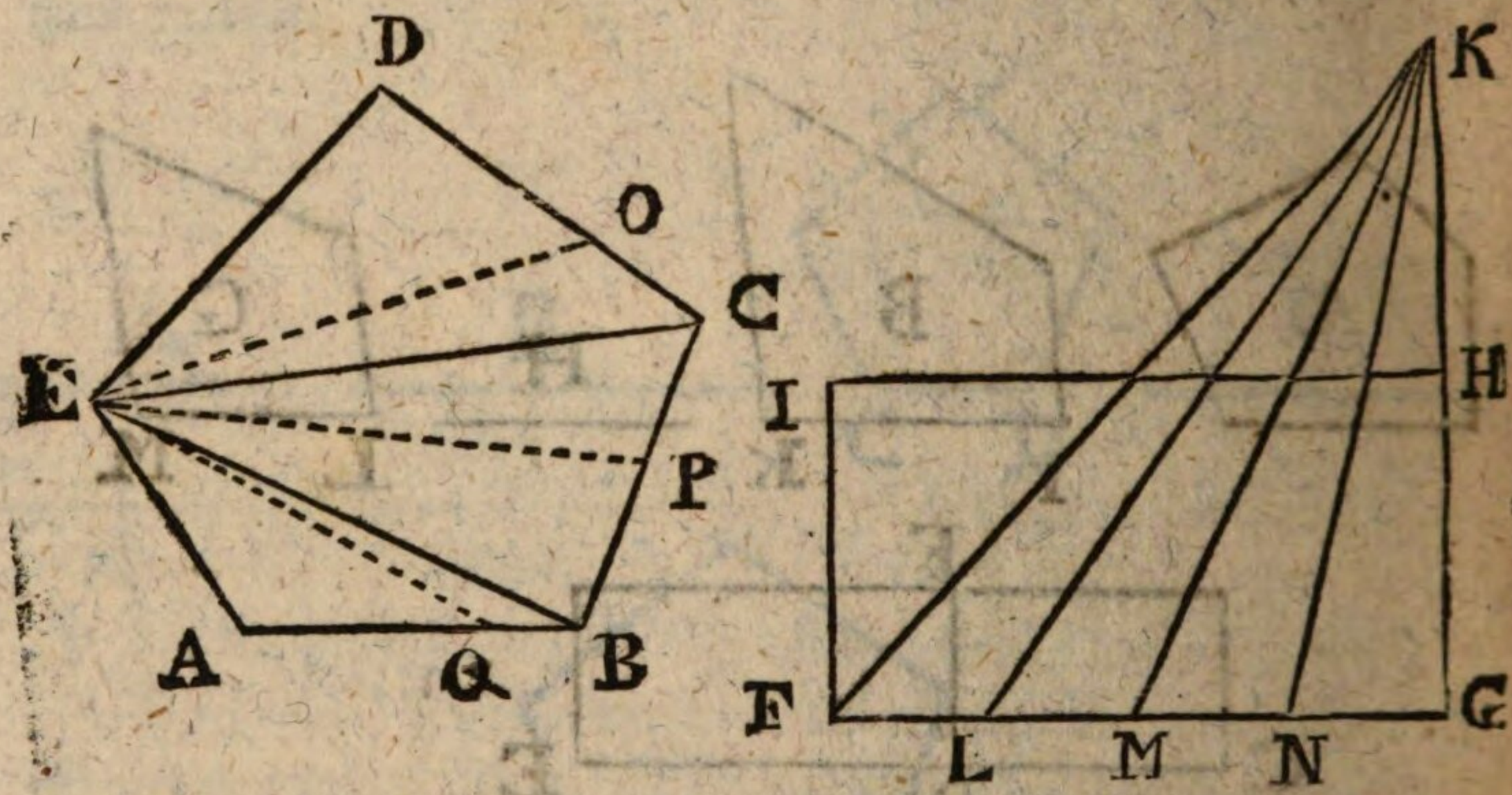
Zwischen IK und H wird die mittlere Proporzional-Linie LM gesucht, und auf derselben die Figur G ähnlich mii B beschrieben.

Zum Beweise siehe IV H. §. 52.

§. 18.

Aufgabe.

Ein jedes Vieleck in gleiche Theile eintheilen.



Auflösung. Gesetzt es soll das irreguläre Fünfeck ABCDE in vier gleiche Theile getheilt werden.

Verwandle das gegebene Vieleck in ein Parallelogramm FGHI, (§. 15) und dieses in ein Dreyeck FKG. (IV §. 48.)

Theile solches Dreyeck in vier gleiche Theile, nemlich △FKL = △LKM = △MKN = △NKG. (IV §. 56)

Vom Dreyeck DEC, dessen Seite CD als Grundlinie betrachtet wird, nimm ab den Theil ECO = NKG, (IV §. 54.)

wenn

wenn es angeht. Gienge es nicht an, so müßte das Dreyeck CED vom Dreyecke NKG, und das übrige vom △CEB abgenommen werden. Wir wollen annehmen es gehe an, das ist, es sey △CED größer als der vierte Theil der Figur. So ist △DEO = △NKG = $\frac{1}{4}$ der Figur.

Von △NKG nimm ab △OEC, das übrige nimm ab von △CEB, so bleibet △PEB, und es ist △OEC + △CEP oder das Trapez OEPCO = $\frac{1}{4}$ der Figur.

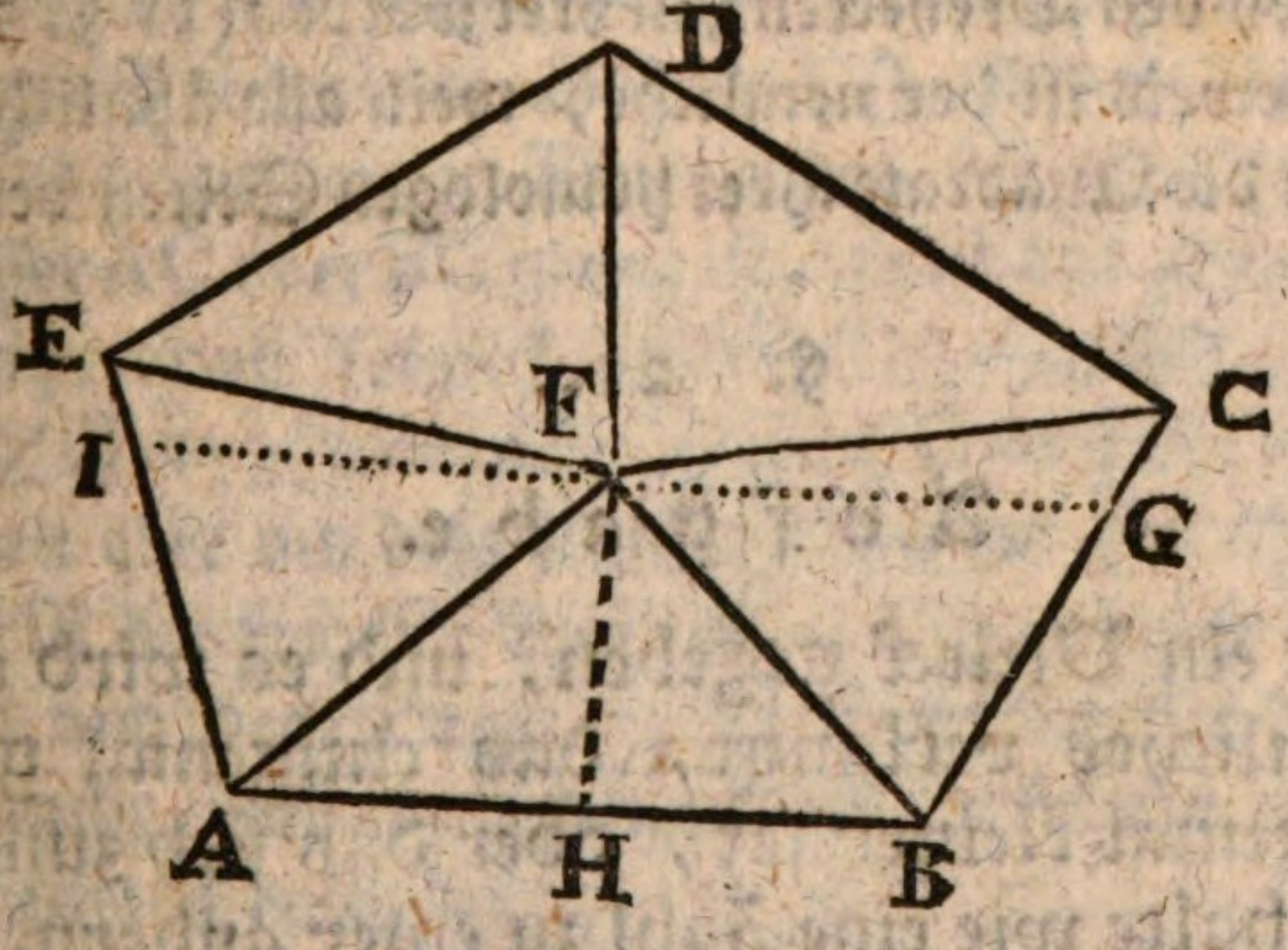
Von △NKG uimm ab △PEB, und das übrige nimm ab von △BEA, so bleibt △QEA, und es ist △PEB + △BEQ oder das Trapez PEQBP = $\frac{1}{4}$ der Figur.

Da nun schon drey Viertel der Figur abgenommen sind, so bleibet zuletzt △QEA = $\frac{1}{4}$ der Figur, und die Eintheilung in 4 gleiche Theile ist geschehen. Man verfährt auf einer ähnlichen Art, wenn mehr oder weniger Theile verlanget werden.

§. 19.

Aufgabe.

Ein Vieleck in gleiche Theile eintheilen, so daß die Theiluugslinien alle aus einem Punkte in der Figur entspringen.



Auflösnng. Gesetzt das irreguläre Fünfeck ABCDE soll in 4 gleiche Theile getheilt werden, so daß die Theilungslinien aus dem Punkte F entspringen.

Ver-

Verwandle wie vorher das gegebne Vieleck in ein Parallelogramm und dann in ein Dreyeck, theile dieses in 4 gleiche Theile.

Ziehe aus dem Punkte F die Linien FD, FC, FB, FA, FE nach den Enden der Figur.

Versuche vom Dreyeck DFC den vierten Theil der Figur abzunehmen. Gehet es nicht an, so nimm das Dreyeck DFC vom vierten Theile der Figur ab, und das übrige vom △CFB, so daß △DFC + △CFG = $\frac{1}{4}$ der Figur. Fahre so fort, wie in voriger Aufgabe, und mache daß △GFB + △BFH = $\frac{1}{4}$ der Figur, desgleichen △HFA + △AFI = $\frac{1}{4}$ der Figur, so bleibet zulezt △IFE + △EFD = $\frac{1}{4}$ der Figur.

§. 20.

Aufgabe.

Zwey ähnliche Figuren zusammensetzen oder eine von der andern abziehen, so daß wiederum eine ähnliche Figur entstehe.

Auflösung. Dieses geschiehet auf die nemliche Art, wie schon bey den Dreyecken gelehret worden (IV §. 58. 59.) und der Beweis ist der nemliche, weil alle ähnliche Figuren sich wie die Quadrate ihrer homologen Seiten verhalten.

§. 21.

Aufgabe.

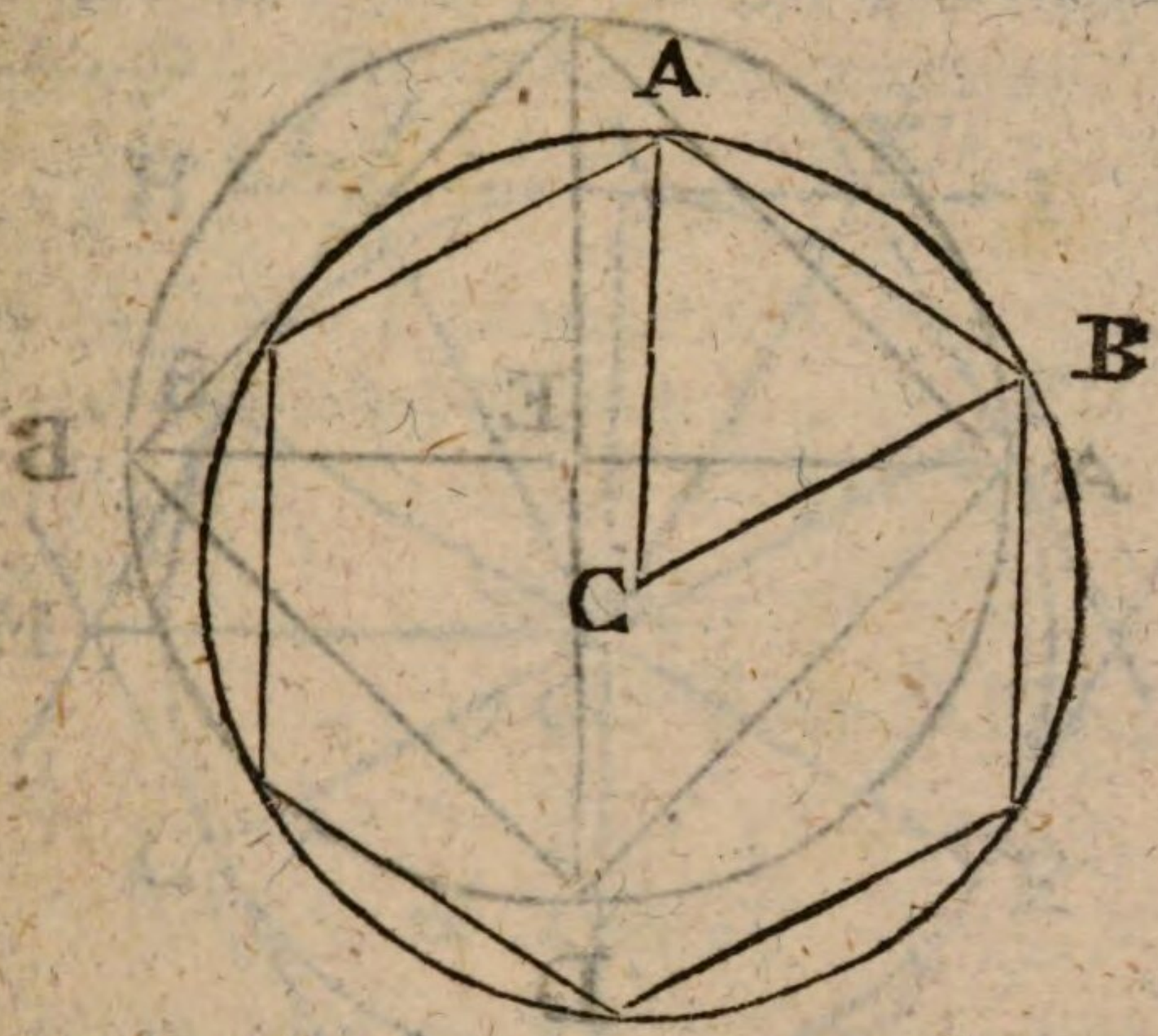
Es ist ein Vieleck gegeben, und es wird ein anderes ähnliches verlangt, das einigemal größer, oder einigemal kleiner sey, oder das sich zum gegebenen verhalte wie eine Zahl zu einer andern.

Auflösung. Man verfahre wiederum wie bey den Dreyecken. (IV §. 61, 62, 63.)

§. 22.

Aufgabe.

Es ist ein Zirkel gegeben. Es soll drinn ein reguläres Dreyeck oder Sechseck eingeschrieben werden.



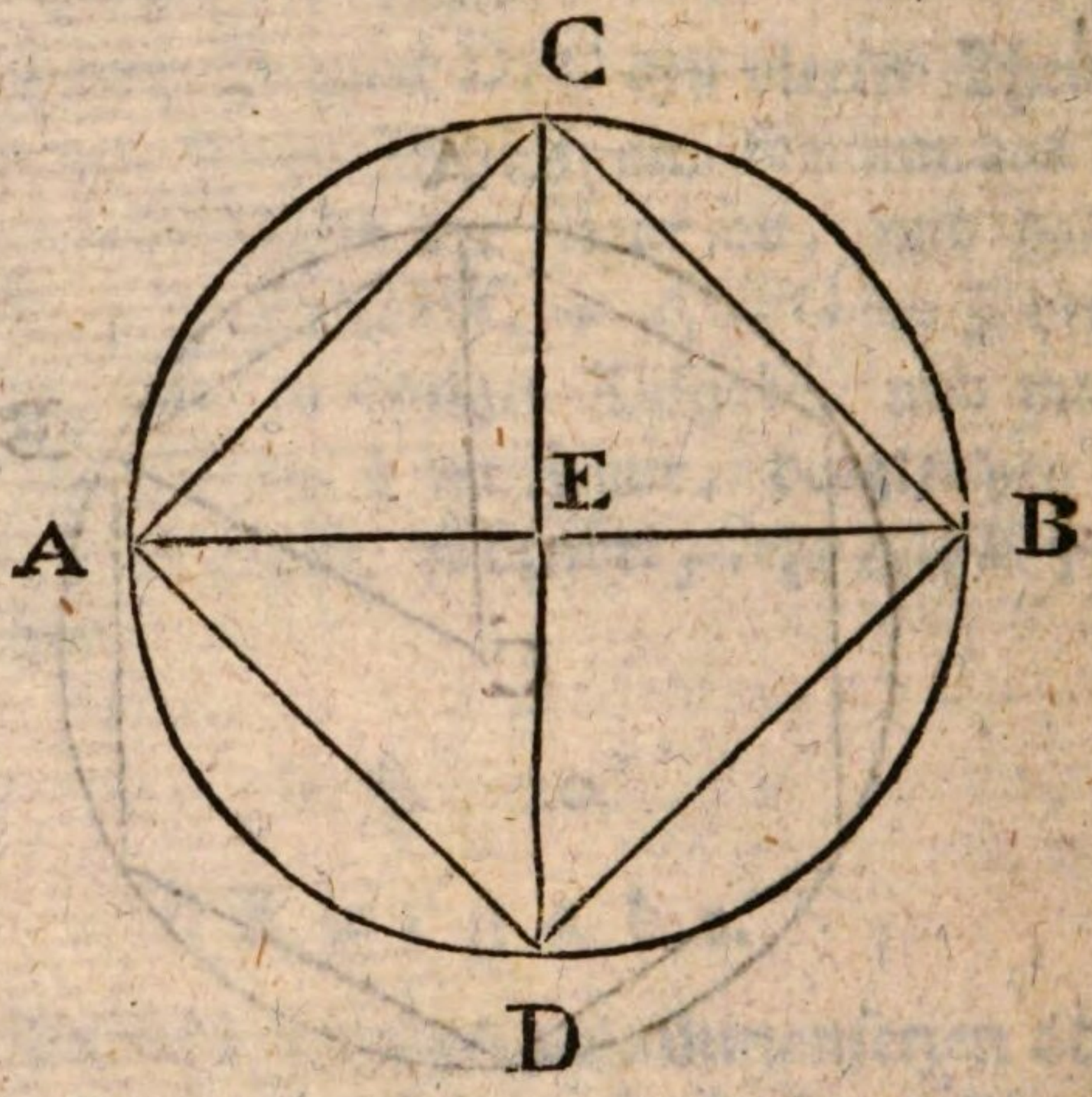
Auflösung. Nimm den Halbmesser AC und trage ihn auf dem Umkreise herum, so wird er denselben genau in 6 gleiche Theile eintheilen. Ziehe die Sehnen von einem Theilungs-Punkte zum anderen, so ist das Sechseck im Zirkel eingeschrieben. Denn wenn die Sehne AB dem Halbmesser AC oder BC gleich ist, so ist das Dreyeck ABC gleichseitig, und folglich auch gleichwinklich. Da nun $\angle A + \angle B + \angle C = 2R$, so ist $\angle C = 2R : 3 = \frac{2}{3}R$. Es können aber um dem Punkte C herum 4 Rechte liegen, wovon $\frac{2}{3}R$ der sechste Theil ist. Also können der Winkel ACB und das Dreyeck ACB sechsmal um den Punkt C angebracht werden, woraus im Zirkel ein eingeschriebenes Sechseck entstehet.

Wird das eingeschriebene reguläre Dreyeck verlanget, so theilet man ebenfalls den Umkreis in 6 gleiche Theile, läßt aber jeden zweyten Theilungspunkt aus der Acht und ziehet die Sehnen.

§. 23.

Aufgabe.

In einem Zirkel ein reguläres Viereck einschreiben.

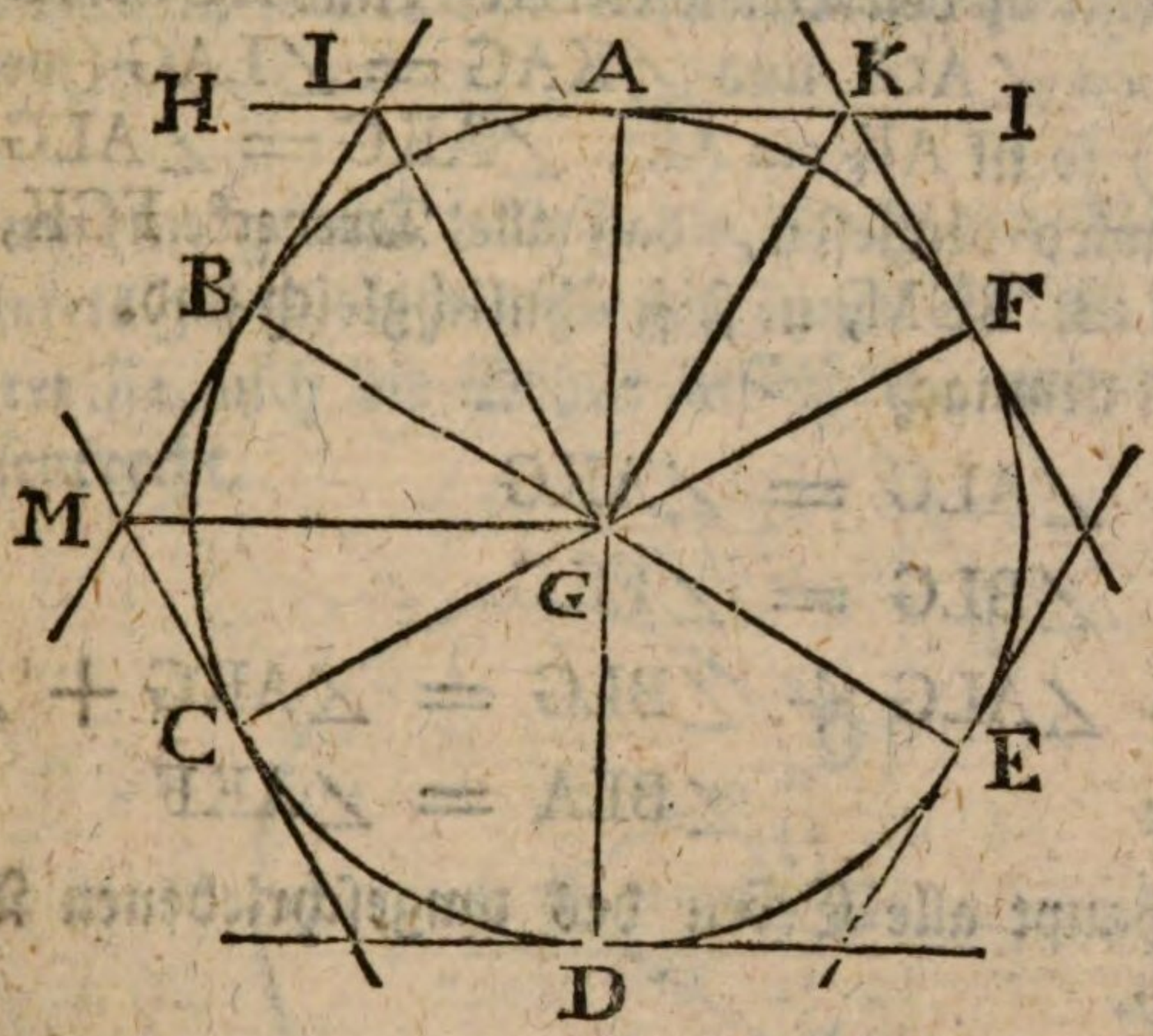


Auflösung. Ziehe die beyden Diameter AB, CD senkrecht auf einander, so entstehen vier rechte Ecken um den Mittelpunkt E, und vier ähnlichgleiche und gleichschenkliche Dreyecke AEC, CEB, BED, DEA, weil nicht nur die Ecken bey E, als rechte, sondern auch die Seiten EA, EC, EB, ED, als Halbmesser, gleich sind. Es ist demnach $AC = CB = BD = DA$. Weil die vier Dreyecke gleichschenklich sind, so hat jedes auch zwey gleiche Winkel, z. E. $\angle EAC = \angle ECA$, und weil in jedem Dreyecke eine rechte Ecke ist, so machen die beyden übrigen jede die Hälfte einer rechten. Also ist $\angle ECA = \frac{1}{2} R$, $\angle ECB = \frac{1}{2} R$, folglich $\angle ECA + \angle ECB = R$, oder $\angle ACB = R$. Eben so wird bewiesen, daß $\angle CBD = R$, $\angle BDA = R$, $\angle DAC = R$. Da nun die Ecken alle recht und die Seiten gleich sind, so ist ACBDA ein reguläres Viereck.

§. 24.

Aufgabe.

Es ist ein Zirkel gegeben, und es soll um denselben ein gewisses Vieleck umgeschrieben werden.



Auflösung. Dieses setzet voraus, daß man das nemliche Vieleck einschreiben könne.

Gesetzt also es werde das umgeschriebene Sechseck verlanget.

Theile erstlich den Umkreis in 6 gleiche Theile, als wenn ein Sechseck in demselben eingeschrieben werden sollte.

Vom Mittelpunkte ziehe bis zu den Theilungspunkten die Halbmesser GA, GB, GC, GD, EE, GF.

Auf jedem Halbmesser am äußersten Ende desselben errichte beyderseits eine senkrechte Linie wie HI.

Solche senkrechte Linien werden einander schneiden und das umgeschriebene Vieleck bilden.

Beweis. In den Dreyecken KAG, KFG ist KG = KG, AG = FG (II. §. 10.) und ∠A = ∠F, weil beyde rechte

sind. Daher ist KF = KA, ∠GKF = ∠GKA, ∠AGK = ∠FGK (= ½ ∠AGF.)

Eben so wird bewiesen, daß AL = LB, ∠ALG = ∠BLG, ∠BGL = ∠AGL (= ½ ∠AGB)

Da ∠AGK = ½ ∠AGF und ∠AGL = ½ ∠AGB und da ∠AGF = ∠AGB, so ist ∠AGK = ∠AGL.

Da nun in den Dreyecken AGK und AGL, AG = AG, ∠AGK = ∠AGL und ∠KAG = ∠LAG (weil beyde recht sind) so ist AK = AL, ∠AKG = ∠ALG.

So wird bewiesen, daß alle Dreyecke FGK, KGA, AGL, LGB, BGM, u. s. f. ähnlichgleich sind.

Es ist demnach

$$\angle ALG = \angle AKG$$

$$\angle BLG = \angle FKG$$

folglich $\angle ALG + \angle BLG = \angle AKG + \angle FKG$

oder $\angle BLA = \angle AKF$

und überhaupt alle Ecken des umgeschriebenen Vielecks sind gleich.

Es sind ferner

$$AL = BL$$

$$AK = MB$$

folglich $AL + AK = BL + MB$

oder $LK = LM$

und überhaupt sind alle Seiten auch gleich. Da nun alle Ecken und Seiten gleich sind, so ist das umgeschriebene Vieleck regulär.

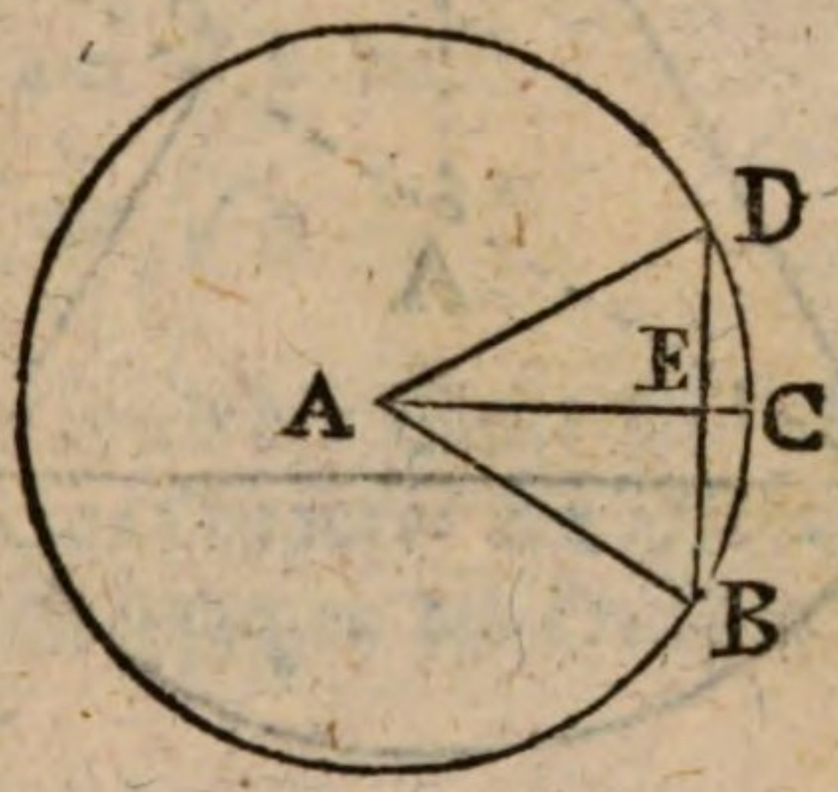
Anmerkung. Die umgeschriebenen Vielecke haben in der Geometrie keinen großen Nutzen. Hingegen sind die eingeschriebenen um desto wichtiger. Es wäre eine gar zu weitläuftige Sache, wenn wir die Seiten derselben, oder deren Verhältniß mit dem Halmesser des Zirkels bloß geometrisch, das ist, ohne Rechnung bestimmen

stimmen wollten. Deswegen werden wir uns in folgenden Aufgaben der Algebra bedienen. Dadurch wird ein Anfänger zugleich eine nützliche Uebung erhalten, und sich gewöhnen die Buchstaben-Rechnung auf geometrische Größen anzuwenden.

Vorher aber müssen wir einen Satz aus der Lehre vom Zirkel anführen, der uns die Beweise erleichtern wird.

§. 25.

Wenn eine gerade Linie, die durch den Mittelpunkt eines Zirkels gehet, einen Bogen dieses Zirkels halbiret, so halbiret sie auch die Sehne desselben, und ist auf der Sehne senkrecht.



Gesetzt die Linie CA die nach den Mittelpunkt A gehet halbiret den Bogen DCB, so daß DC = CB.

Lege den Ausschnitt DAC in Gedanken über dem Ausschnitte CAB, so decken beyde einander, weil DC = CB, DA = CA, CA = BA.

Also decket ∠DAC den ∠CAB, und beyde Winkel sind gleich.

In den Dreyecken DAE und BAE ist demnach AE = AE, AD = AB, und ∠DAE = ∠BAE. Folglich sind beyde Dreyecke ähnlichgleich.

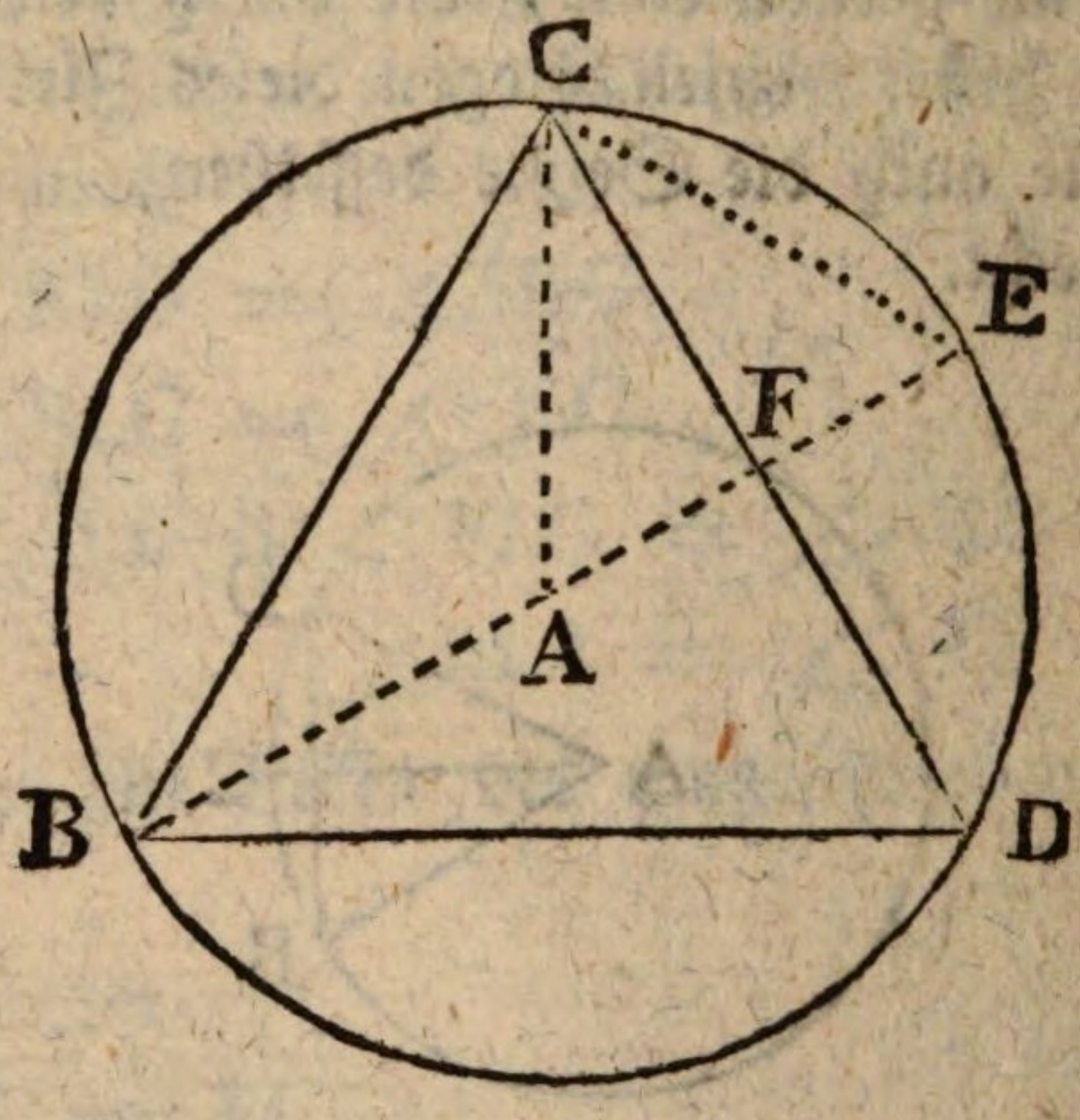
Also ist auch DE = BE, oder die Sehne DB ist in E halbirt.

Es ist auch $\angle DEA = \angle BEA$, folglich sind beyde Winkel rechte, und AC ist senkrecht auf DB.

§. 26.

Aufgabe.

Wenn der Halbmesser des Zirkels gegeben ist, die eine Seite des regulären oder gleichseitigen Dreyeckes finden.



Auflösung. Es sey das reguläre Dreyeck DCB in einem Zirkel beschrieben, dessen Halbmesser AB ist. Nimm die Sehne EC gleich dem Halbmesser, so ist EC die Seite des im Zirkel beschriebenen Sechseckes. (§. 22.)

Ziehe die Halbmesser AE und AC, so entstehen zwey identische Dreyecke CFA und CFE. Denn es ist $CF = CF$, $CA = CE$. Die beyden Winkel bey F sind gerade, weil der Halbmesser AE den Bogen CED und folglich die Sehne DC in zwey gleiche Theile und also winkelrecht schneidet. (§. 25.) Die Winkel A und E sind gleich, weil das Dreyeck ECA gleichseitig ist. (IV. §. 14.) Also sind auch die Winkel FCA und FCE gleich, und die Dreyecke CFA und CFE sind identisch.

Folglich ist $EF = FA$, folglich $EF = \frac{1}{2} EA = \frac{1}{2} EC$.
Es ist auch $CF = \frac{1}{2} CD$.

Es ist aber

$$CF^2 = EC^2 - EF^2$$

oder $CF^2 = EC^2 - (\frac{1}{2} EC)^2$

oder $CF^2 = EC^2 - \frac{1}{4} EC^2$

oder $CF^2 = \frac{3}{4} EC^2$

oder $(\frac{1}{2} CD)^2 = \frac{3}{4} EC^2$

oder $\frac{1}{4} CD^2 = \frac{3}{4} EC^2$

folglich $CD^2 = 3 EC^2$

$$CD = \sqrt{3}\ EC^2$$

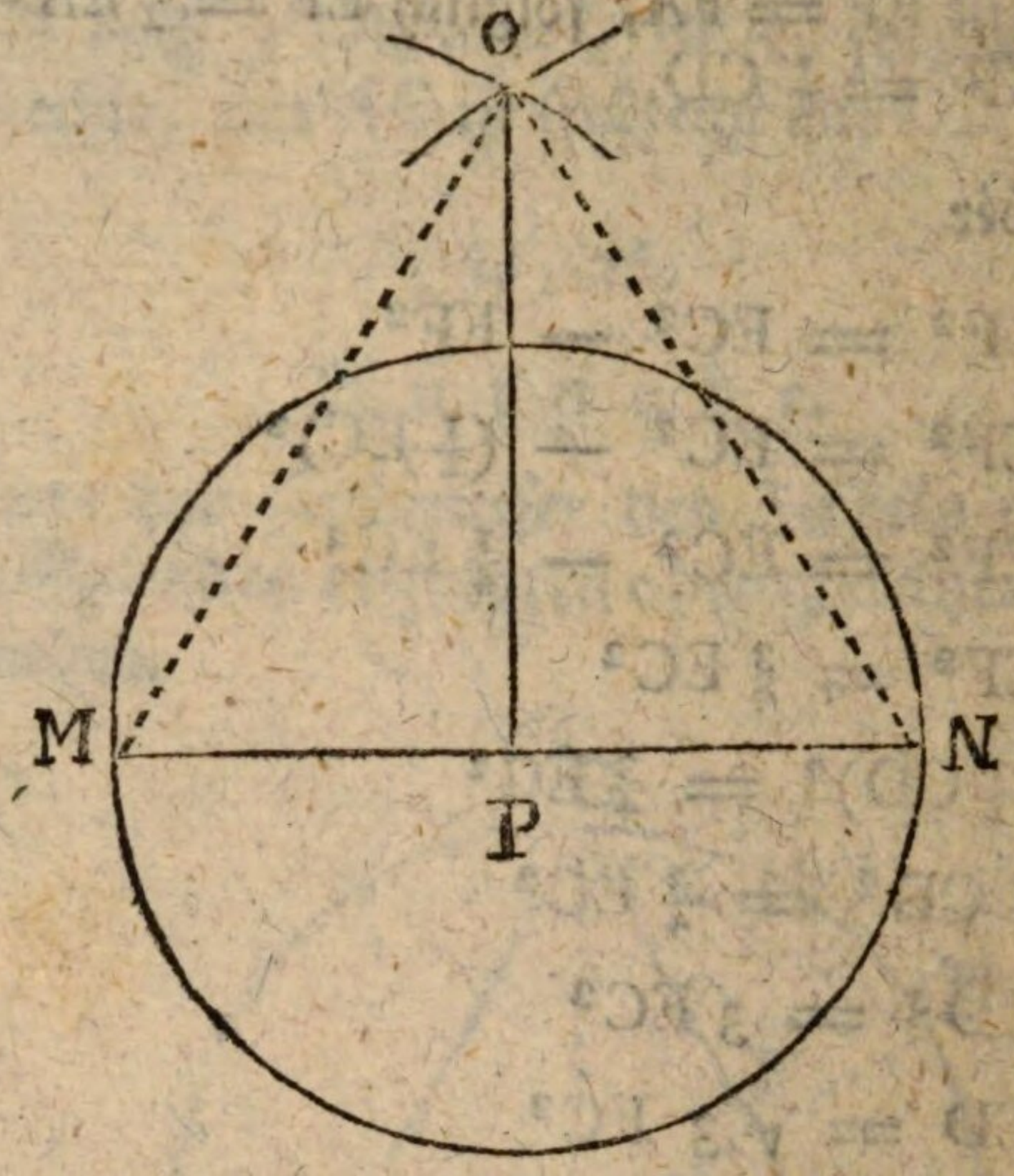
oder $CD = \sqrt{3}\ AB^2$

Das ist, es wird die Seite CD des Dreyecks gefunden, wenn man das Quadrat des Halbmessers 3mal nimmt, und aus diesen Dreyfachen die Quadratwurzel ziehet.

Zusatz I. Es ist

$$CD = \sqrt{(3AB \times AB)}$$

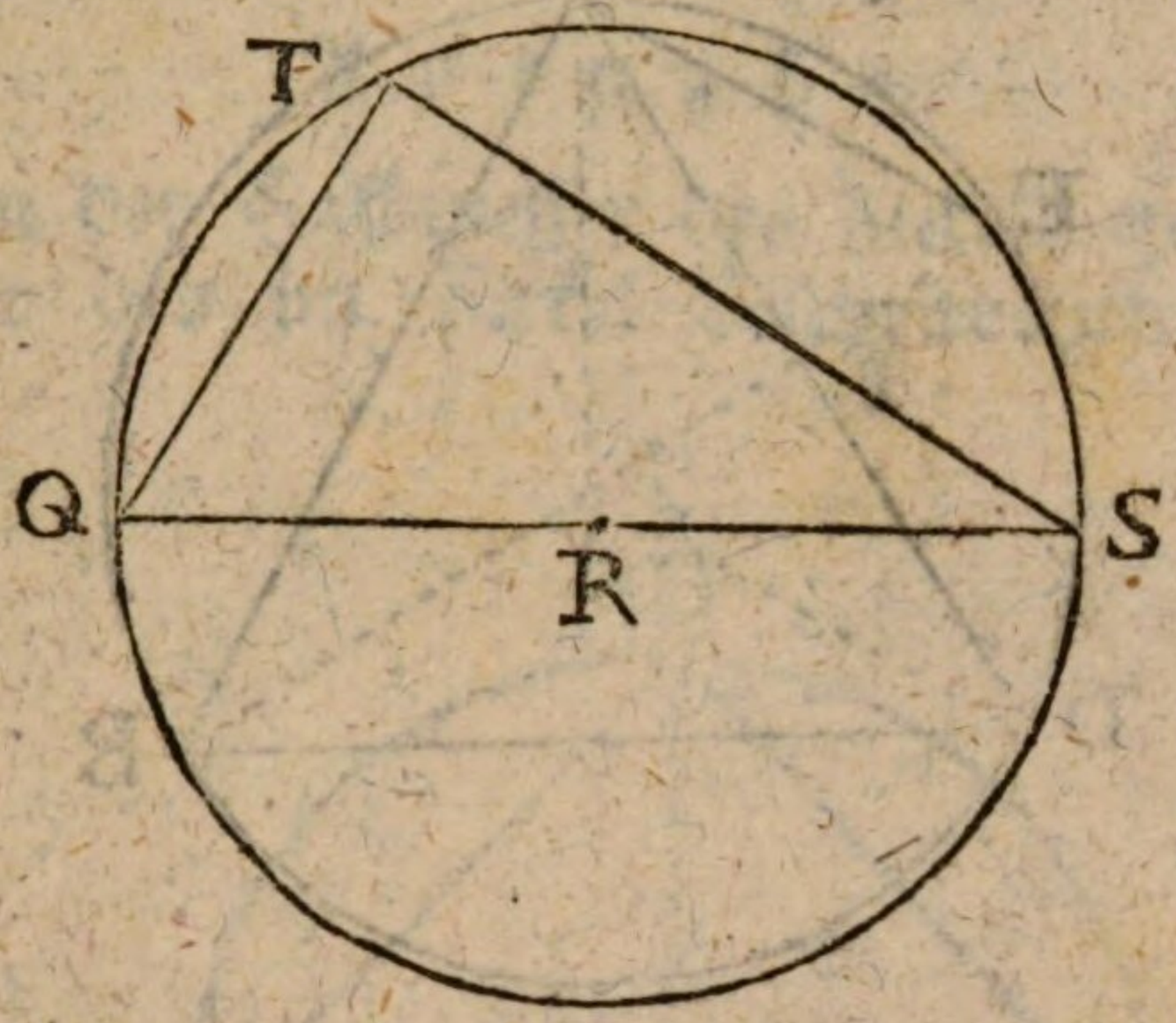
Man kann also die Seite des Dreyecks finden, wenn man zwischen dem dreyfachen und dem einfachen Halbmesser die mittlere Proporzional-Linie suchet. (III. §. 43.)



Zusatz II. Oder nimm den Durchmesser MN des Zirkels, worin das Dreyeck beschrieben werden soll. Auf NM beschreibe das gleichseitige Dreyeck MON. Ziehe OP winkelrecht auf MN, so ist OP die Seite des im Zirkel beschriebenen Dreyeckes. Denn es ist

$$OP^2 = ON^2 - PN^2$$
$$OP^2 = (2PN)^2 - PN^2$$
$$OP^2 = 4PN^2 - PN^2$$
$$OP^2 = 3PN^2$$
$$OP^2 = \sqrt{(3PN^2)}$$

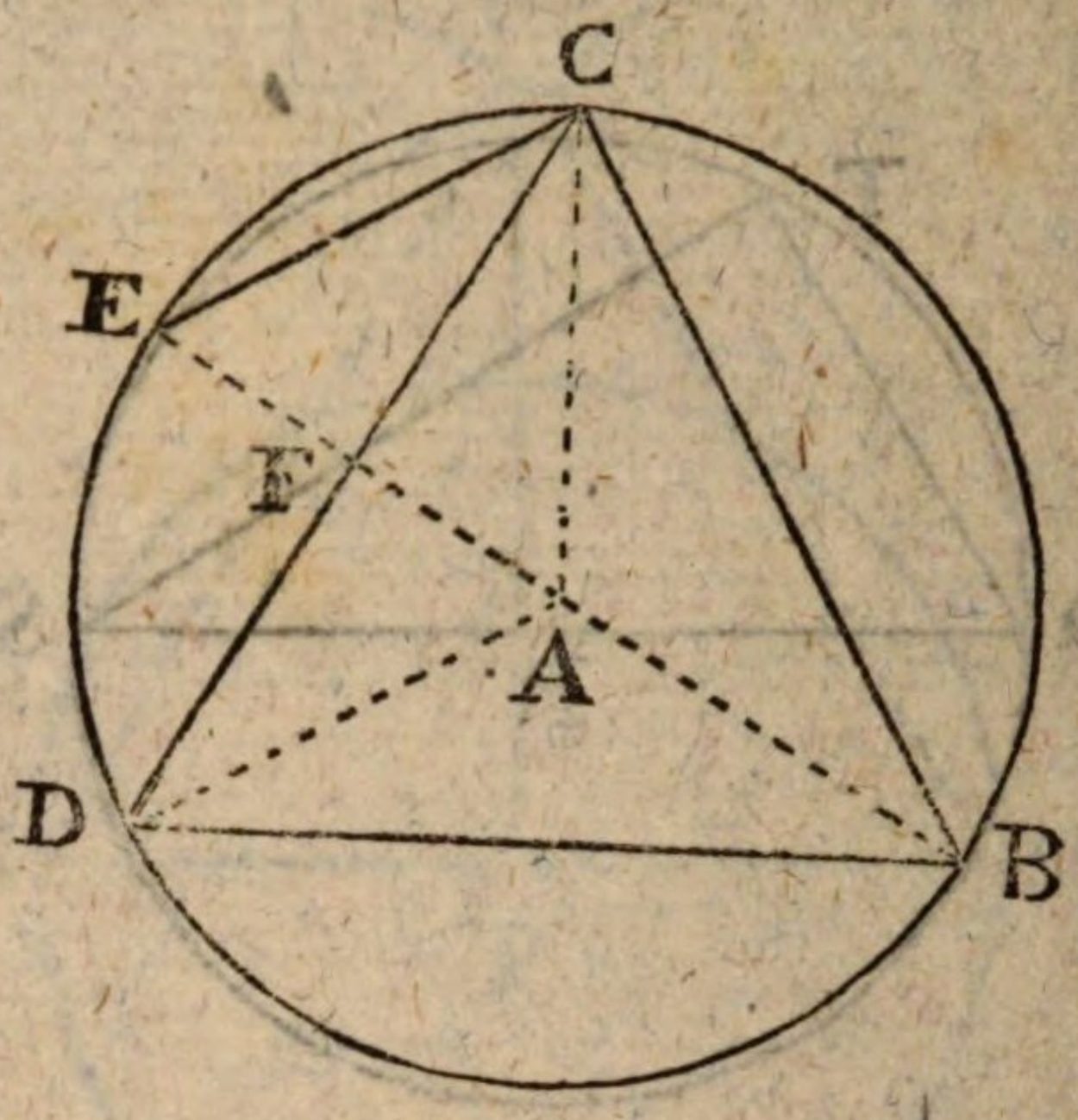
Weil nun PN der Halbmesser ist, so ist OP die Seite des im Zirkel beschriebenen Dreyeckes.



Zusatz III. Oder man mache die Sehne QT = QR, und ziehe TS, so ist TS die Seite des im Zirkel beschriebenen Dreyeckes. Denn im rechtwinklichen Dreyecke QTS (III. §. 33.) ist

$$TS^2 = QS^2 + QI^2$$
$$= (2QR)^2 - QR^2$$
$$= 4QR^2 - QR^2$$
$$= 3QR^2$$
$$TS = \sqrt{(3QR^2)}$$

Folglich ist TS die verlangte Seite des Dreyeckes.



Zusatz IV. Weil $CD^2 = 3EC^2$

so ist $CD^2, EC^2 :: 3, 1$

Das ist, das Qnadrnt der Seite des Dreyecks verhält sich zum Quadrate des Halbmessers wie 3 zu 1, oder das erste dieser Quadrate ist 3mal so groß als das andere.

Zusatz V. Wenn die Seite CD des Dreyecks gegeben ist, so findet man leicht den Halbmesser.

Denn da $CD^2 = 3EC^2$

so ist $\frac{1}{3}CD^2 = EC^2$

und $\sqrt{\frac{1}{3}}CD^2 = EC$

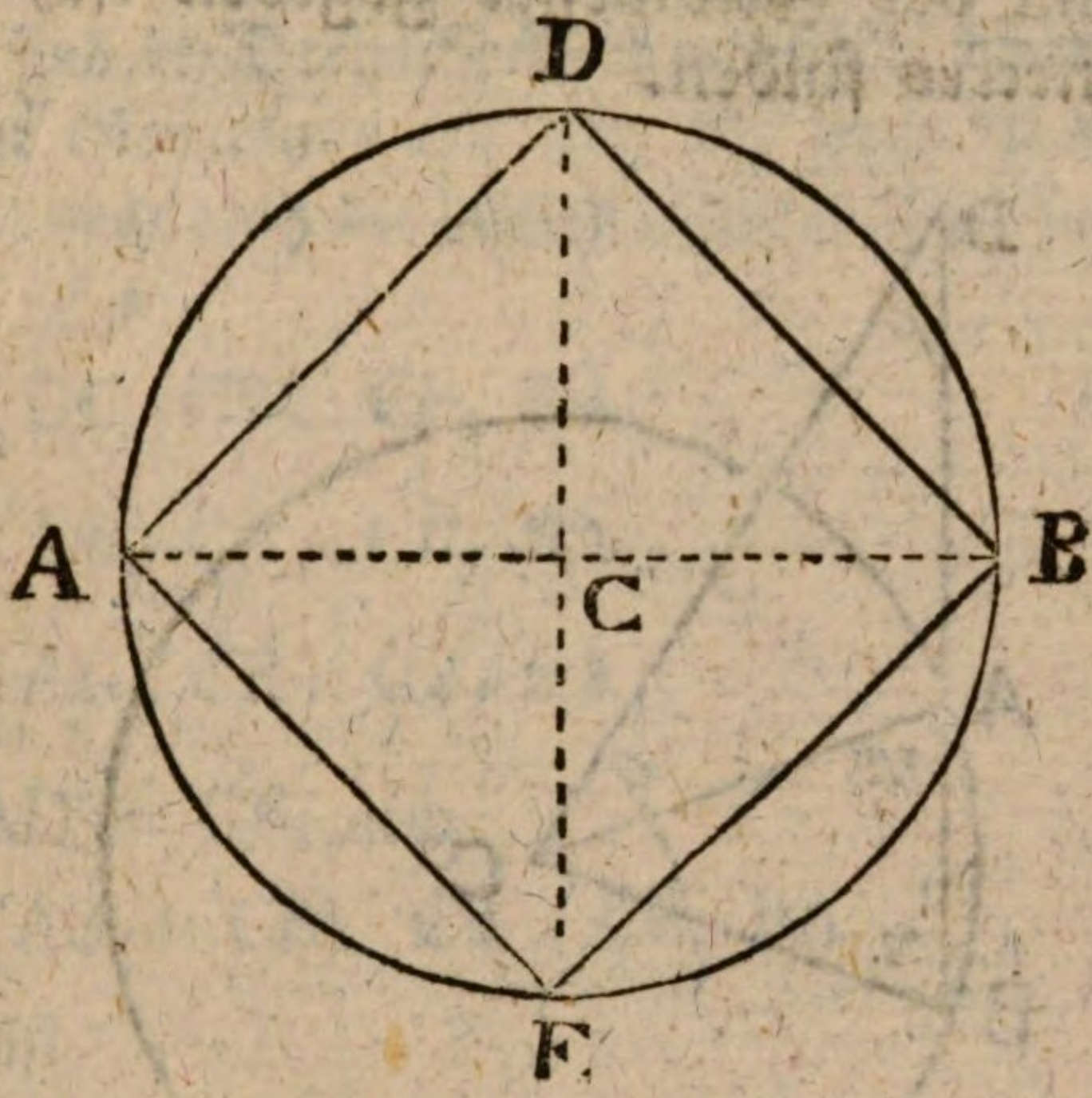
oder $\sqrt{(\frac{1}{3}CD \times CD)} = EC$

Also wird EC oder AC gefunden, wenn man zwischen der ganzen Seite CD und dem dritten Theile derselben, die mittlere Proporzional-Linie suchet.

§. 27.

Aufgabe.

Wenn der Halbmesser des Zirkels gegeben ist, die Seite des im Zirkel beschriebenen Vierecks finden.



Auflösung. Ziehe die beyden Durchmesser AB und DE winkelrecht gegen einander. Ziehe DB, BE, EA und AD, so ist das Viereck im Zirkel beschrieben. (§. 23.)

Nun ist $DB^2 = DC^2 + CB^2$

oder weil $CB = DC$,

so ist $DB^2 = 2DC^2$

$DB = \sqrt{(2DC \times DC)}$

oder es ist die Seite DB des Viereckes die mittlere Proporzional-Linie zwischen dem einfachen und dem doppelten Halbmesser.

Zusatz I. Weil $DB^2 = 2DC^2$

so ist $\frac{1}{2}DB^2 = DC^2$

$\sqrt{(\frac{1}{2}DB \times DB)} = DC.$

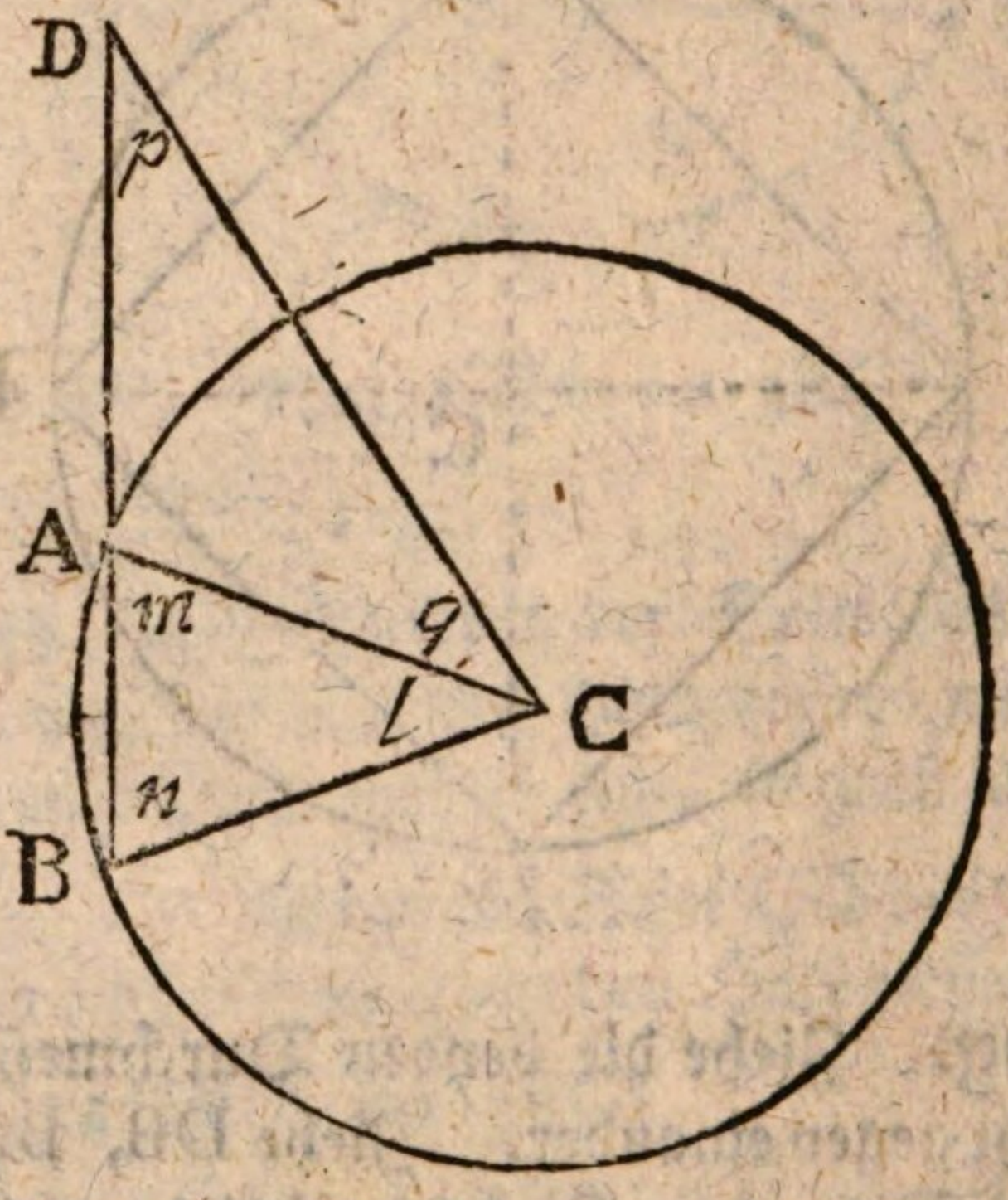
Wenn

Wenn also die Seite des Viereckes gegeben ist, so wird der Halbmesser gefunden, indem man zwischen der ganzen und halben Seite die mittlere Proporzional-Linie suchet.

§. 28.

Aufgabe.

Wenn der Halbmesser gegeben ist, die Seite des Zehneckes finden.



Auflösung. Es sey AB die Seite des Zehneckes. Ziehe die Halbmesser AC und BC, so ist $\angle l$ der zehnte Theil von 4 rechten, die um den Punkt C liegen können, oder der fünfte Theil von 2 rechten, also ist

$$\angle l = \tfrac{2}{5}\,\mathfrak{R}.$$

folglich sind die Winkel $m+n$ zusammen $= 2\,\mathfrak{R} - \tfrac{2}{5}\mathfrak{R} = \tfrac{8}{5}\mathfrak{R}$., und da sie gleich sind (IV. §. 14.), so ist jeder $= \tfrac{4}{5}\mathfrak{R}$.

Verlängere BA und mache AD $=$ AC $=$ BC. Ziehe DC, so ist $\angle p = \angle q$, weil das Dreyeck DAC gleichschenklich ist. Es sind auch die beyden inwendigen Winkel $p+q = \angle m$ (IV. §. 11.)

Also

Also ist jeder $= \frac{2}{5}$ R.
Da also $\angle q = \frac{2}{5}$ R.
$\angle l = \frac{2}{5}$ R.

---

so ist $\angle (q + l) = \frac{4}{5}$ R.

Da nun $\angle (q + l) = \frac{4}{5}$ R. und $\angle n = \frac{4}{5}$ R., so ist das Dreyeck BDC gleichschenklich, und es ist DC = DB.

Ferner sind die Dreyecke ACB und BDC ähnlich, weil jedes an der Grundlinie AB und BC zwey Winkel von $\frac{4}{5}$R hat, da demnach die dritten Winkel gleich sind, nemlich $\angle l = \angle p$

Also ist DC, CB :: CB, BA

oder DB, CB :: CB, BA

oder (AB + AD), CB :: CB, BA

es ist aber AD = CB, also

(AB + CB), CB :: CB, BA

Daher ist

$(AB + CB) \times BA = CB^2$

$BA^2 + CB \times BA = CB^2$

Man addire beyderseits $\frac{1}{4} CB^2$, so ist

$BA^2 + CB \times BA + \frac{1}{4} CB^2 = \frac{5}{4} CB^2$

oder $(BA + \frac{1}{2} CB)^2 = \frac{5}{4} CB^2$

daher $BA + \frac{1}{2} CB = \sqrt{\frac{5}{4} CB^2}$

folglich $BA = \sqrt{\frac{5}{4} CB^2} - \frac{1}{2} CB$

oder $BA = \frac{1}{2}\sqrt{5}\, CB^2 - \frac{1}{2} CB$

oder $BA = \frac{\sqrt{5}\, CB^2 - CB}{2}$

Zusatz

Zusatz I. Um diese letzte Formel in Linien auszudrücken, suche man zwischen CB und 5 CB die mittlere Proporzional-Linie, so hat man

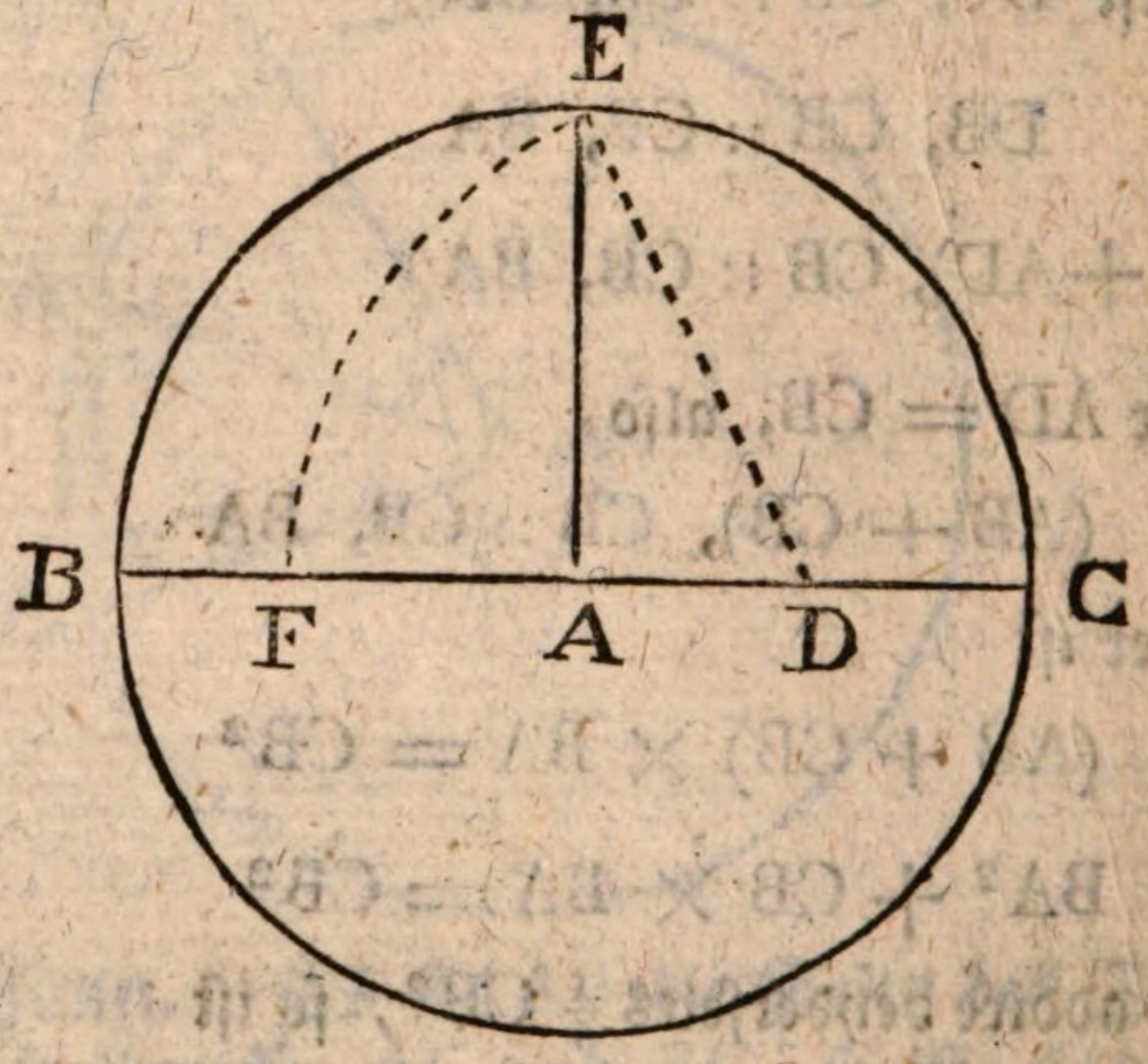
$$\sqrt{5\,CB^2} \text{ oder } \sqrt{(5\,CB \times CB)}$$

Hiervon nehme man CB ab, so hat man

$$\sqrt{5\,CB^2} - CB$$

Man nehme die Hälfte der übrigen Linie, so hat man

$$\frac{\sqrt{5\,CB^2} - CB}{2}$$



Zusatz II. Oder aus den Mittelpunkte A errichte man auf dem Durchmesser BC den Halbmesser AE winkelrecht. Man nehme $AD = \frac{1}{2}\,AC$. Ziehe DE. Beschreibe aus D durch E den Bogen EF, so daß $DF = DE$. So ist AF die Seite des Zehneckes.

Denn es ist $DF = DE = \sqrt{(EA^2 + AD^2)} = \sqrt{[EA^2 + (\frac{1}{2}\,AE)^2]} = \sqrt{(EA^2 + \frac{1}{4}\,AE^2)} = \sqrt{\frac{5}{4}\,AE^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5\,AE^2}$.

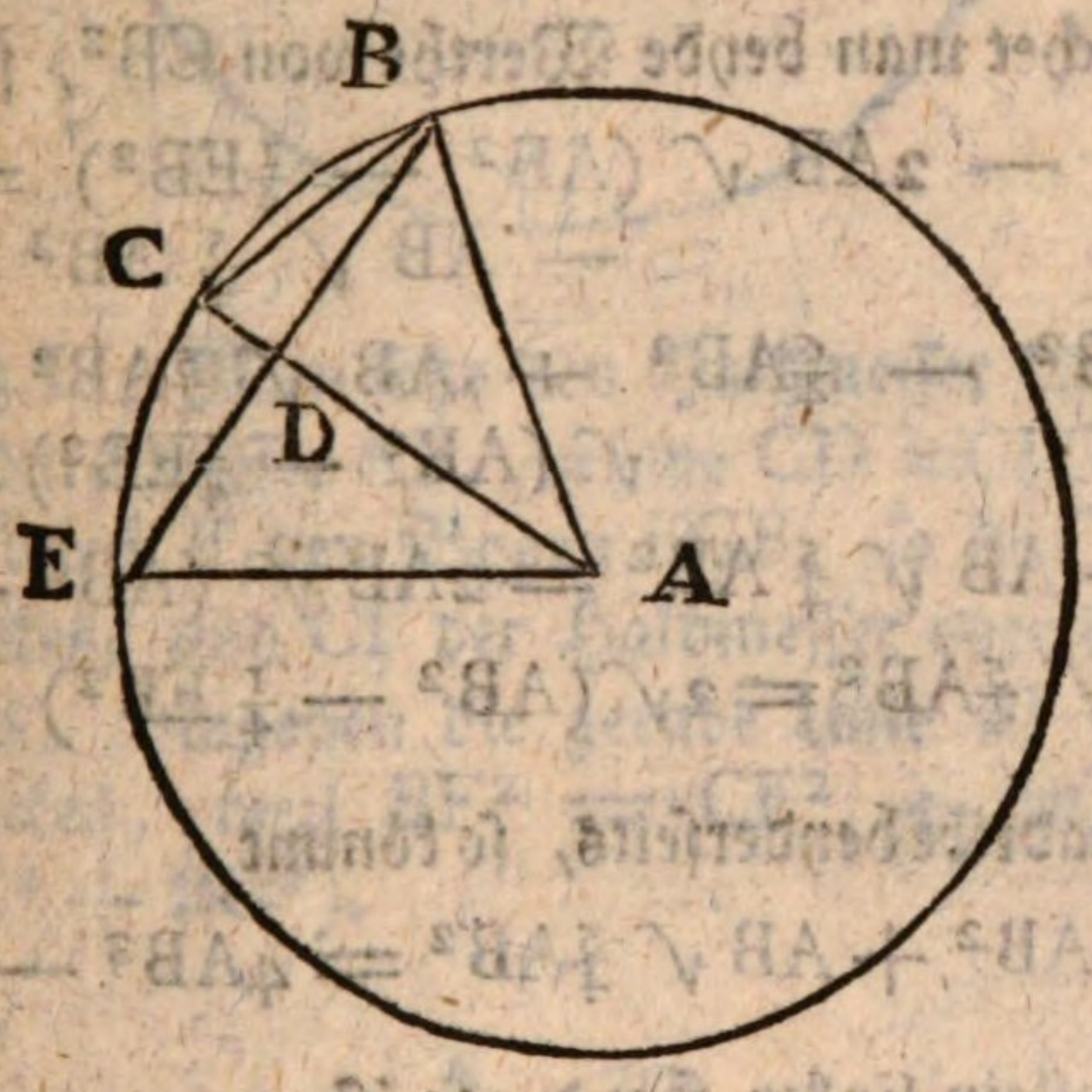
Nun

Nun ist $AF = DF - AD = DF - \frac{1}{2}AE$
$= \frac{1}{2}\sqrt{5AE^2} - \frac{1}{2}AE = \frac{\sqrt{5AE^2} - AE}{2}$

§. 29.

Aufgabe.

Wenn der Halbmesser gegeben ist, die Seite des Fünfecks finden.



Auflösung. Es sey BE die Seite des Fünfecks, und BC die Seite des Zehnecks, so ist $BC = \frac{\sqrt{5AB^2} - AB}{2}$
$= \frac{1}{2}\sqrt{5}\,AB^2 - \frac{1}{2}AB$. (§. 28.)

Ferner ist $BD = \frac{1}{2}BE$ (§. 25.)

$$AD = \sqrt{(AB^2 - BD^2)}$$

oder $$AD = \sqrt{(AB^2 - \tfrac{1}{4}EB^2)}$$

folglich $$CD = CA - AD = AB - \sqrt{(AB^2 - \tfrac{1}{4}EB^2)}$$

und $$CD^2 = 2AB^2 - \tfrac{1}{4}EB^2 - 2AB\sqrt{(AB^2 - \tfrac{1}{4}EB^2)}$$

subtra-

addire $BD^2 = \frac{1}{4} EB^2$

so ist $CD^2 + BD^2 = 2AB^2 - 2AB \sqrt{(AB^2 - \frac{1}{4}EB^2)}$

Es ist aber $CD^2 + BD^2 = CB^2$, also

$$CB^2 = 2AB^2 - 2AB \sqrt{(AB^2 - \tfrac{1}{4}EB^2)}.$$

Es ist aber auch

$$CB = \sqrt{\tfrac{5}{4}AB^2} - \tfrac{1}{2}AB \text{ (§. 28.)}$$

folglich $CB^2 = \frac{6}{4}AB^2 - AB \sqrt{\frac{5}{4}AB^2}$

Vergleichet man beyde Werthe von CB^2, so ist

$$2AB^2 - 2AB \sqrt{(AB^2 - \tfrac{1}{4}EB^2)} = \tfrac{6}{4}AB^2 - AB \sqrt{\tfrac{5}{4}AB^2}$$

$$2AB^2 - \tfrac{6}{4}AB^2 + AB \sqrt{\tfrac{5}{4}AB^2} = 2AB \sqrt{(AB^2 - \tfrac{1}{4}EB^2)}$$

$$\tfrac{1}{2}AB^2 + AB \sqrt{\tfrac{5}{4}AB^2} = 2AB \sqrt{(AB^2 - \tfrac{1}{4}EB^2}$$

$$\tfrac{1}{2}AB + \sqrt{\tfrac{5}{4}AB^2} = 2\sqrt{(AB^2 - \tfrac{1}{4}EB^2)}$$

Man quadrire beyderseits, so kömmt

$$\tfrac{6}{4}AB^2 + AB \sqrt{\tfrac{5}{4}AB^2} = 4AB^2 - EB^2$$

bringe EB^2 allein linker Hand, so ist

$$EB^2 = 4AB^2 - \tfrac{6}{4}AB^2 - AB \sqrt{\tfrac{5}{4}AB^2}$$

oder $EB^2 = \frac{10}{4} AB^2 - AB \sqrt{\frac{5}{4}AB^2}$

oder $EB^2 = AB^2 + (\frac{6}{4}AB^2 - AB \sqrt{\frac{5}{4}AB^2})$

Es ist aber $\frac{6}{4}AB^2 - AB \sqrt{\frac{5}{4}AB^2}) = CB^2$

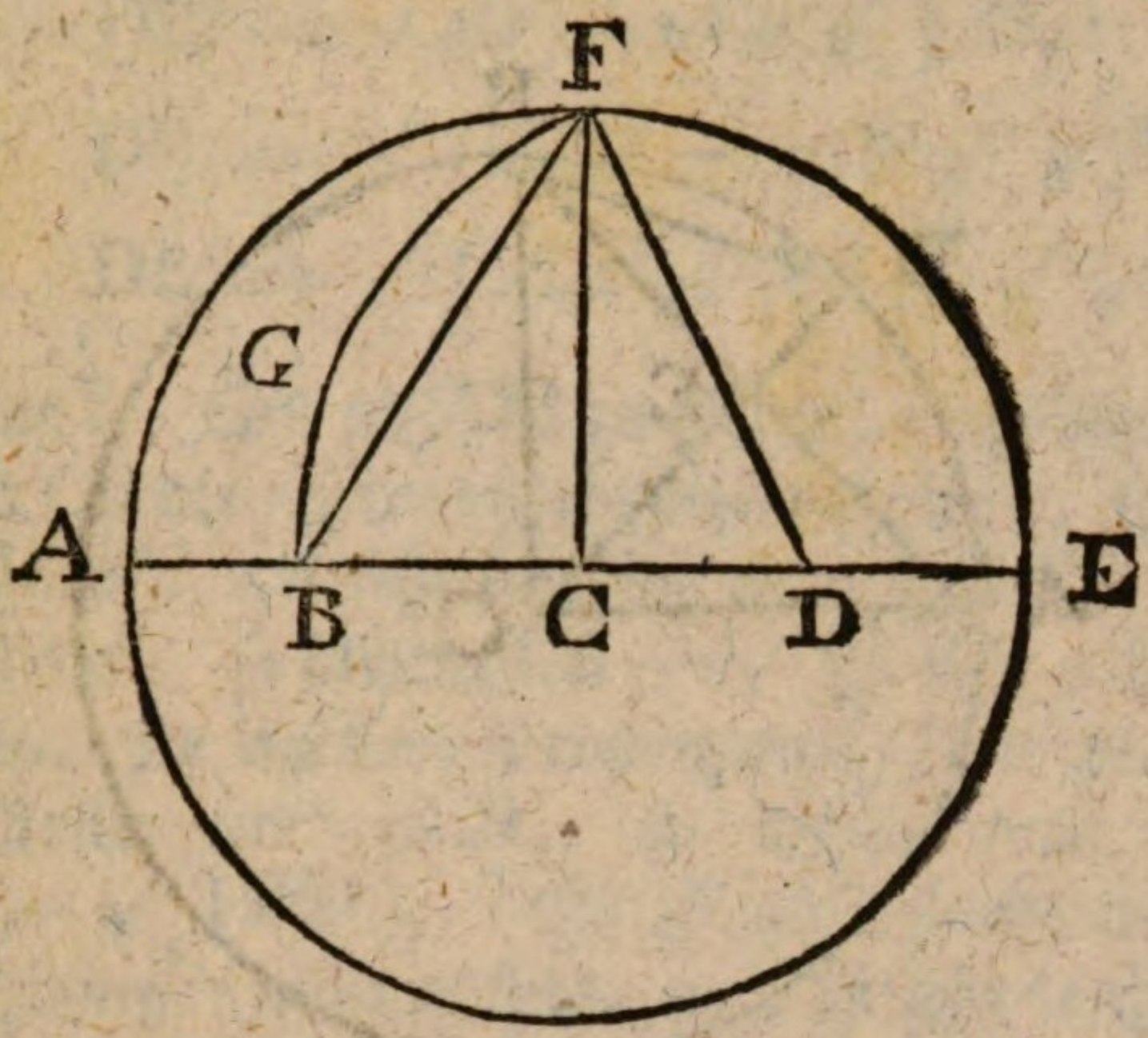
Also ist

$$EB^2 = AB^2 + CB^2$$

und $EB = \sqrt{(AB^2 + CB^2)}$

Das heißt, das Quadrat der Seite des Fünfeckes ist gleich dem Quadrate des Halbmessers nebst dem Quadrate der Seite des Zehneckes.

Zusatz



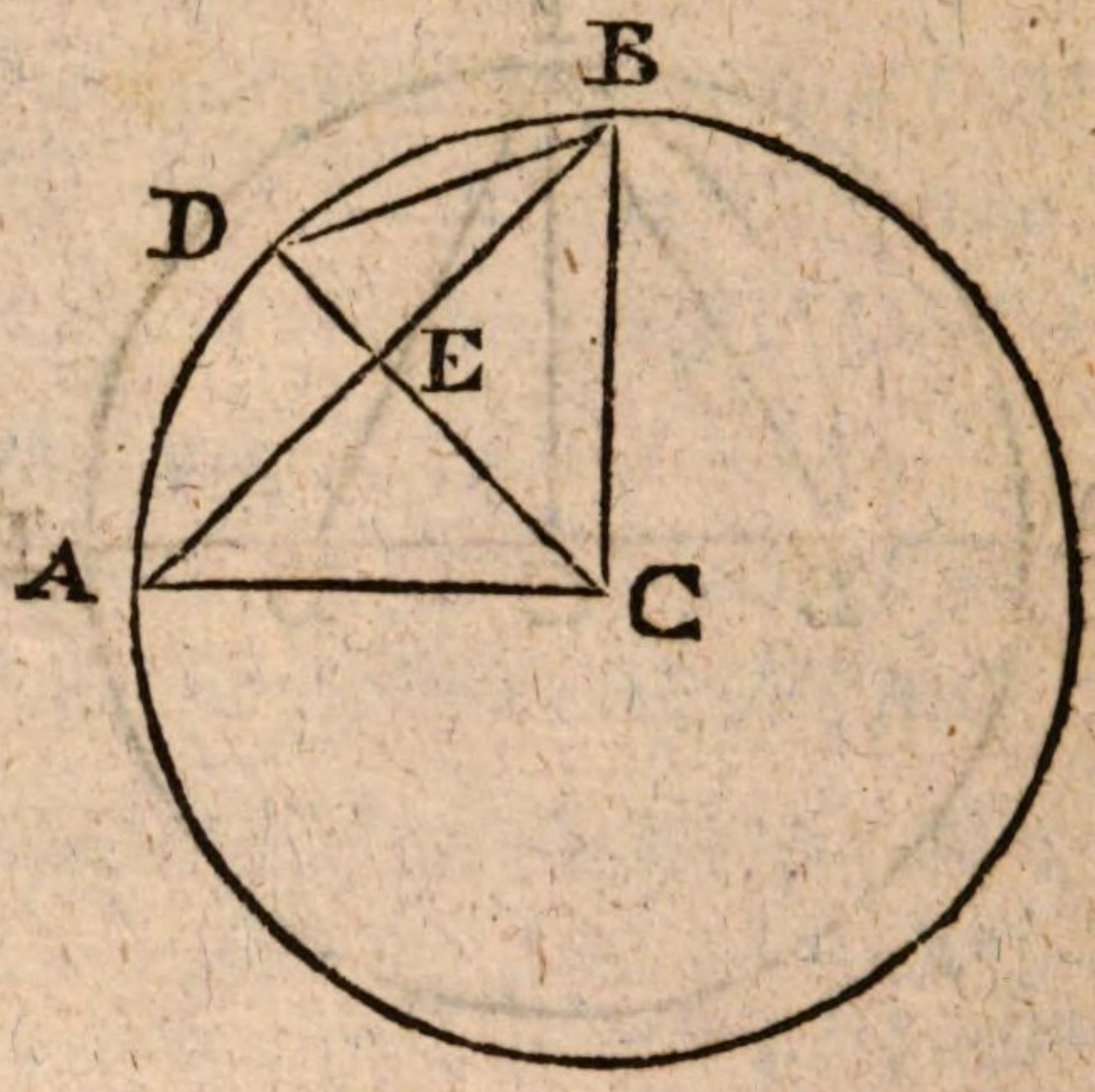
Zusatz I. Man setze den Halbmesser CF winkelrecht auf dem Durchmesser AE, nehme $CD = \frac{1}{2}CE$, beschreibe aus D durch F den Bogen FGB, so ist CB die Seite des Zehneckes, und CF der Halbmesser oder die Seite des Sechseckes, hingegen die gerade Linie BF ist die Seite des Fünfeckes, weil $BF^2 = CF^2 + BC^2$ oder $BF = \sqrt{(CF^2 + BC^2)}$.

§. 30.

Aufgabe.

Wenn der Halbmesser gegeben ist, die Seite des Achteckes finden.

(Siehe die folgende Figur und Auflösung.)



Auflösung. Es sey DB die Seite des Achteckes, und AB die Seite des Viereckes, so ist $AB = \sqrt{2CB^2}$.

Ferner ist $BE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{2CB^2} = \sqrt{\frac{1}{2}CB^2}$.

Nun ist

$$EC = \sqrt{(CB^2 - BE^2)}$$

oder $$EC = \sqrt{(CB^2 - \frac{1}{2}CB^2)}$$

oder $$EC = \sqrt{\frac{1}{2}CB^2}.$$

Es ist auch

$$DE = DC - EC$$
$$= CB - EC$$
$$= CB - \sqrt{\frac{1}{2}CB^2}$$

Folglich ist $DE^2 = \frac{3}{2}CB^2 - 2CB\sqrt{\frac{1}{2}CB^2}$

addire $BE^2 = \frac{1}{2}CB^2$

so wird $DE^2 + BE^2 = 2CB^2 - 2CB\sqrt{\frac{1}{2}CB^2}$

Es ist aber $DE^2 + BE^2 = DB^2$

also ist $DB^2 = 2CB^2 - 2CB\sqrt{\frac{1}{2}CB^2}$

$DB = \sqrt{(2CB^2 - 2CB\sqrt{\frac{1}{2}CB^2})}$

oder $DB = \sqrt{[2CB \times (CB - \sqrt{\frac{1}{2}CB^2})]}$

Zusatz I. Um also DB zu finden, suche man zwischen $\frac{1}{2}$CB und CB die mittlere Proporzional-Linie, so bekömmt man $\sqrt{\frac{1}{2}CB^2}$. Diese schneide man von CB oder vom Halbmesser ab, so bleibet $CB - \sqrt{\frac{1}{2}CB^2}$. Man suche noch einmal die mittlere Proporzional-Linie zwischen vorigem Reste und 2CB, so erhält man $\sqrt{2CB \times (CB - \sqrt{\frac{1}{2}CB^2})}$. Es ist aber solche weitläuftige Konstrukzion gar nicht nöthig, weil es sehr leicht ist in einem Zirkel ein Achteck zu beschreiben.

Man halbire AB vermittelst der senkrechten Linie DC (I §. 55), so ist $\triangle EBC \cong \triangle EAC$, folglich $\angle ACE = \angle BCE$, folglich $\angle ECB (= \angle DCB) = \frac{1}{2} \angle ACB = \frac{1}{2}R = \frac{1}{8}$ von 4 R. Man ziehe DB, so ist DB die Seite des Achtecks, und $\triangle DCB$ eines der 8 ähnlichgleichen Dreyecke, woraus das VIIIeck bestehet.

Zusatz II. Will man aus der gegebenen Seite des Achteckes den Halbmesser finden, so muß man den Werth von CB aus der gefundenen Gleichung ziehen. Nemlich es ist

$$DB^2 = 2CB^2 - 2CB\sqrt{\frac{1}{2}CB^2}$$

$$2CB\sqrt{\frac{1}{2}CB^2} = 2CB^2 - DB^2$$

$$2CB^4 = 4CB^4 - 4CB^2DB^2 + DB^4$$

$$0 = 2CB^4 - 4CB^2DB^2 + DB^4.$$

$- DB^4$

$$-DB^4 = 2CB^4 - 4CB^2DB^2$$

$$-\tfrac{1}{2}DB^4 = CB^4 - 2CB^2DB^2$$

addire $\quad DB^4 = DB^4$

so ist $\quad \tfrac{1}{2}DB^4 = CB^4 - 2CB^2DB^2 + DB^4$

oder $\quad \tfrac{1}{2}DB^4 = (CB^2 - DB^2)^2$

$$\surd \tfrac{1}{2}DB^4 = CB^2 - DB^2$$

$$DB^2 + \surd \tfrac{1}{2}DB^4 = CB^2$$

$$DB^2 + DB \surd \tfrac{1}{2}DB^2 = CB^2$$

$$\surd (DB^2 + DB \surd \tfrac{1}{2}DB^2) = CB$$

$$\surd [DB \times (DB + \surd \tfrac{1}{2}DB^2)] = CB.$$

Zusatz III. Will man diesen letzten Werth von CB geometrisch konstruiren, so suche man zwischen DB und $\frac{1}{2}$DB die mittlere Proporzional-Linie, diese ist $= \surd \frac{1}{2}DB^2$. Man verlängere sie um DB, so hat man $DB + \surd \frac{1}{2}DB^2$. Zwischen der gefundenen Linie und DB suche man wiederum die mittlere Proporzional-Linie, so hat man

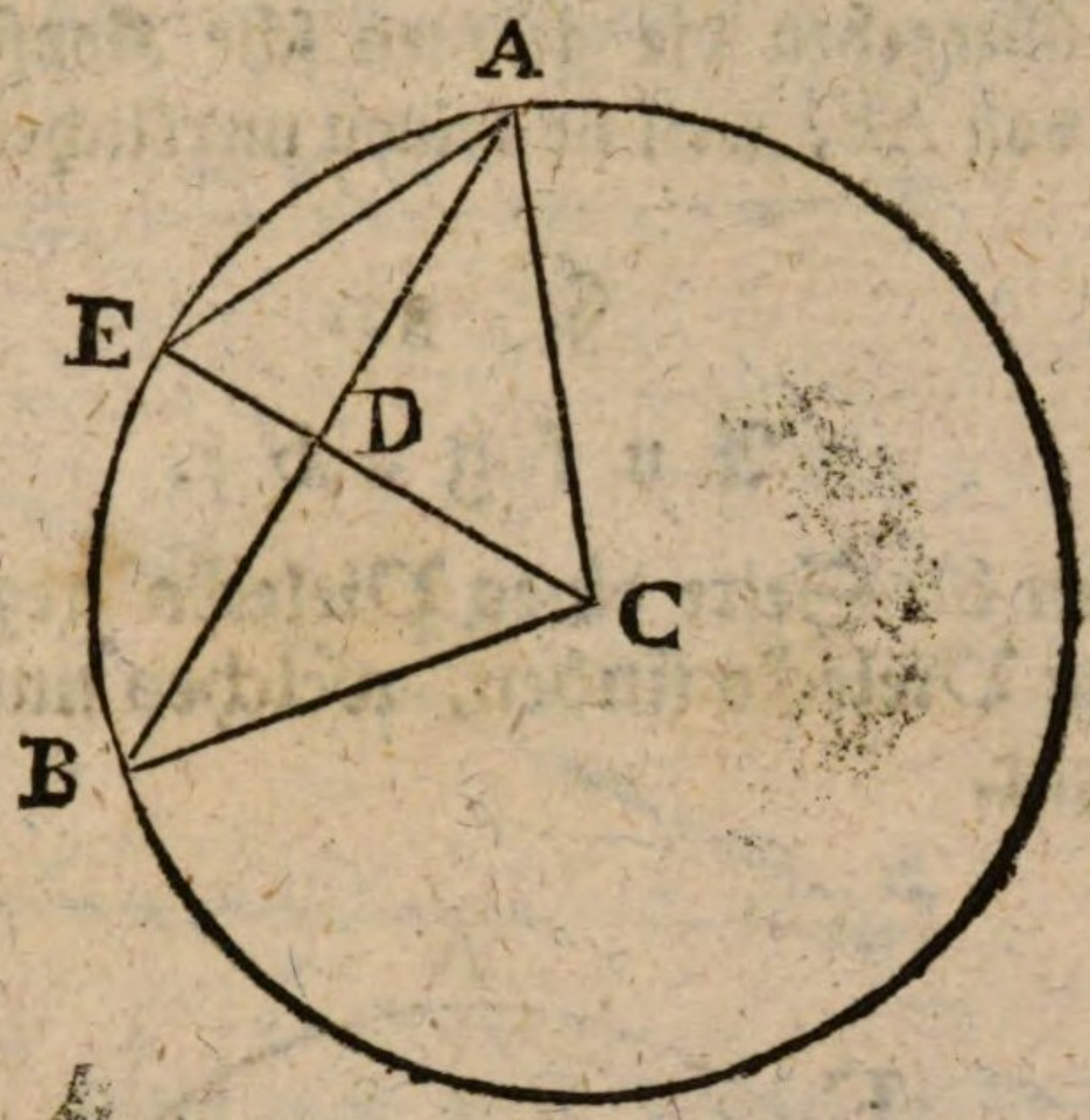
$$\surd [DB \times (DB + \surd \tfrac{1}{2}DB^2)]$$

Man könnte zwar diese Formel noch anders konstruiren; weil die Konstrukzion aber etwas weitläuftig und von keinem sonderlichen Nutzen seyn würde, so übergehen wir sie gänzlich.

§. 31.

Aufgabe.

Wenn der Halbmesser nebst der Seite eines Vielecks gegeben sind, so soll man die Seite eines andern Vielecks finden, das doppelt so viel Seiten hat.



L

Auflösung. Es sey AC der bekannte Halbmesser, AB die bekannte Seite des Vieleckes. Es sey der Bogen AE die Hälfte des Bogens AEB, so ist AE die Seite des Vieleckes, was doppelt so viel Seiten hat als das vorige.

Es ist auch $AD = \frac{1}{2}AB$. Im rechtwinklichen Dreyeck ADC ist $DC = \sqrt{(AC^2 - AD^2)} = \sqrt{(AC^2 - \frac{1}{4}AB^2)}$.

Weil nun $EC = AC$ und $ED = EC - DC = AC - DC$, so ist $ED = AC - \sqrt{(AC^2 - \frac{1}{4}AB^2)}$ und $ED^2 = 2AC^2 - \frac{1}{4}AB^2 - 2AC\sqrt{(AC^2 - \frac{1}{4}AB^2)}$

Es ist ferner

$$AE^2 = AD^2 + ED^2$$

oder $$AE^2 = \frac{1}{4}AB^2 + ED^2$$

oder $$AE^2 = \frac{1}{4}AB^2 + 2AC^2 - \frac{1}{4}AB^2 - 2AC\sqrt{(AC^2 - \frac{1}{4}AB^2)}$$

oder $$AE^2 = 2AC^2 - 2AC\sqrt{(AC^2 - \frac{1}{4}AB^2)}$$

Also ist

$$AE \sqrt{[2AC^2 - 2AC\sqrt{(AC^2 - \frac{1}{4}AB^2)}]}$$

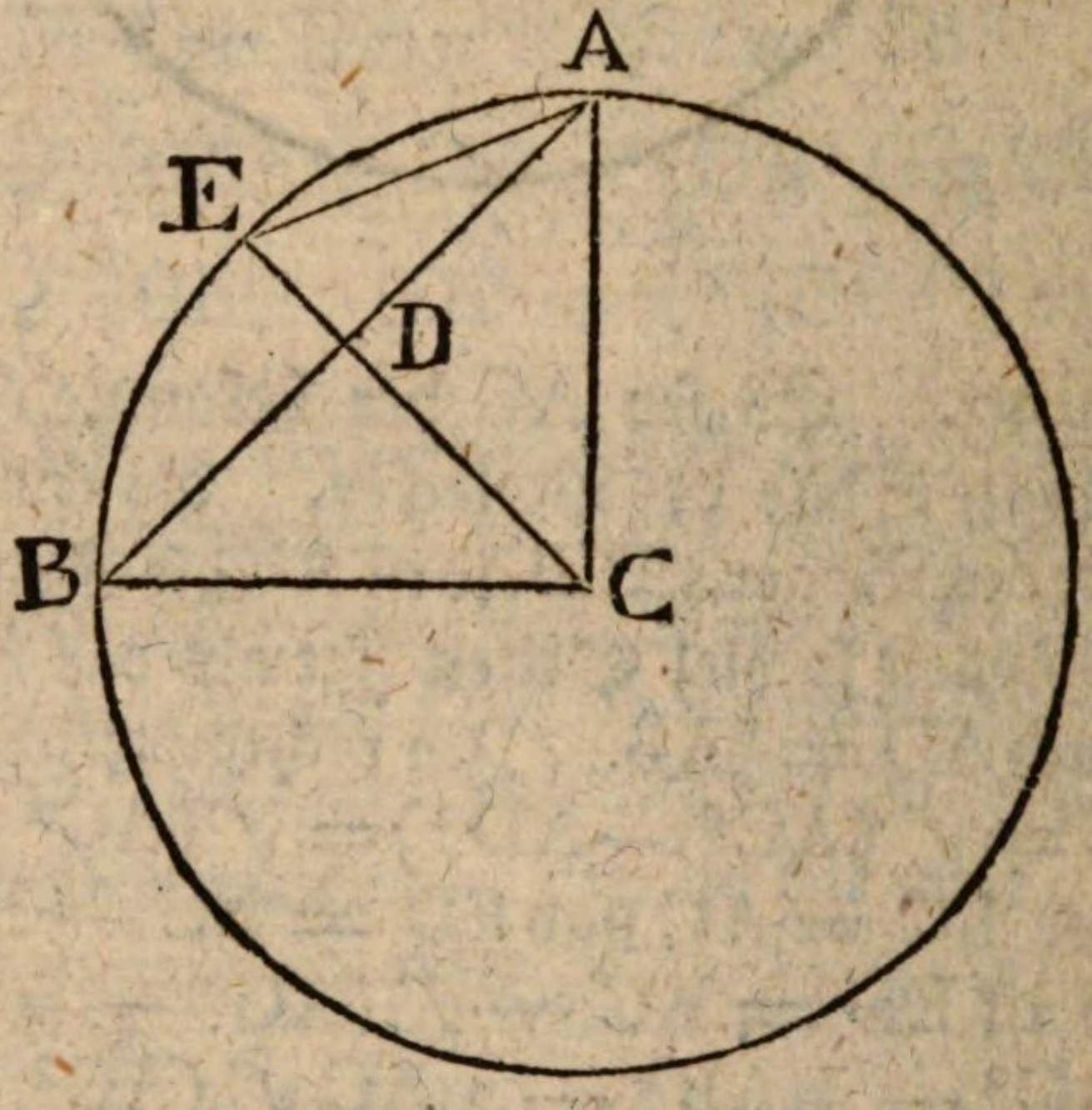
oder $$AE = \sqrt{[2AC \times (2AC - \sqrt{(AC^2 - \frac{1}{4}AB^2)}]}$$

Wir übergehen die geometrische Konstrukzion dieses Werthes von AE, weil sie keinen merklichen Nutzen hat.

§. 32.

Aufgabe.

Wenn die Seite eines Vielecks gegeben ist, die Seite des Vielecks finden, welches nur halb so viel Seiten hat.



Auflösung. Man hat gefunden

$$AE^2 = 2AC^2 - 2AC\sqrt{(AC^2 - \tfrac{1}{4}AB^2)}$$

$$2AC\sqrt{(AC^2 - \tfrac{1}{4}AB^2)} = 2AC^2 - AE^2$$

$$4AC^2(AC^2 - \tfrac{1}{4}AB^2) = 4AC^4 - 4AC^2AE^2 + AE^4$$

$$4AC^4 - AB^2AC^2 = 4AC^4 - 4AC^2AE^2 + AE^4$$

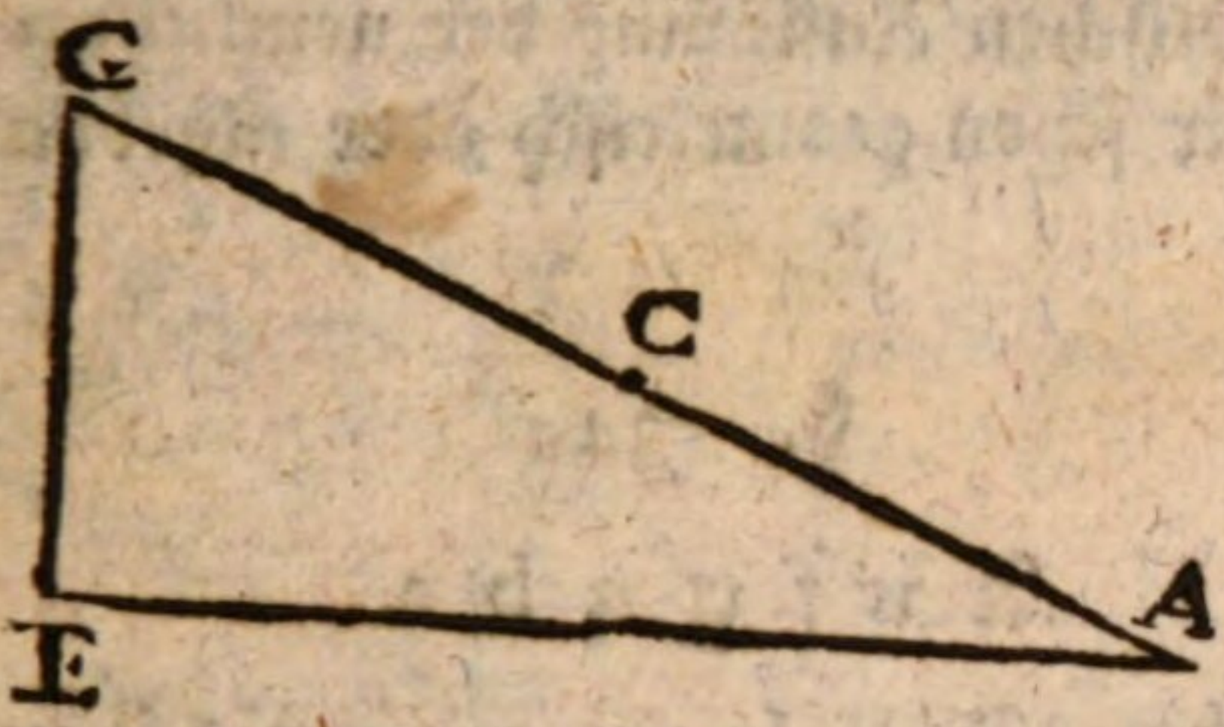
$$-AB^2AC^2 = -4AC^2AE^2 + AE^4$$

$$AB^2AC^2 = 4AC^2AE^2 + AE^4$$

$$AB^2AC^2 = AE^2(4AC^2 - AE^2)$$

$$AB \cdot AC = AE \sqrt{(4AC^2 - AE^2)}$$

$$AB = \frac{AE \sqrt{(4AC^2 - AE^2)}}{AC}$$



Zusatz I. Will man diese Formel geometrisch konstruiren, so mache man eine Linie $AG = 2AC$, mit derselben als Hypotenuse und mit AE beschreibe man das rechtwinkliche $\triangle ACE$ (IV §. 40 Zus. III.) so ist $GE = \sqrt{(AG^2 - AE^2)} = \sqrt{(4AC^2 - AE^2)}$.

Da nun EG gefunden, so mache man folgende Proporzion

$$AC, AE :: EG, AB,$$

so wird $$AB = \frac{AE \cdot EG}{AC} = \frac{AE \sqrt{(4AC^2 - AE^2)}}{AC}$$

Wie aber diese vierte Proporzional-Linie AB gefunden wird, ist hinlänglich bekannt.

Zusatz II. Vermit elst der erhaltenen Formel hätte man finden können, aus der Seite des Sechsecks die Seite des Dreyecks, aus der Seite des Zehnecks die Seite des Fünfecks.

§. 33.

Es ist zwar in der theoretischen Geometrie sehr nothwendig, daß man die Aufgaben, welche die Vielecke betreffen, entweder bloß geometrisch oder auch algebraisch aufzulösen wisse. Hingegen in wirklichen Fällen, welche im gemeinen Leben oder in Künsten vorfallen können, ist

dieses nicht genug, sondern man muß auch im Stande seyn, das Verlangte in Zahlen anzugeben, welche dann die gesuchten Größen nach einem gewissen Maaße bestimmen. Derohalben wollen wir den Beschluß dieses Hauptstücks mit der arithmetischen Auflösung der nemlichen Aufgaben machen, die wir schon geometrisch oder algebraisch beantwortet haben.

§. 34.

Aufgabe.

Den Flächen-Inhalt eines irregulären Vielecks berechnen.

Auflösung. Man theile das Vieleck in lauter Dreyecke ein. (§. 6.)

Man berechne jedes Dreyeck insbesondere (IV §. 77.)

Man addire die Zahlen, welche den Flächen-Inhalt jedes Dreyecks anzeigen.

So ist die Summe der Flächen-Inhalt der ganzen Figur.

Dieses Verfahren ist so natürlich, daß es keines Beweises bedarf. Bey folgender Aufgabe wird ein Exempel angeführet werden.

§. 35.

Aufgabe.

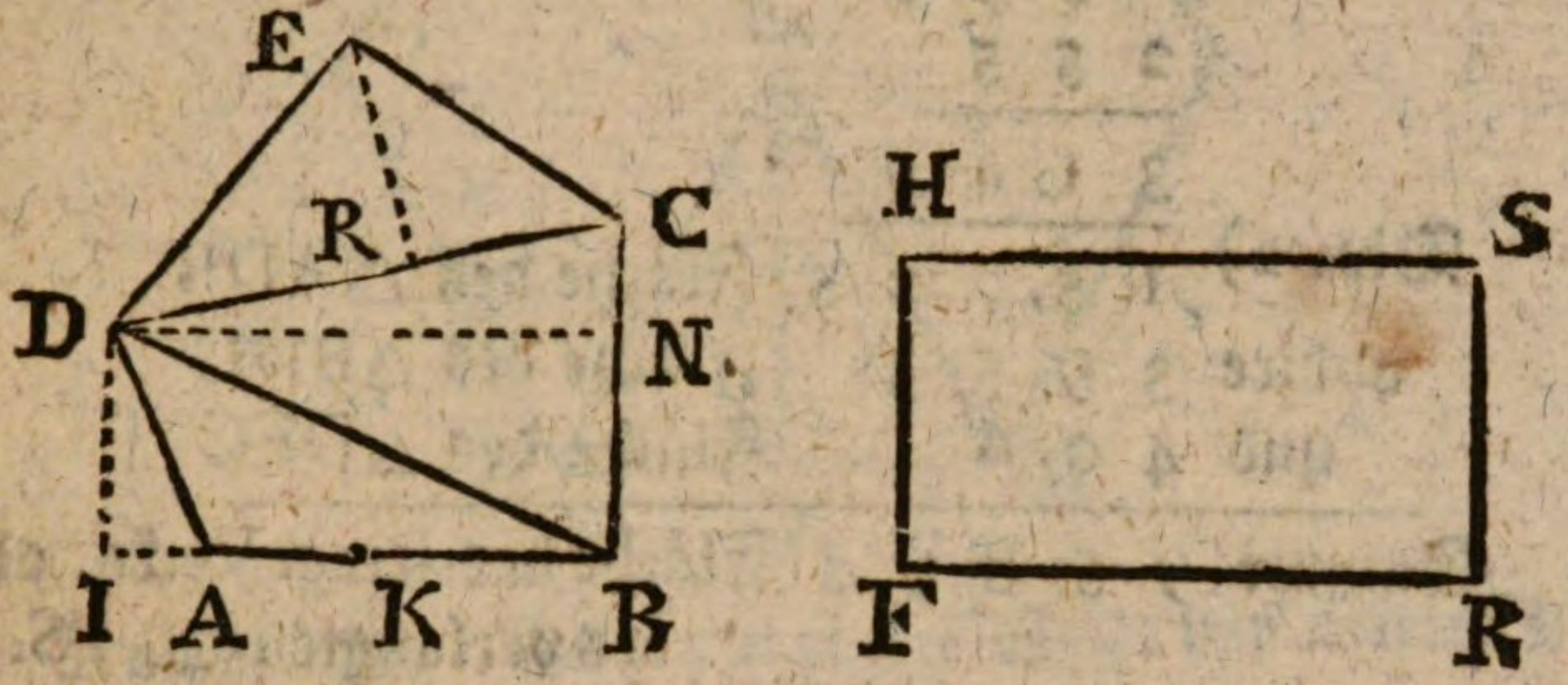
Durch die Rechnung ein Parallelogramm finden, das einem gegebenen Vielecke gleich sey.

Auflösung. Man berechne, wie bey voriger Aufgabe gelehret worden, den Flächen-Inhalt des gegebenen Vielecks. So hat man zugleich den Flächen-Inhalt des Parallelogramms, weil es dem Vielecke gleich seyn soll.

Diesen Inhalt dividire man durch eine gegebene oder willkürliche Basis, so bekömmt mau die Höhe des verlangten Parallelogramms. Oder man dividire durch eine gegebene

gebene oder willkürliche Höhe, so bekömmt man die Basis. (IV §. 75.)

Z. E. es soll ein Parallelogramm gemacht werden, das dem irregulären Fünfecke *A*BCED gleich sey.



Im Dreyecke DCE werde gefunden in Zollen oder Füßen oder Ruthen

Basis DC = 12,7
Höhe ER = 64

508
762

8128

2) 4064 Fläche des △DCE

Im △ BDC sey

Basis BC = 5,9
Höhe DN = 13,4

236
177
59

79,06

Div. 2) 39,53 Fläche des △BDC

Im △ ADB sey

Basis AB = 8,5

Höhe DE = 3,7

595

255

31,45

Div. 2) 15,725 Fläche des △ADB

addire 39,53 Fläche des △BDC

und 40,64 Fläche des △DEC

Summe 95,895 Fläche des irreg. Vecks, oder des verlangten □ FS.

Es sey nun die willkürliche oder gegebene Grundlinie FR = 18,34, so muß 95,895 durch 18,34 dividiret werden um die Höhe FH zu bekommen.

95895 : 18340 = 5,228....., oder beynahe 5,23

91700 Höhe FH des verlangten □.

41950

3.66.80

52700

3.66.80

160200

14.6.7.20

13480

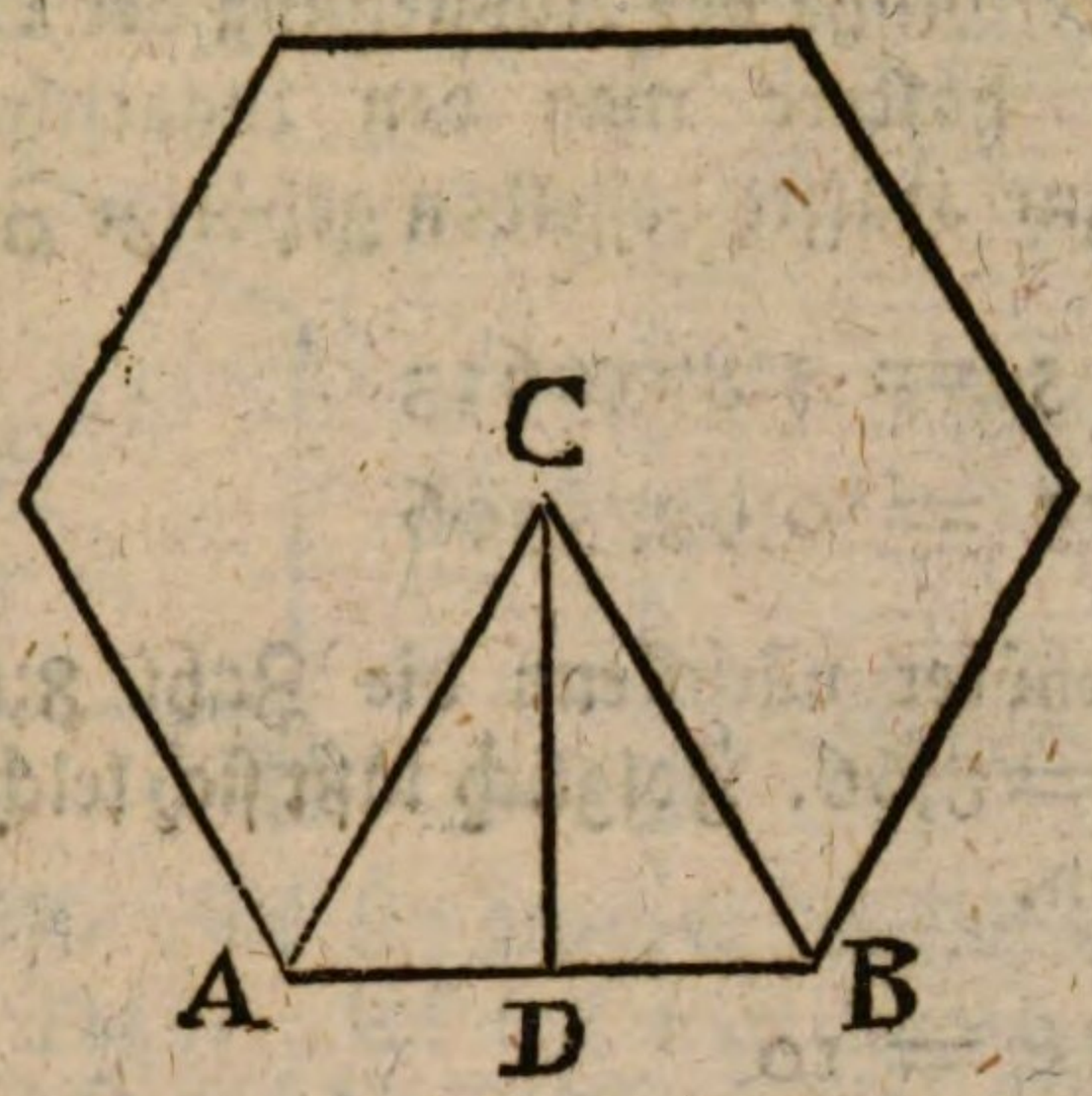
Wäre die Höhe FH gegeben oder willkürlich angenommen worden, so hätte man müssen 95,895 durch dieselbe dividiren um die Grundlinie FR zu bekommen.

§. 36.

Aufgabe.

Die Fläche eines regulären Vielecks ausrechnen.

Auflö-



Auflösung. Es sey AB die Seite des Vielecks und ACB eines der ähnlichgleichen Dreyecke, woraus das Vieleck bestehet.

Man berechne die Fläche dieses Dreyecks, und multiplizire sie mit der Anzahl der Seiten, z. E. mit 6, wenn die Figur ein Sechseck ist, so hat man die ganze Fläche des Vielecks.

Anmerkung. Das Dreyeck ABC kann berechnet werden, indem man die Höhe CD mißt, und dieselbe mit der Hälfte der gegebenen Grundlinie AB multiplizirt.

Es ist aber nicht allemal nöthig, die Höhe CD zu messen, weil sie schon von selbst durch die Grundlinie AB und die Anzahl der Seiten bestimmet wird. Denn daraus kann der Halbmesser AC, und ferner der Perpendikel CD gefunden werden.

Es sey AB die Seite eines Sechsecks, so ist $AC = AB$, $AD = \frac{1}{2} AB$, woraus sich dann der Kathete CD des rechtwinklichen Dreyecks ADC bestimmen läßt.

Z. E. wenn $AB = 10$, so ist $AC = 10$, $AD = 5$, folglich $CD = \sqrt{(10^2 - 5^2)} = \sqrt{(100 - 25)} = \sqrt{75}$.

Um sich die Mühe der Ausziehung der Quadratwurzel zu ersparen, halbire man den Logarithmus von 75 und suche die zur Hälfte desselben gehörige Zahl.

Log. 75 = 1;8750613

$\frac{1}{2}$ Log. 75 = 0;9375306

Hierzu gehöret nächstens die Zahl 8;66. Also ist nächstens CD = 8;66. Folglich läßt sich leicht das Dreyeck ACB berechnen.

Basis AB =	10	
Höhe CD =	8;66	
Produkt	86;6	
die Hälfte	43;3	Fläche des Dreyecks ACB
mult. mit	6	Anzahl der Seiten
	259;8	Fläche des Sechsecks.

Auf einer ähnlichen Art muß man in anderen Fällen verfahren.

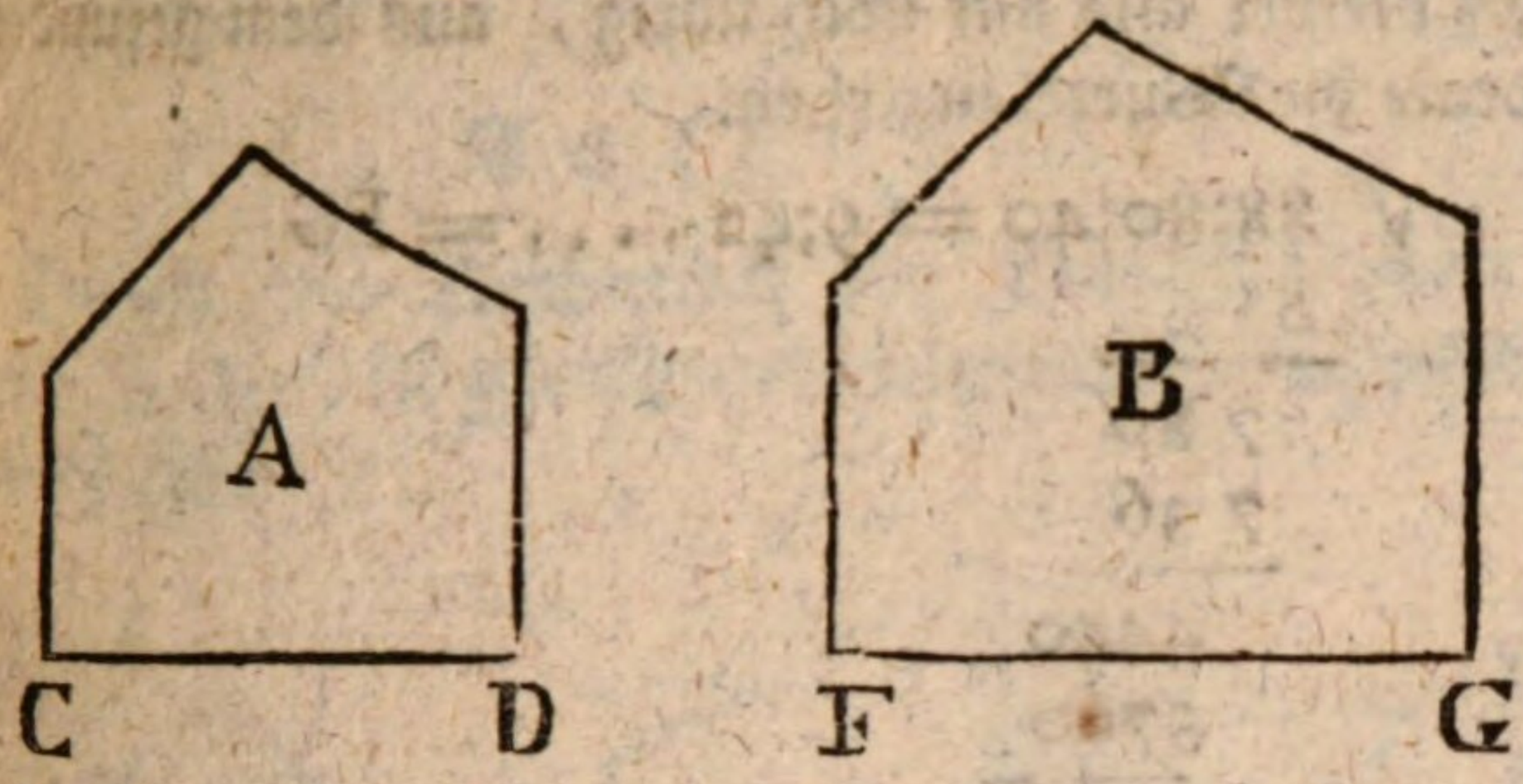
Zusatz. Wenn die Fläche eines regulären Vielecks gefunden ist, so kann man ein Parallelogramm machen das ihm gleich sey. Man verfährt dabey wie bey irregulären Vielecken. (§. 35.)

§. 37.

Aufgabe.

Durch die Rechnung ein Vieleck finden, das einem gegebenen ähnlich sey, und mit demselben in einem gegebenen Verhältnisse stehe.

Auflö



Auflösung. Es sey gegeben die Figur A deren eine Seite CD = 7;45. Es soll eine ähnliche Figur B gemacht werden, so daß die Fläche A sich zur Fläche *B* verhalte wie 5 zu 8. Es sey FG die unbekannte Seite welche mit C*D* homolog seyn soll.

Nun muß seyn

A, B :: 5, 8.

Es ist aber A, B :: $(CD)^2$, $(FG)^2$ (§. 9.)

also ist $(CD)^2$, $(FG)^2$ :: 5, 8

oder 5, 8 :: CD^2, FG^2

Man sage demnach: Wie sich die eine gegebene Verhältnißzahl zur andern verhält, so verhält sich das Quadrat der bekannten Seite CD zum Quadrate der unbekannten FG. In gegenwärtigen Falle ist

5, 8 :: $(7;45)^2$, $(FG)^2$

7;45

37 25

2 98 0

52 15

55;50 25 = $(7;45)^2$

× 8

444;02 00

Div. 5) 88;80 40 = $(FG)^2$

Es

Es bleibet also nur noch übrig, aus dem gefundenen Quadrate die Wurzel zu ziehen.

$$\sqrt{88;80|40} = 9;42 \ldots = FG$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \hline 780 \\ 736 \\ \hline 4440 \\ 3760 \\ \hline 680 \end{array}$$

Also muß genommen werden $FG = 9;42 \ldots$, und darüber eine Figur B beschrieben werden die der A ähnlich sey.

Zusatz I. Auf diese Art kann auch eine Figur gemacht werden die der gegebenen ähnlich und einigemal größer oder kleiner ist. Alsdann ist eine der Verhältnißzahlen $= 1$. Wenn B, z. E. 3mal größer seyn sollte als A, so hätte man folgende Proporzion

$$1, 3 :: (CD)^2, (FG)^2$$

oder $FG^2 = 3CD^2$

oder $FG = \sqrt{3\,CD^2}$.

Sollte B dreymal kleiner seyn als A, so müste man sagen

$$3, 1 :: (CD)^2, (FG)^2$$

oder $FG^2 = \frac{1}{3} CD^2$

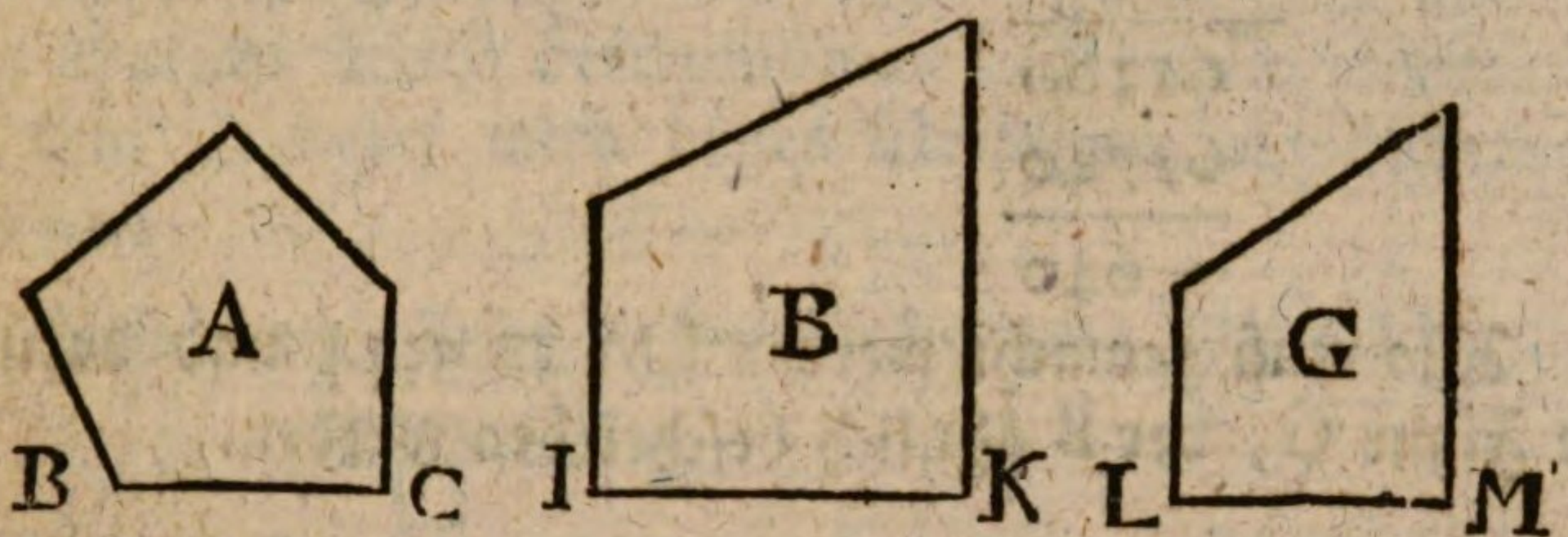
oder $FG = \sqrt{\frac{1}{3}\,CD^2}$.

Zusatz II. Ist das Verhältniß in Linien gegeben, so können diese erstlich gemessen, und folglich ihr Verhältniß in Zahlen ausgedrücket werden.

§. 38.

Aufgabe.

Durch die Rechnung ein Vieleck finden das einem gegebenen gleich und einem andern gegebenen ähnlich sey.



Auflösung. Es sind gegeben die Vielecke A und B. Es soll G dem A gleich und dem B ähnlich gemacht werden.

Man berechne die Flächen A und B (§. 34), und es werde gefunden z. E. A = 17 □ Zoll, und B = 23 □ Zoll.

Man messe auch die Grundlinie IK, und es werde z. E. gefunden IK = 4 Zoll.

Weil G = A seyn soll, so ist auch G = 17 □ Zol, eben so wie A. Nun ist, weil B und G ähnlich seyn sollen (§. 9.)

$$B, G :: (IK)^2, (LM)^2$$

$$\text{oder } 23, 17 :: IK^2, LM^2$$

Durch diese Proporzion läßt sich das Quadrat der Grundlinie LM finden. Nemlich im gegenwärtigen Falle wird

$$LM^2 = \frac{17.4^2}{23} = \frac{17.16}{23} = 11;8260$$

Hieraus wird die Quadratwurzel gezogen, so bekömmt man LM.

$$\sqrt{11;82}$$

$\sqrt{}$ 11;82|60 = 3;439 = beynahe 3;44.
9

282
256

2660
2049

61100
61740

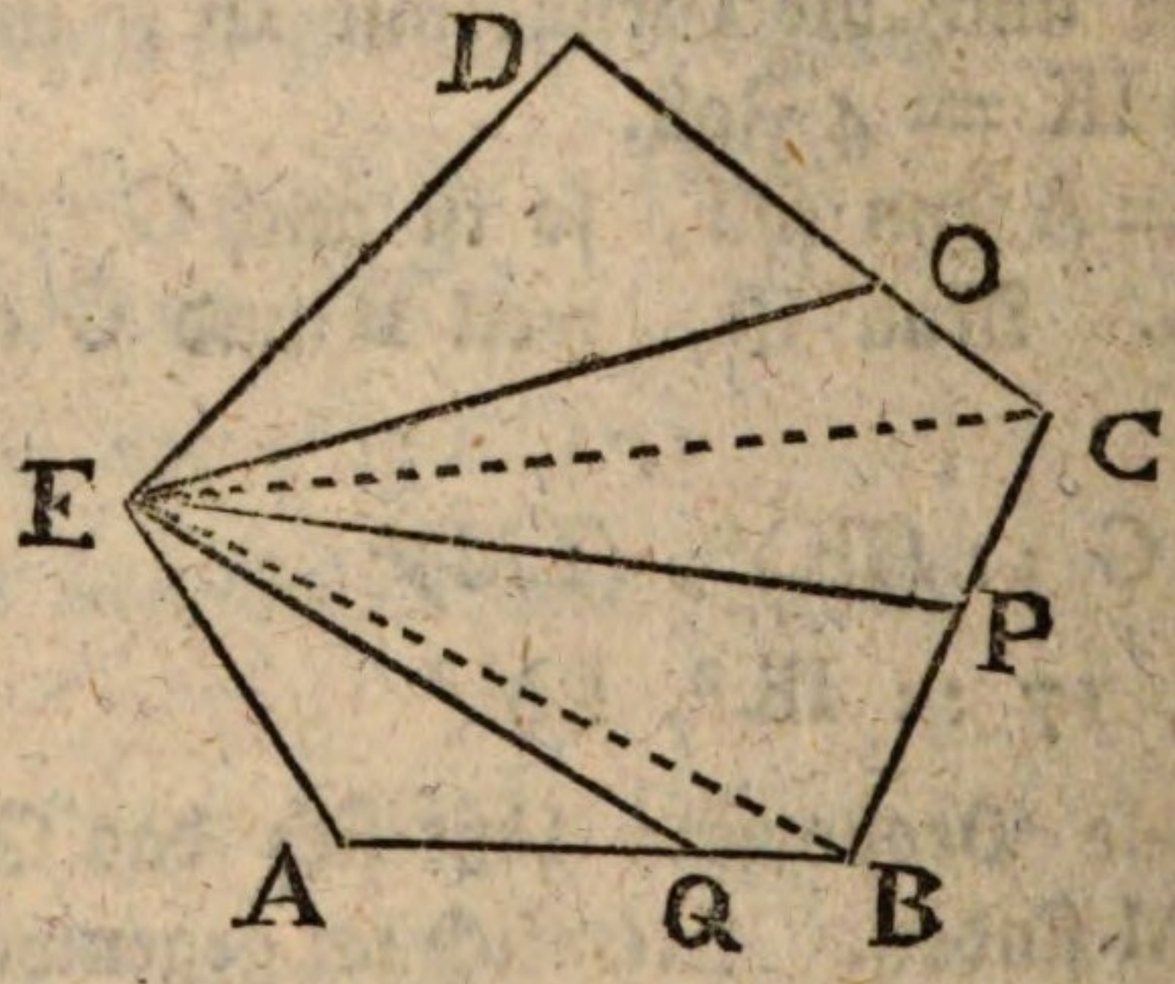
— 640

Also muß gemacht werden LM = 3;44 und darüber die Figur G, der B ähnlich beschrieben werden.

§. 39.

Aufgabe.

Vermittelst der Rechnung ein Vieleck in gleiche Theile eintheilen.



Auflösung. Man theile die Figur in lauter Dreyecke ein, als EDC, ECB, EBA. Man rechne die Fläche jedes Dreyeckes aus, und addire alle diese Flächen, so bekömmt man die Fläche der ganzen Figur. (§. 34)

Diese ganze Fläche dividire man durch die Anzahl der Theile die man haben will, so bekömmt man die Größe jedes Theiles.

Man

Man vergleiche den gefundenen Quozienten mit den Dreyecken, woraus die Figur bestehet. Ist nun das erste Dreyeck für einen Antheil zu groß, so nehme man davon eiu Stück ab, welches dem Ueberschusse gleich sey. Ist es zu klein so nehme man vom nächsten Dreyecke ein Stück ab, das dem mangelnden Theile gleich sey.

Auf solche Art erhält man den ersten Antheil, und auf eine ähnliche Weise bekömmt man auch die folgenden.

Ein Exempel wird dieses Verfahren am besten erläutern.

Gesetzt man finde in der fünfeckigten Figur ABCDE.

$\triangle ECD = 9$

$\triangle ECB = 14$

$\triangle EBA = 10$

So ist $ABCDEA = 33$

Gesetzt nun die Figur soll in 4 gleiche Theile getheilet werden, so ist jeder Theil $= \frac{33}{4} = 8\frac{1}{4} = 8;25.$

Von $\triangle EDC = 9;00$

subtrahire $\frac{1}{4}ABCDE = 8;25$

bleibet $\triangle EOC = 0;75$

Um dieses Stück EOC abzuschneiden, messe man EC. Gesetzt es sey $EC = 3$, so ist die Grundlinie des Dreyecks $EOC = 3$. Da nun die Fläche desselben seyn soll $= 0;75$, so ist die Höhe $= \frac{2.(0;75)}{3} = \frac{1;5}{3} = 0;5.$

In der Entfernung von 0;5 oder $\frac{1}{2}$ ziehe man demnach mit EC eine Parallellinie, welche die DC irgendwo in O schneiden wird, und ziehe EO, so ist der vierte Theil der Figur $= \triangle EDO$, uud es bleibet übrig $\triangle EOC = 0;75$. Nun muß das zweyte Viertel gefunden werden.

Von $\frac{1}{4}$ ABCDE = 8;25
subtrahire △ EOC = 0;75
bleibet △ ECP = 7;5

welches Dreyeck ECP mit △EOC das zweyte Viertel ausmachen muß. Da nun die Basis EC = 3, und die Fläche ECP seyn soll = 7;5, so ist die Höhe $\frac{2.(7;5)}{3}$ = $\frac{15}{3}$ = 5. In einer Entfernung = 5 ziehe man demnach eine gerade Linie mit EC parallel, so wird sie die CB irgendwo in P schneidrn. Ziehe CP. So ist △ECP = 7;5 und die beyden Dreyecke EOC und ECP machen das zweyte Viertel der Figur.

Von △ ECB = 14;0
subtrahire △ ECP = 7;5
bleibet △ EPB = 6;5

Weil also △EPB kein Viertel der Figur ausmacht, so muß noch ein Stück EQB des folgenden Dreyecks dazu genommen werden. Also

Von $\frac{1}{4}$ ABCDE = 8;25
subtrahire △ EPB = 6;50
bleibet △ CQB 1;75

Es sey EB = 3;5 so muß die Höhe des Dreyecks EQB werden = $\frac{2.(1;75)}{3;5}$ = $\frac{3;5}{3;5}$ = $\frac{35}{35}$ = 1. In einer Entfernung = 1, ziehe man also eine Linie parallel mit EB, so wird sie die AB irgendwo in Q schneiden, und alsdann ist △EQB = 1;75, und dieses △ nebst △ EPB macht das dritte Viertel der Figur.

Das

Das letzte Viertel EQA ist nun von selbst bestimmt. Um zu versuchen ob es richtig ist, verfahre man also:

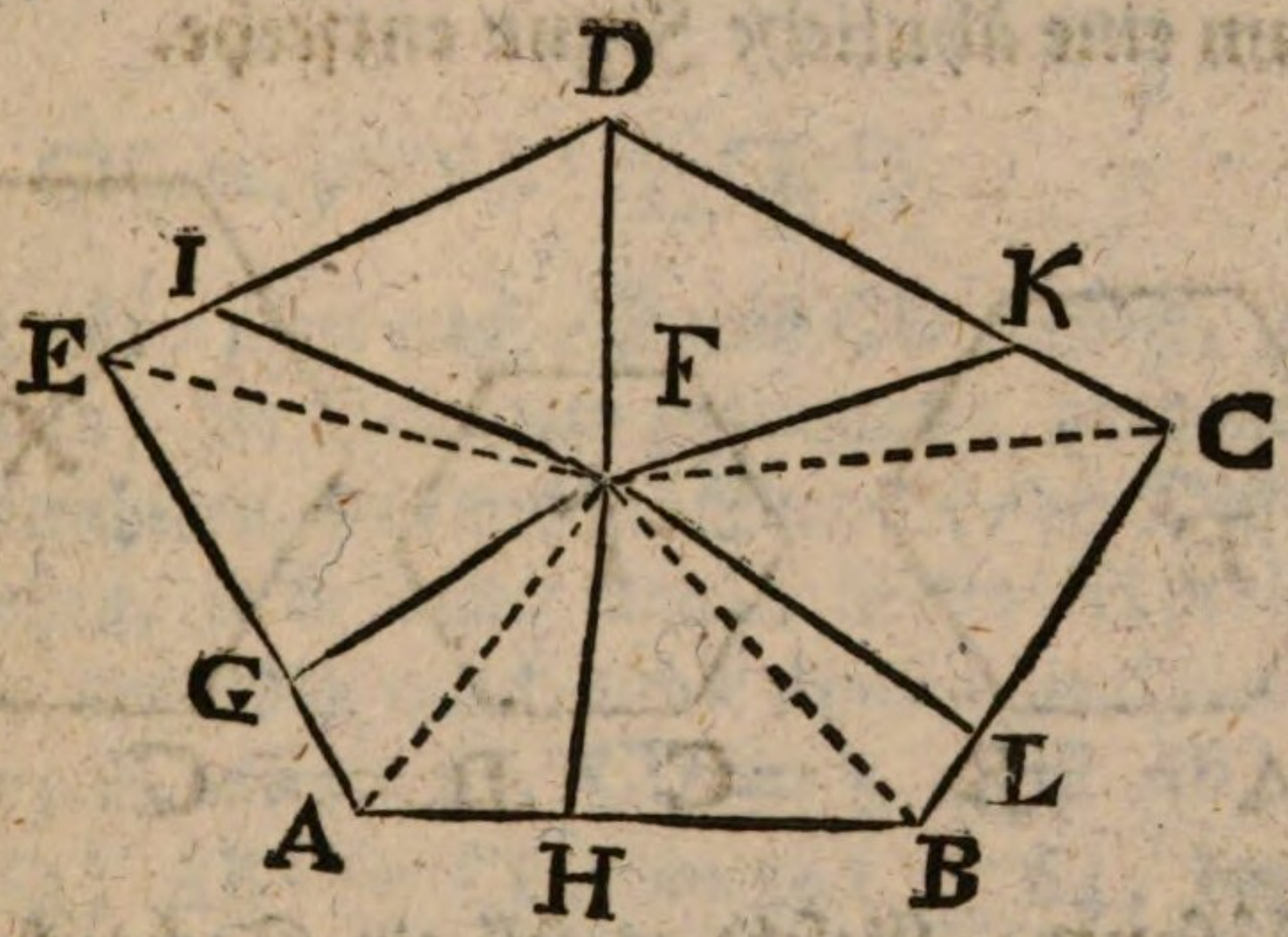
Von △ EAB = 10;00
subtr. △ EQB = 1;75
bleibet △ EQA = 8;25 = $\frac{1}{4}$ ABCDE.

In ähnlichen Fällen verfährt man auf eine ähnliche Art.

§. 40.

Aufgabe.

Durch die Rechnung eine geradlinichte Ebne so eintheilen, daß die Theilungslinien alle in einem bestimmten Punkte der Figur zusammen laufen.



Auflösung. Es soll z. E. die fünfeckigte Figur ABCDE in 6 gleiche Theile getheilet werden, so daß alle Theilungslinien aus dem gegebenen Punkte F entspringen.

Aus F ziehe die Linien FD, FC, FB, FA, FE, nach den Ecken der Figur, so entstehen fünf Dreyecke. Berechne den Inhalt derselben, und summire sie, so hast du den Inhalt der ganzen Figur. Diesen dividire durch 6, so ist der Quozient die Größe jedes Sechstels.

Nimm die eine gezogene Linie FD zu einer Theilnngslinie an. Wenn nun das Dreyeck FDC größer ist als

$\frac{1}{6}$ ABCDE, so schneide davon das Stück FCK ab, so daß $\triangle$ FDK $= \frac{1}{6}$ ABCDE.

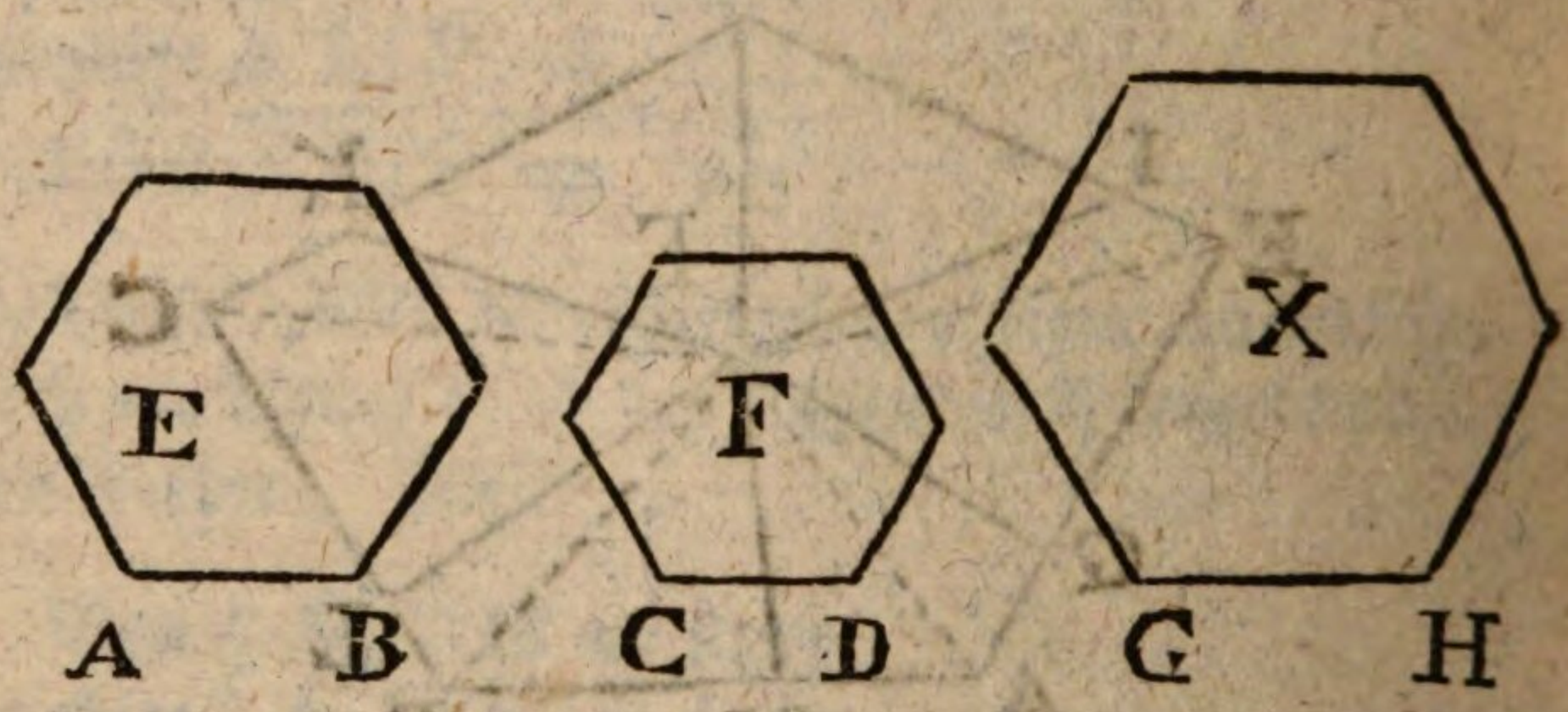
Fahre auf diese Art fort jedem Dreyecke so viel zuzugeben oder abzunehmen als nöthig ist, um jedesmal $\frac{1}{6}$ ABCDE zu bekommen, so ist die verlangte Eintheilung geschehen.

Es ist hier kein Exempel nöthig, weil dieses Verfahren mit dem vorigen (§. 39.) völlig übereinstimmt.

§. 41.

Aufgabe.

Durch die Rechnung zwey ähnliche Figuren addiren oder eine von der andern subtrahiren, so daß wiederum eine ähnliche Figur entstehe.



Auflösung. Gesetzt es soll ein Sechseck gefunden werden, das der Summe oder der Differenz der ähnlichen Sechsecke E und F gleich sey.

Es sey GH die Grundlinie des verlangten mit E und F ähnlichen Sechsecks X.

Nun ist

$$E, F :: AB^2, CD^2$$

daher $(E \pm F), F :: (AB^2 \pm CD^2), (CD)^2$

Es ist auch'

$$X\ F :: GH^2, CD^2$$

oder da $X = E \pm F$, so ist

$$(E \pm F),\ F :: GH^2, CD^2$$

Da nun auch

$$(E \pm F),\ F :: (AB^2 \pm CD^2),\ CD^2$$

so folget

$$GH^2, CD^2 :: (AB^2 \pm CD^2), CD^2$$

oder

$$GH^2 = AB^2 \pm CD^2$$

oder

$$GH = \sqrt{(AB^2 \pm CD^2)}$$

Das heißt, man muß *AB* nnd CD messen, die Zahlen quadriren, die Quadrate summiren, oder eines vom andern subtrahiren, und aus der Summe oder Differenz die Wurzel ziehen, so bekömmt man die Seite GH der Figur X, welche über derselben mit E und F ähnlich beschrieben wird.

Es seyz. E. $AB = 11$, $CD = 8$, so ist $AB^2 = 121$, $CD^2 = 64$, $AB^2 \pm CD^2 = 121 \pm 64$, das ist 185 oder 57, nachdem die Summe oder Differenz verlanget wird. Wird nach der Summe gefragt, so ist $GH = \sqrt{185} = 13;60.\ldots$ Suchet man die Differenz, so ist $GH = \sqrt{57} =$ beynahe 7;55.

§. 42.

Aufgabe.

Aus dem gegebenen Halbmesser die Seiten der eingeschriebenen regulären Vielecke in Zahlen bestimmen.

Auflösung. Wir wollen annehmen, der Halbmesser des Zirkels werde als Einheit angesehen, oder er sey = 1, so wird, wenn die Millionentheilchen, und was noch kleiner ist, aus der Acht gelassen werden

die Seite des	IIIecks	—	—	1;73205
— — —	IVecks	—	—	1;41421
— — —	Vecks	—	—	1;17557
— — —	VIecks	—	—	1;00000
— — —	VIIecks	—	—	0;86777
— — —	VIIIecks	—	—	0;76536
— — —	IXecks	—	—	0;68404
— — —	Xecks	—	—	0;61803
— — —	XIecks	—	—	0;56347
— — —	XIIecks	—	—	0;51763
— — —	XIIIecks	—	—	0;47844
— — —	XIVecks	—	—	0;44503
— — —	XVecks	—	—	0;41582

Es werden sehr selten Vielecke gebraucht, die mehr als 15 Seiten haben.

Diese Tafel läßt sich zum Theile aus den algebraischen Formeln dieses Hauptstückes von §. 26 bis §. 32. berechnen.

Wenn z. E. AB der Halbmesser und CD die Seite des Dreyecks andeutet, so ist gefunden worden $CD = \sqrt{3}AB^2$.

Setzet man nun $AB = 1$, so ist $CD = \sqrt{3} = 1;73205....$

Auf eine ähnliche Art kann die Seite des Vierecks (§. 27.), des Sechsecks (§. 22.), des Achtecks (§. 30.) des Zehnecks (§. 28.) gefunden werden. Aus dem Sechseck und dem Siebeneck kann man das XIIeck und XIVeck berechnen. (§. 31.) Was das VIIeck, IXeck, XIeck, XIIIeck und XVeck betrift, so sind sie durch einen andern Weg berechnet worden, welcher am gehörigen Orte angewiesen werden soll. Wir haben nur hier, der Vollständigkeit wegen, deren Seiten mit anführen wollen.

Zusatz. In voriger Tafel wurde der Halbmesser = 1 angenommen. Ist er aber nicht 1 sondern eine andere Zahl, z. E. 7, so wird jede Einheit, und folglich jede Zahl so vielmal größer. Es müssen also in diesem Falle alle Zahlen mit dem gegebenen Halbmesser multiplizirt werden, nemlich im angenommeuen Falle mit 7. So würde z. E. wenn der Halbmesser = 7 wäre, die Seite des Dreyecks 7mal 1;73205 das ist 12;12435.

§. 43.

Aufgabe.

Aus der gegebenen Seite eines regulären Vielecks den Halbmesser des Zirkels finden, worin solches Vieleck eigeschrieben werden kann.

Auflösung. Wenn die Seite des Vielecks zur Einheit geuommen wird, so bekömmt man folgende Zahlen für den Halbmesser.

Halbmesser fürs	IIIeck	—	—	0;57735
—	— IVeck	—	—	0;70710
—	— Veck	—	—	0;85065
—	— VIeck	—	—	1;00000
—	— VIIeck	—	—	1;15237
—	— VIIIeck	—	—	1;30657
—	— IXeck	—	—	1;46190
—	— Xeck	—	—	1;61804
—	— XIeck	—	—	1;77470
—	— XIIeck	—	—	1;93188
—	— XIIIeck	—	—	2;09012
—	— XIVeck	—	—	2;24703
—	— XVeck	—	—	2;40488
	etc.			etc.

Diese Zahlen können aus den vorhergehenden (§. 42.) vermittelst der bloßen Regel Detri berechnet werden. Z. E. aus der vorhergehenden Tafel siehet man, daß 1;73205

als Seite des regulären Dreyecks den Halbmesser = 1 voraussetzet. Weil aber jetzt die Seite des Dreyecks = 1 angenommen worden, so sage man

Die △ Seite 1;73205 giebt 1 zum Halbmesser, was giebt die △ Seite 1?

$$\text{Antwort: } \frac{1}{1;73205} = \frac{100000}{173205}$$

Man verrichte die Division

100000,0 : 173205 = 0;57735 ..... der verlangte Halbmesser.

86602 5

13397 50
12124 35

1273 150
1212 435

60 7150
51 9615

8 75350
8 66025

9325

Und so verfährt man mit den übrigen. Die Proporzion worauf hier die Regel Detri gegründet ist, fließt aus §. 5.

Sechstes Hauptstück.

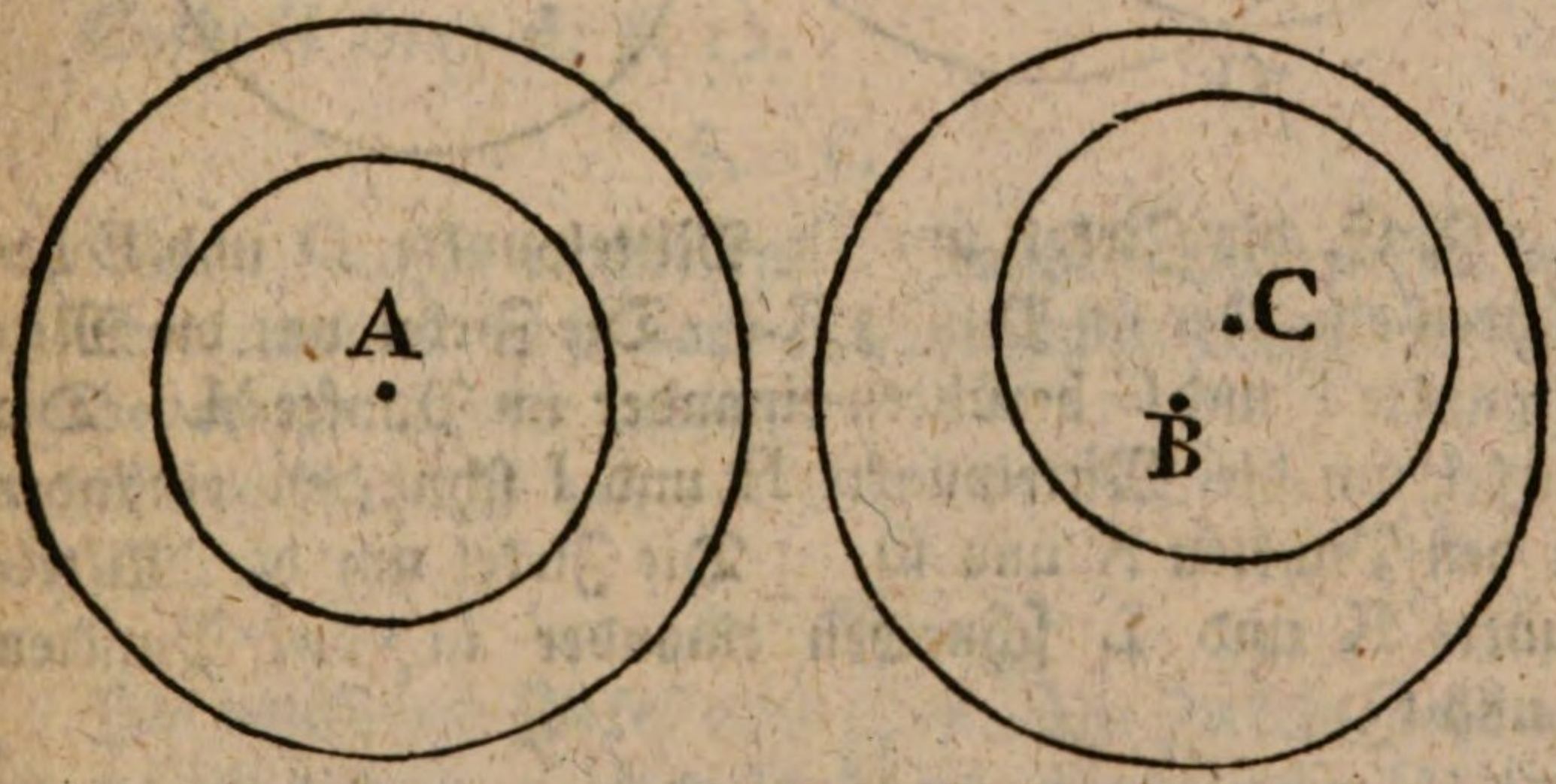
Vom Kreise oder Zirkel.

§. 1.

Wir haben schon in vorigen Hauptstücken einige Eigenschafteu des Kreises angeführet, weil sie zu den Beweisen bey den geradlinichten Figuren unentbehrlich waren. Hier aber wollen wir den Kreis näher betrachten, und das schon angeführte zugleich kürzlich wiederholen. Zu den schon bekannten Erklärungen müssen wir noch einige wenige hinzufügen.

§. 2.

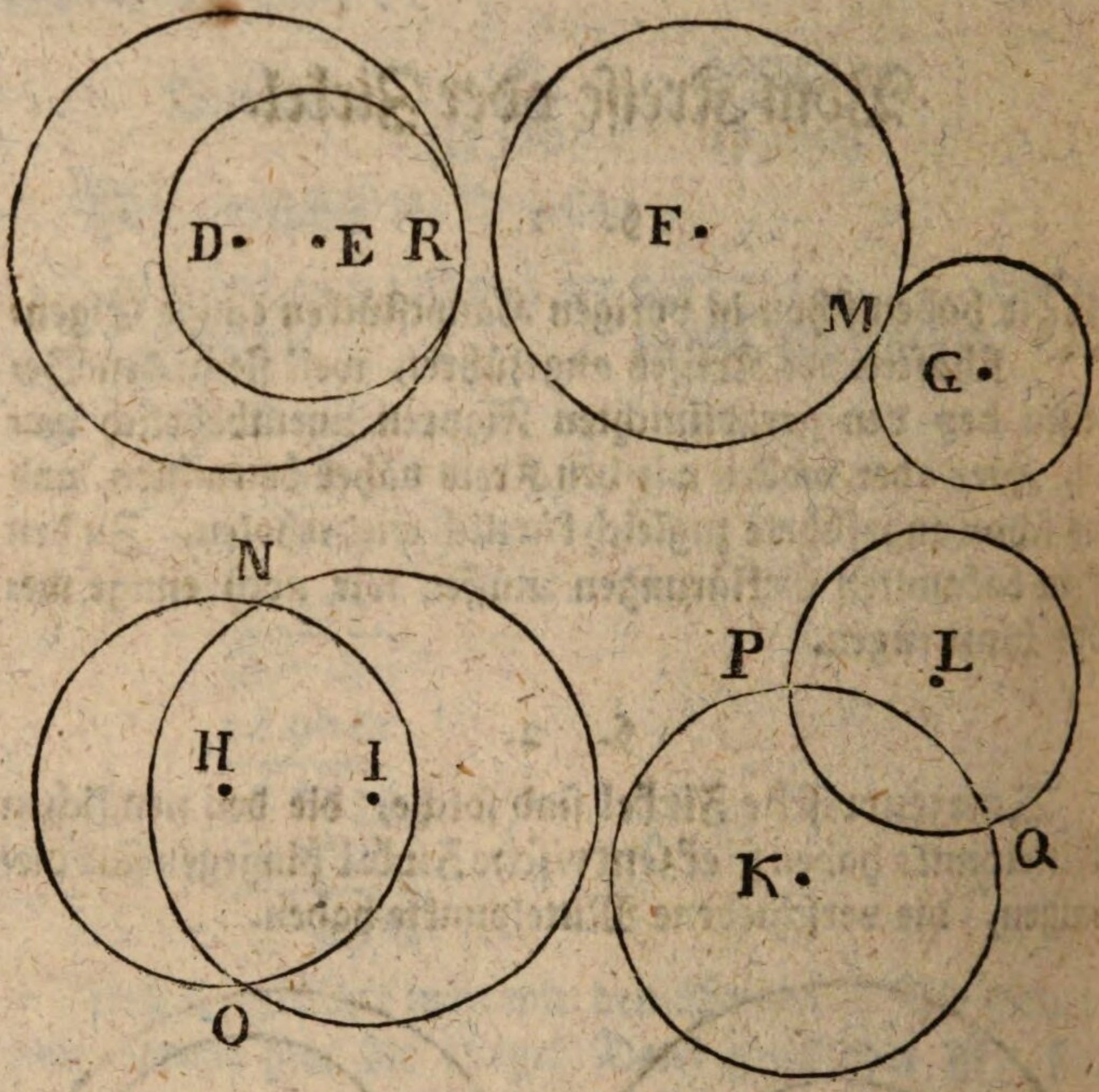
Konzentrische Zirkel sind solche, die den nemlichen Mittelpunkt haben; ekzentrische Zirkel hingegen sind diejenigen, die verschiedene Mittelpunkte haben.



Z. E. um den Mittelpunkt A siehet man zwey konzentrische Zirkel; um die Mittelpunkte B und C aber zwey ekzentrische Zirkel.

§. 3.

Zwey Zirkel berühren einander, wenn sie nur einen gemeinschaftlichen Punkt haben. Zwey Zirkel schneiden einander, wenn sie zwey gemeinschaftliche Punkte haben.



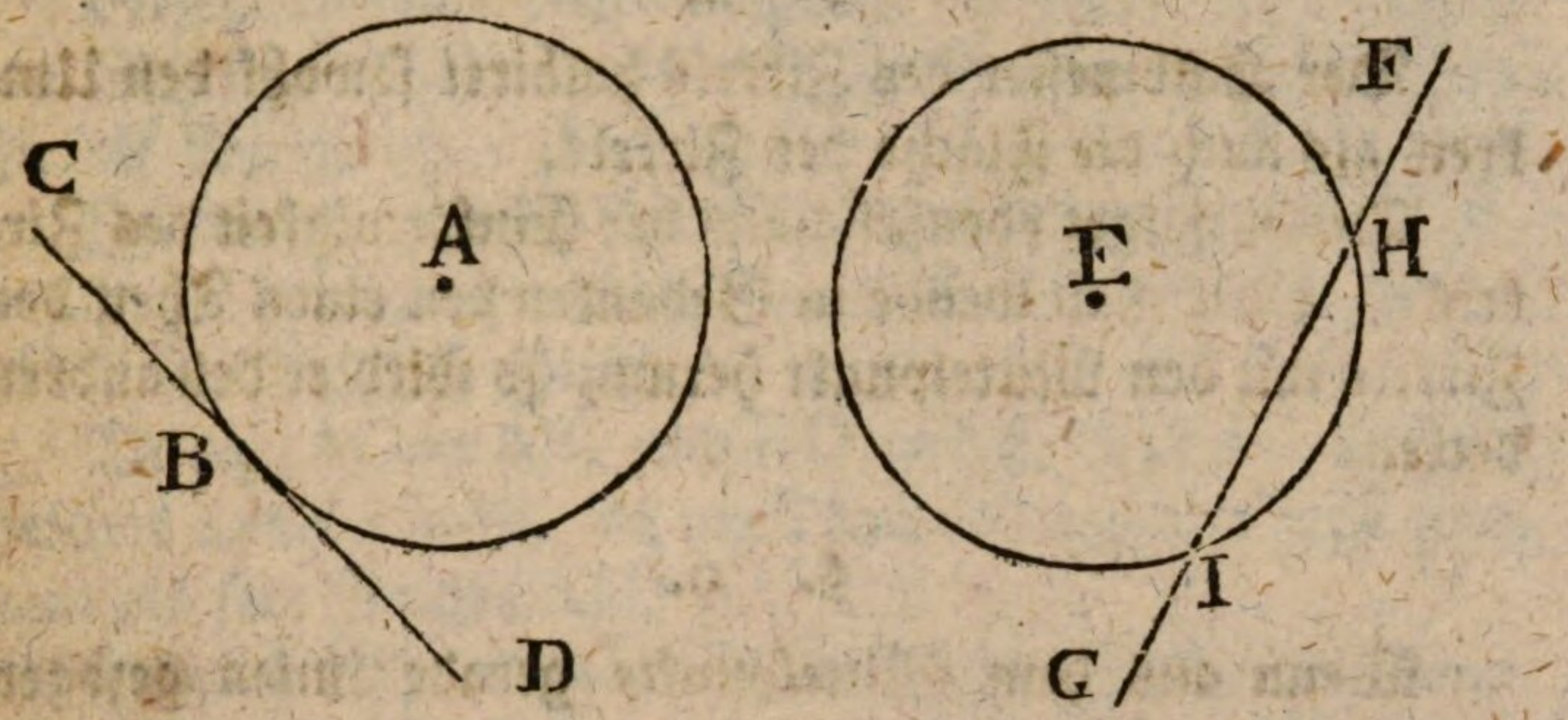
Z. E. die Zirkel um die Mittelpunkte D und E berühren einander im Punkte R. Die Zirkel um die Mittelpunkte F und G berühren einander im Punkte M. Die Zirkel um die Mittelpunkte H und I schneiden einander in den Punkten N und O. Die Zirkel um die Mittelpunkte K und L schneiden einander in den Punkten P und Q.

§. 4.

Eine gerade Linie berühret einen Zirkel, wenn sie nur einen Punkt mit dem Zirkel gemein hat, und auch

nicht

nicht mehr haben kann, wenn man sie verlängert. Hingegen schneidet eine gerade Linie den Zirkel, wenn sie, nöthigenfalls verlängert, zwey Punkte mit dem Zirkel gemein hat.



Z. E. Der Zirkel um den Mittelpunkt A wird von der Linie CD in B berühret. Der Zirkel um E wird von der Linie FG in H und I geschnitten.

§. 5.

Gleiche Zirkel haben gleiche Halbmesser und gleiche Durchmesser; gleiche Halbmesser oder gleiche Durchmesser gehören zu gleichen Zirkeln.

Siehe II Hauptst. §. 11.

§. 6.

Wenn ein Zirkel mit einem gewissen Halbmesser beschrieben worden, so sind alle Halbmesser in demselben dem gegebenen Helbmesser gleich.

Siehe II H. §. 10.

§. 7.

Im nemlichen Zirkel oder in gleichen Zirkeln gehören gleiche Bogen zu gleichen Sehnen, oder gleiche Sehnen zu gleichen Bogen.

Dieses folget aus der vollkommenen Einförmigkeit aller Theile des Zirkels. Wollte man es etwas strenger bewei-

beweisen, so dürfte man nur in Gedanken die gleichen Bogen und Sehnen über einander legen, da dann die Abschnitte des Kreises einander genau decken würden.

§. 8.

Der Halbmesser des Zirkels halbiret sowohl den Umkreis als auch die Fläche des Zirkels.

Dieses folget ebenfalls aus der Einförmigkeit des Zirkels. Oder man wende in Gedanken den einen Theil des Zirkels um den Mittelpunkt herum, so wird er den andern decken.

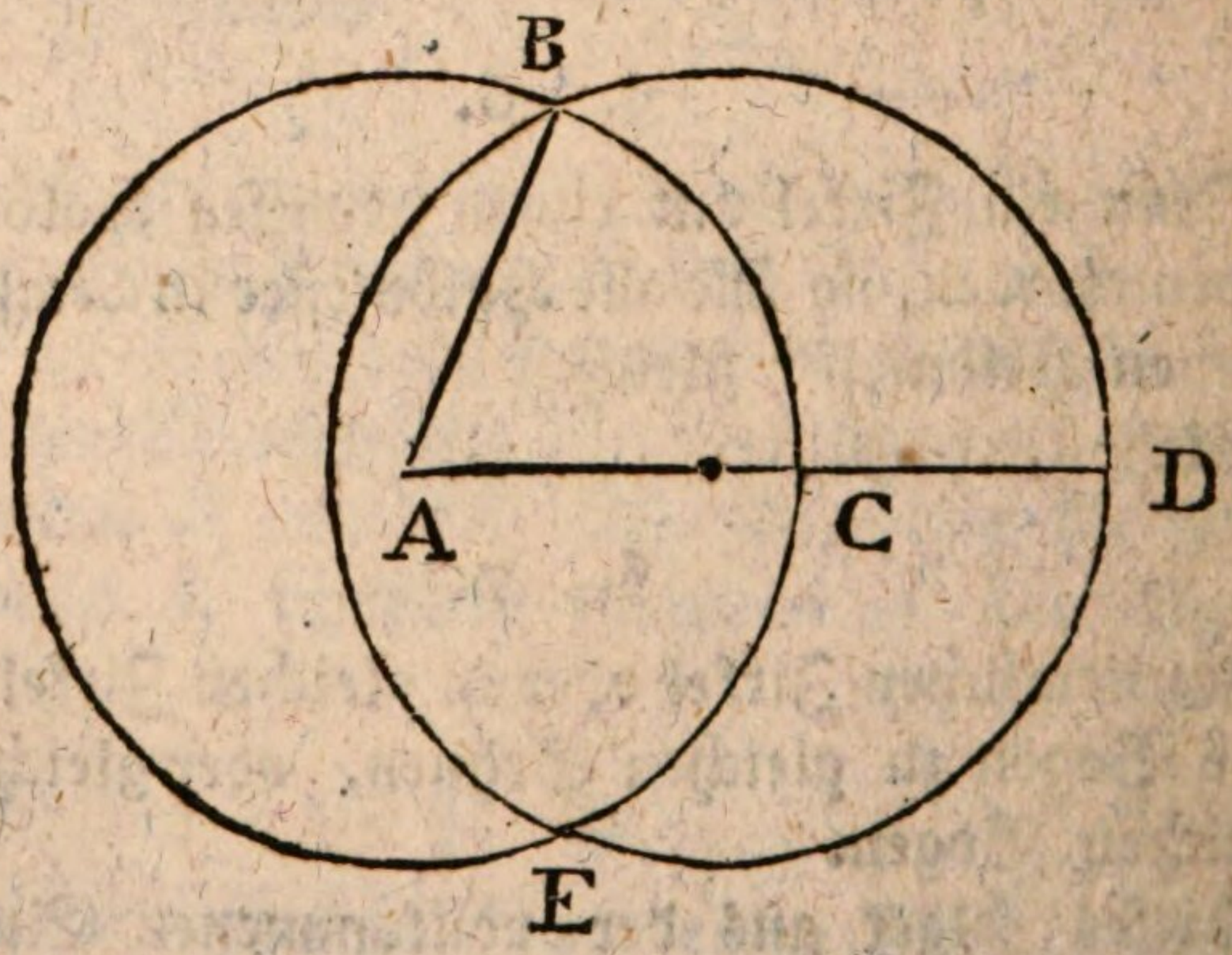
§. 9.

Wenn aus dem Mittelpunkte gerade Linien gezogen werden, so fallen ihre Enden entweder im Umkreise des Zirkels, oder außerhalb oder innerhalb desselben, nachdem solche Linien dem Halbmesser gleich, oder größer oder kleiner sind.

Dieser Satz bedarf keines Beweises.

§. 10.

Wenn zwey Zirkel einander schneiden, so sind sie nicht konzentrisch.



Gesetzt

Gesetzt die Zirkel BCE und BDE schneiden einander im Punkte B. Der Punkt A ist der Mittelpunkt des Zirkels BCE. Der nemliche Punkt A kann aber nicht zugleich der Mittelpunkt des andern Zirkels BDE seyn.

Gesetzt es wäre dieses möglich, so mache man folgenden Schluß. AB und AC als Halbmesser des nemlichen Zirkels sind gleich.

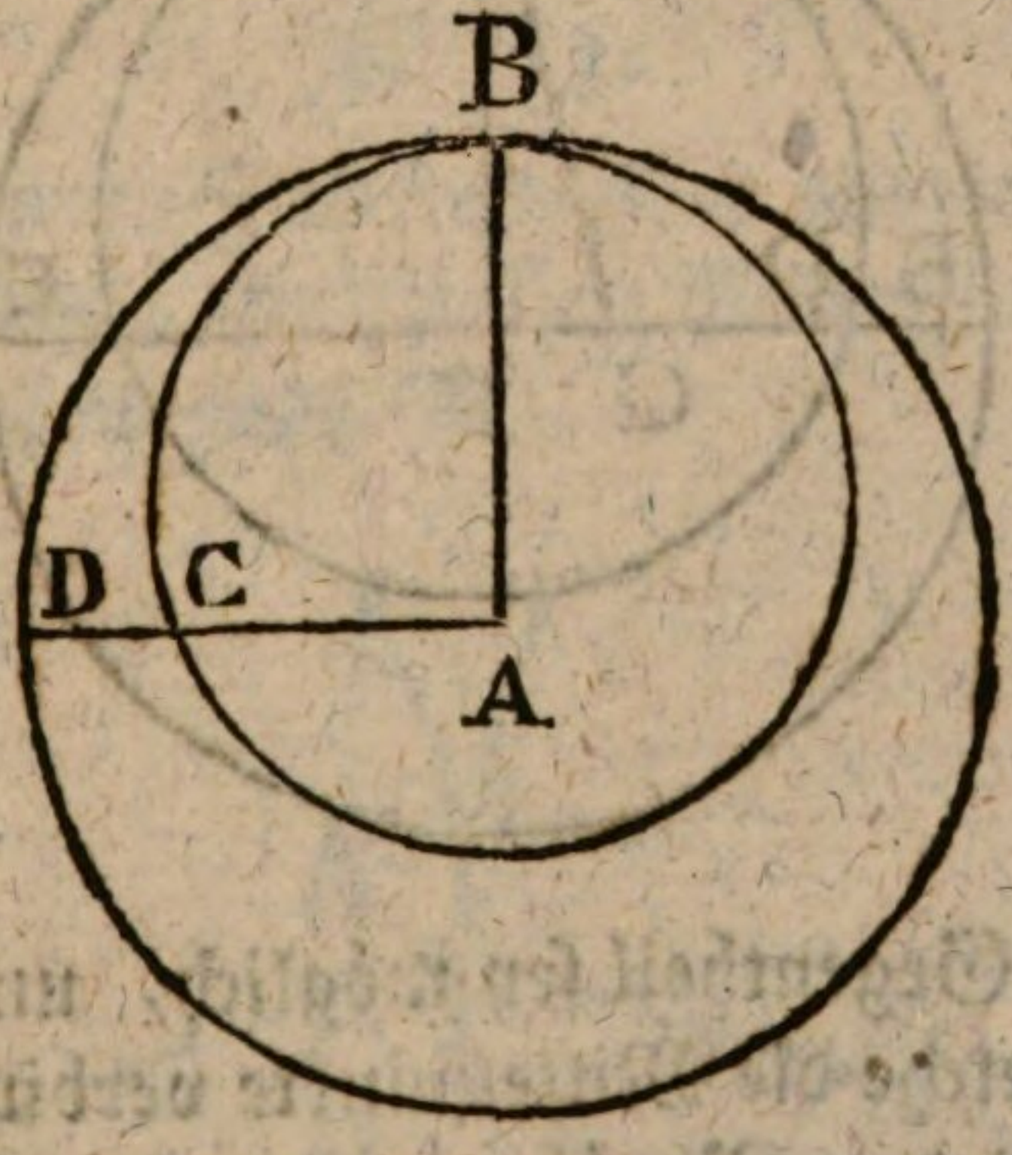
Ist nun A zugleich der Mittelpunkt des Zirkels BDE, so sind die Linien AB und AD beyde Halbmesser des Zirkels BDE, und folglich gleich.

Da nun AC = AB, und AD = AB, so ist AC = AD, welches ungereimt ist, da der Theil AC nicht so groß seyn kann als sein Ganzes AD.

Folglich ist es unmöglich, daß beyde Zirkel den nemlichen Mittelpunkt haben sollten.

§. 11.

Zwey Zirkel, die einander berühren, sind nicht konzentrisch.



Der Zirkel BCB berühre den Zirkel BDB, dessen Mittelpunkt in A ist, so muß der Zirkel BCB nothwendig einen anderen Mittelpunkt haben.

Gesetzt

Gesetzt das Gegentheil sey möglich, und es könne A der gemeinschaftliche Mittelpunkt beyder Zirkel seyn.

Erstlich ist AD = AB, als Halbmesser des nemlichen Zirkels.

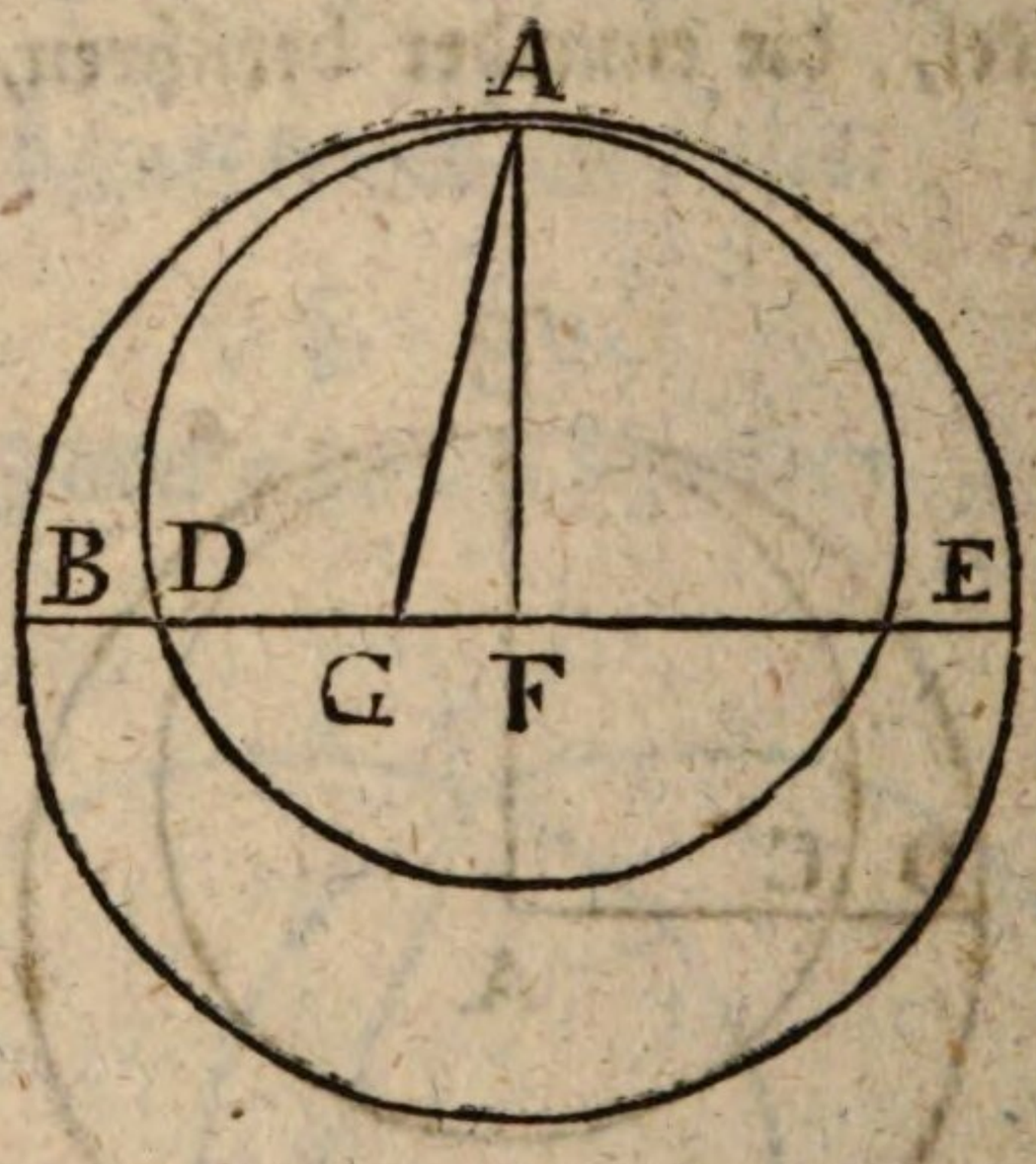
Ist nun *A* zugleich der Mittelpunkt des Zirkels BCB, so ist aus dem nemlichen Grunde *A*C = AB.

Da nun AD = AB, und AC = *A*B, so folget daß *A*D = AC, oder daß der Theil *A*C dem Ganzen *A*D gleich ist, welches widersinnig ist.

Folglich kann der Mittelpunkt des einen Zirkels nicht zugleich dem andern zugehören, der ihn berühret.

§. 12.

Wenn zwey Zirkel *ABA*, *ADA* einander inwendig berühren, so geht die gerade Linie, welche ihre Mittelpunkte verbindet, durch den Berührungspunkt, wenn sie nemlich genugsam verlängert wird.



Gesetzt das Gegentheil sey möglich, und es könne die gerade Linie, welche die Mittelpunkte verbindet, durch andere Punkte als den Berührungspunkt *A* gehen, so sey EB eine solche gerade Linie.

Dieses angenommen, so lägen beyde Mittelpunkte in der Linie EB, z. E. in F und in G.

Es ist im Dreyecke AGF die eine Seite AF nothwendig kleiner als die Summe der beyden übrigen, oder $AF < (AG + GF)$.

Der Punkt F ist der Mittelpunkt des Zirkels $ABEA$, folglich ist $AF = FB$.

Folglich ist auch $FB < (AG + GF)$

von $FB < AG + GF$

nimm ab $GF = GF$

so bleibet $FB - GF < AG$

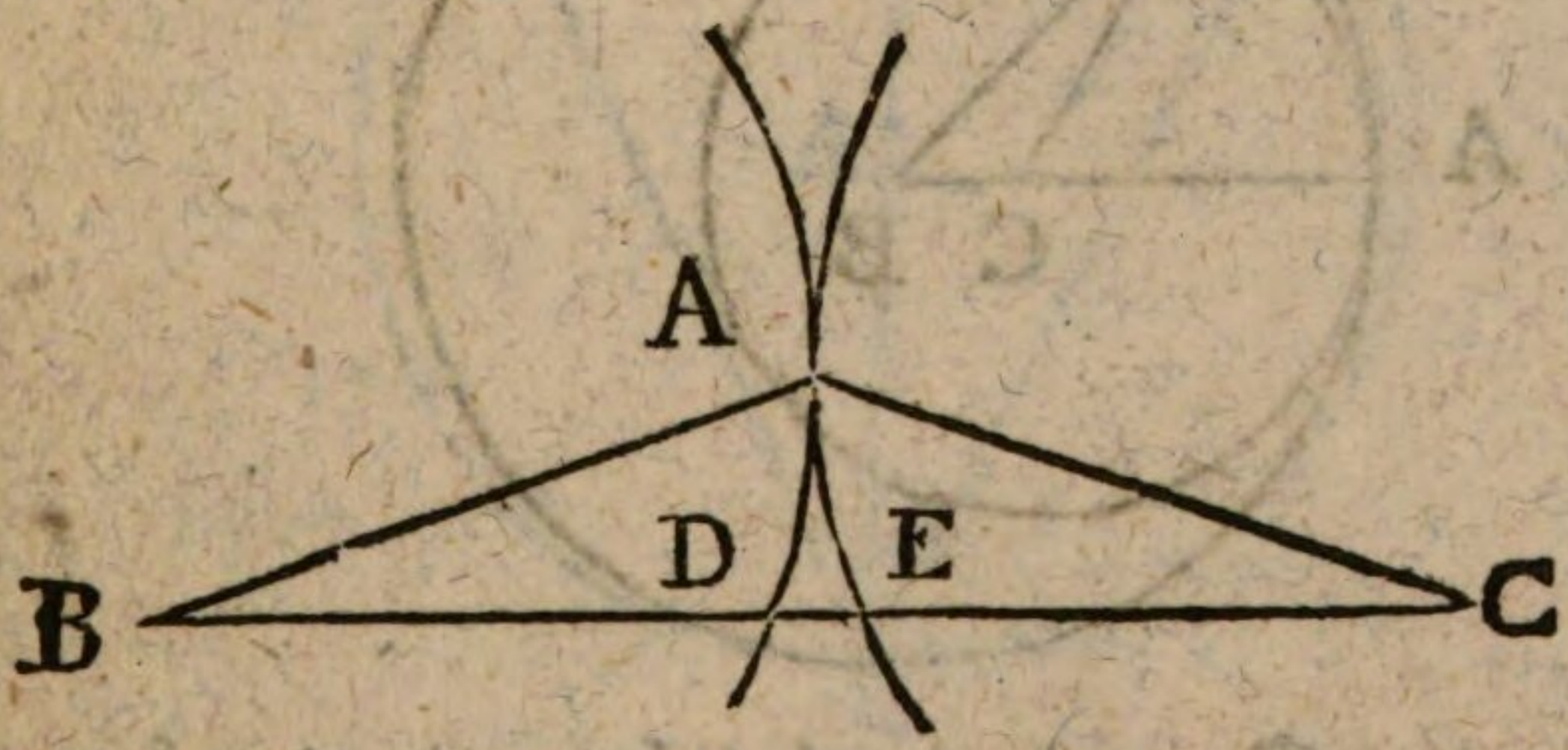
oder $BG < AG$.

Soll nun G der Mittelpunkt des einen Zirkels seyn, so ist $GD = AG$. Da nun $BG < AG$, so wird auch seyn $BG < GD$, das ist, das Ganze kleiner als sein Theil, welches ungereimt ist.

Also ist es nicht möglich, daß die Linie, welche beyde Mittelpunkte verbindet, nicht durch den Berührungsgunkt gehe, wenn sie verlängert wird.

§. 13.

Auch wenn zwey Zirkel einander auswendig berühren, geht die gerade Linie, welche ihre Mittelpunkte verbindet, durch den Berührungspunkt.



Es sey das Gegentheil möglich. Es seyen also B und C die Mittelpunkte beyder Zirkel. Die Linie BC, welche

welche sie verbindet, gehe nicht durch den Berührungspunkt *A*, sondern durch andere Punkte D und E.

In dieser Voraussetzung wäre $BA = BD$, als Halbmesser des nemlichen Zirkels.

Aus demselben Grunde wäre $CA = CE$.

Da nun $BA = BD$

$CA = CE$

so ist $BA + CA = BD + CE$

Setzet man nun DE zu BD + CE, so ist

$BA + CA < BD + DE + CE$

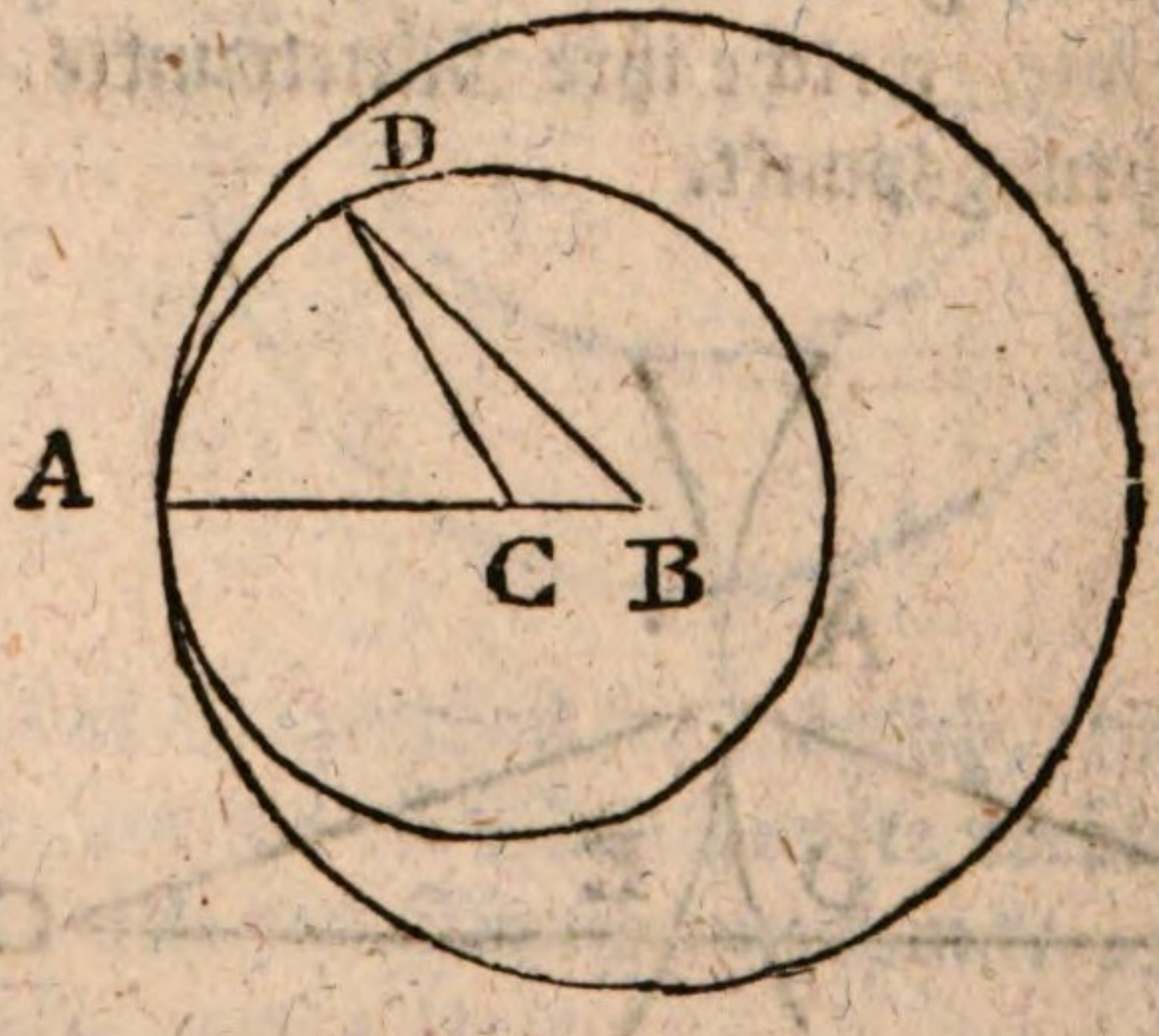
oder $BA + CA < BC$.

welches unmöglich ist (IV. §. 16.)

Also ist es nicht möglich, daß die Linie, welche die Mittelpunkte verbindet, anderswo als durch den Berührungspunkt gehe.

§. 14.

Zwey Zirkel können einander nur in einem einzigen Punkte berühren.



Es sey das Gegentheil möglich, und es mögen beyde Zirkel, deren Mittelpunkte B und C sind, einander in A und in D berühren.

Dieses

Dieses angenommen; so gehören die Punkte A und D zu den Umkreisen beyder Zirkel. Es ist demnach CA = CD. Folglich ist BC + CA = BC + CD.

Da nun B der Mittelpunkt des einen Zirkels ist, so muß auch seyn BD = BC + CA.

Da nun $BC + CD = BC + CA$

$BD = BC + CA$

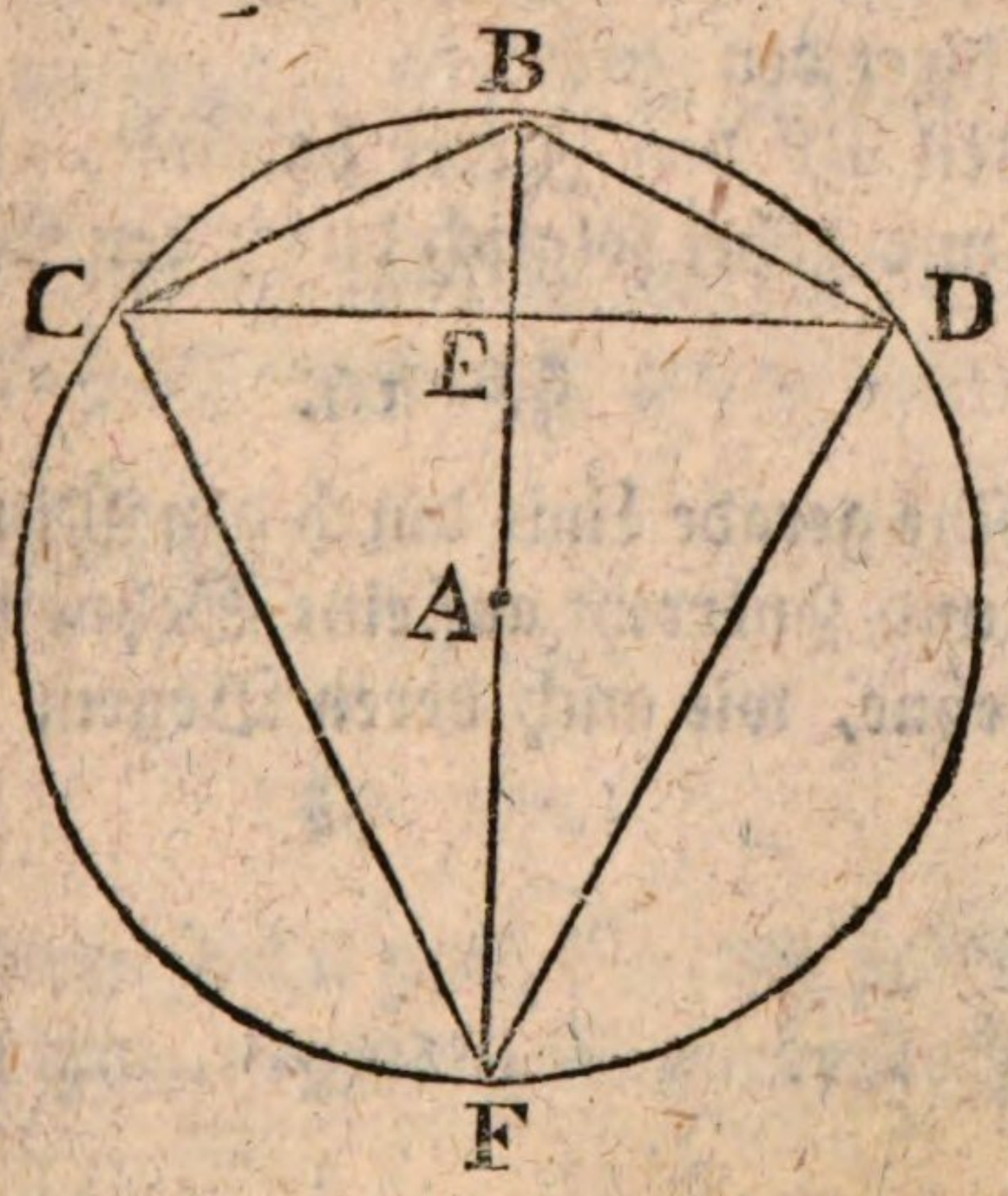
so ist $BC + CD = BD$

welches unmöglich ist. Denn im Dreyecke BDC kann die eine Seite BD nicht so groß seyn als die Summe der beyden übrigen BC und CD.

Also ist es auch unmöglich, daß beyde Zirkel einander in zwey verschiedenen Punkten berühren.

§. 15.

Wenn eine gerade Linie BF auf der Mitte der Sehne CD senkrecht stehet, so halbiret sie die beyden Bogen, die zur Sehne gehören, wie auch den Zirkel selbst, und gehet durch den Mittelpunkt.



1) Weil E die Mitte der Sehne CD ist, so ist in den Dreyecken BEC, BED, die Seite ED = EC.

Weil BF auf CD senkrecht stehet, so ist ∠BED = ∠BEC.

Es ist noch BE = BE.

Also ist △BED ≅ △BEC

Folglich ist auch BD = BC.

Da nun die Sehnen BD nnd BC gleich sind, so gehören sie zu gleichen Bogen (§. 7.)

Also sind beyde Theile BD und BC des Bogens CBD gleich, oder der Bogen ist in B halbiret.

Eben so wird bewiesen, daß der Bogen CFD in F halbiret ist, oder daß dessen Theile CF und DF gleich sind.

II) Da nun bewiesen, daß

Bogen BD = Bogen BC

Bogen DF = Bogen CF

so folget, daß

Bog. (BD + DF) = Bog. (BC + CF)

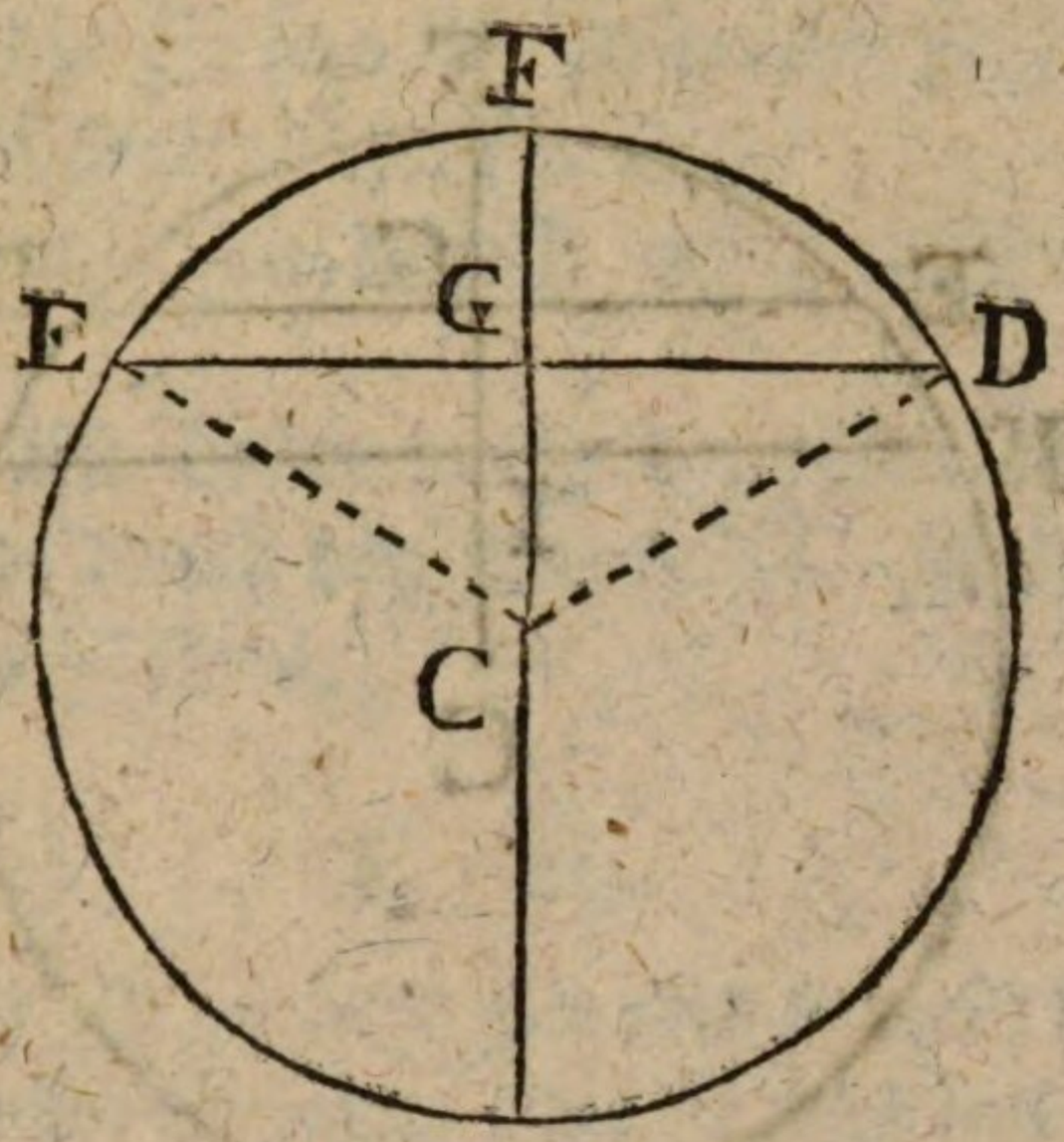
der Bog. BDF = Bog. BCF.

Also ist jeder dieser Bogen die Hälfte des Umkreises, oder BF halbiret den Zirkel.

III) Weil BF den Zirkel halbiret, so ist BF dessen Diameter, und gehet folglich durch den Mittelpunkt A.

§. 16.

Wenn eine gerade Linie durch den Mittelpunkt des Zirkels gehet, und senkrecht auf eine Sehne fällt, so halbiret sie solche Sehne, wie auch deren Bogen.



Die Linie CF schneide senkrecht die Sehne ED, so sind in G zwey rechte Winkel. Es ist auch CD = CE, wenn nemlich C der Mittelpunkt ist. Ferner ist CG = CG.

Da nun die rechtwinklichen Dreyecke CGD und CGE zwey Paar gleiche Seiten haben, so sind sie ähnlichgleich, und es ist GD = GE.

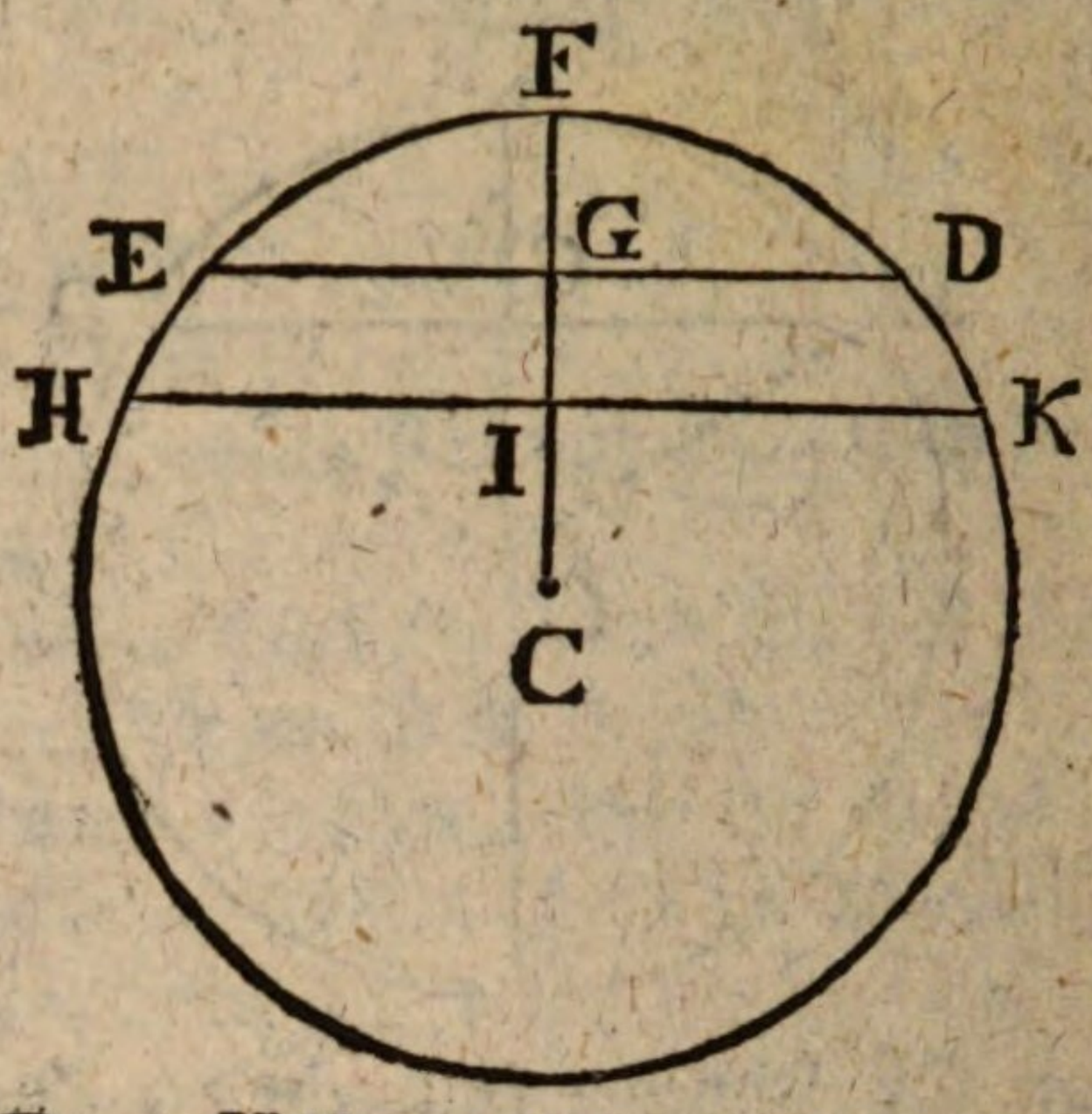
Folglich ist die Sehne ED in G halbiret.

Da nun die Linie CF auf ED senkrecht stehet und dieselbe halbiret, so halbiret sie auch den Bogen (§. 15).

Also ist EF = FD.

§. 17.

Wenn in einem Zirkel zwey Sehnen parallel sind, so sind die zwischen ihnen liegenden Bogen beyderseits gleich.



Es sey ED mit HK parallel.

Ziehe CF aus dem Mittelpunkte C senkrecht auf HK, folglich auch auf ED.

So halbiret CF die Bogen HFK und EFD (§. 16).

Also ist

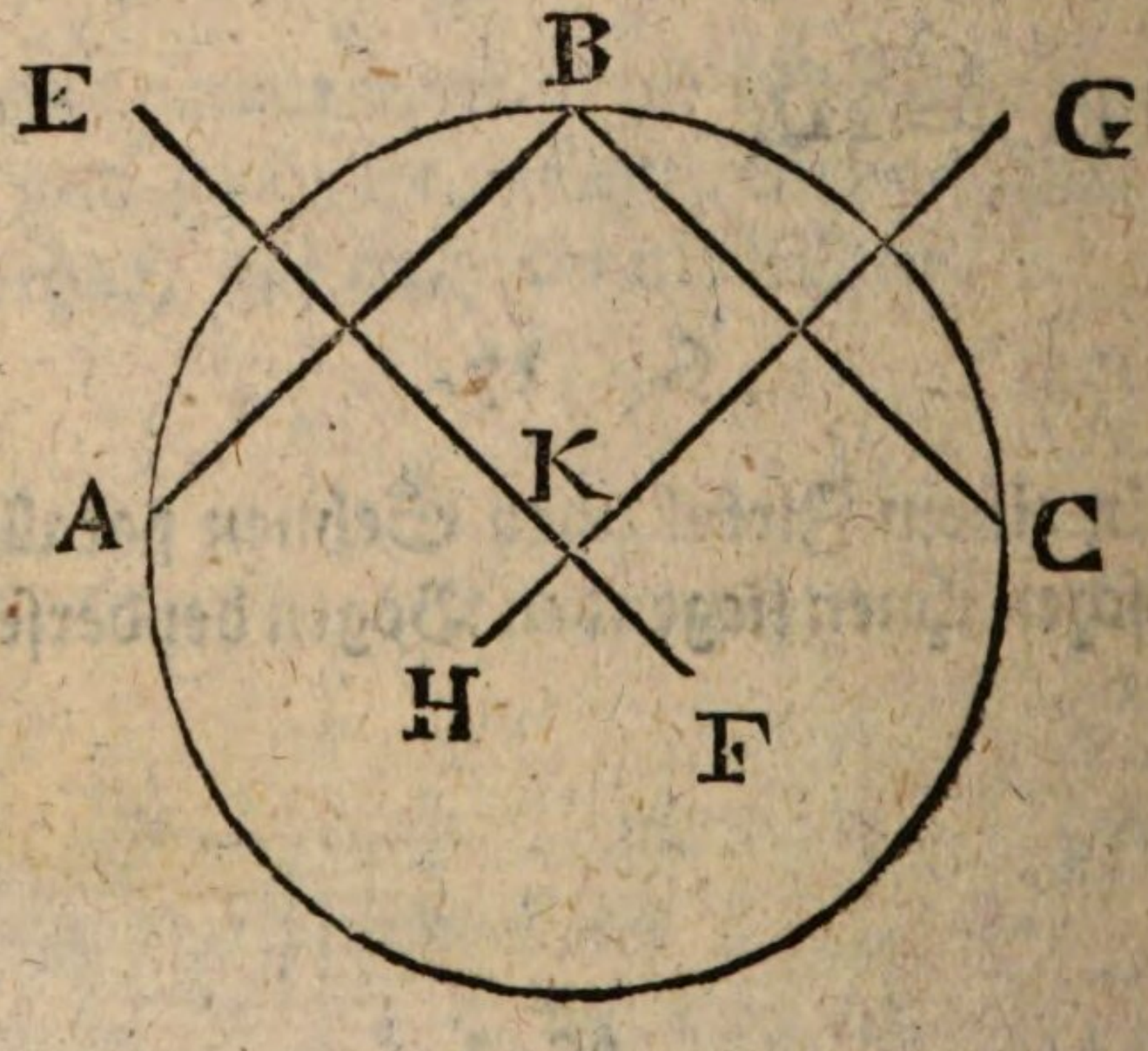
$$FH = FK$$
$$FE = FD$$

folglich $FH - FE = FK - FD$

oder $HE = KD$

§. 18.

Wenn zwey Sehnen durch senkrechte Linien halbiret sind, so schneiden solche senkrechte Linien einander im Mittelpunkte.



Weil

Weil GH die Sehne BC senkrecht halbiret, so gehet GH durch den Mittelpunkt. (§. 15.)

Aus der nemlichen Ursach gehet auch EF durch den Mittelpunkt.

Sie gehen also beyde durch den Mittelpunkt. Sie gehen aber beyde durch den Punkt K. Folglich ist K der Mittelpunkt des Zirkels.

§. 19.

Wenn zwey Zirkel drey Punkte gemein haben, so haben sie alle Punkte gemein, oder sie sind nur ein Zirkel.

(Siehe die vorige Figur.)

Gesetzt zwey Zirkel hätten die Punkte A, B und C gemein. Ziehe die Sehnen BC, BA. Halbire sie durch senkrechte Linien. So schneiden diese Linien einander in K, und K ist der Mittelpunkt beyder Zirkel. (§. 18.)

Da also beyde Zirkel den nemlichen Mittelpunkt haben, und mit dem nemlichen Halbmesser KA oder KB oder KC beschrieben sind, so sind sie nicht verschieden, sondern ein und derselbe Zirkel.

§. 20.

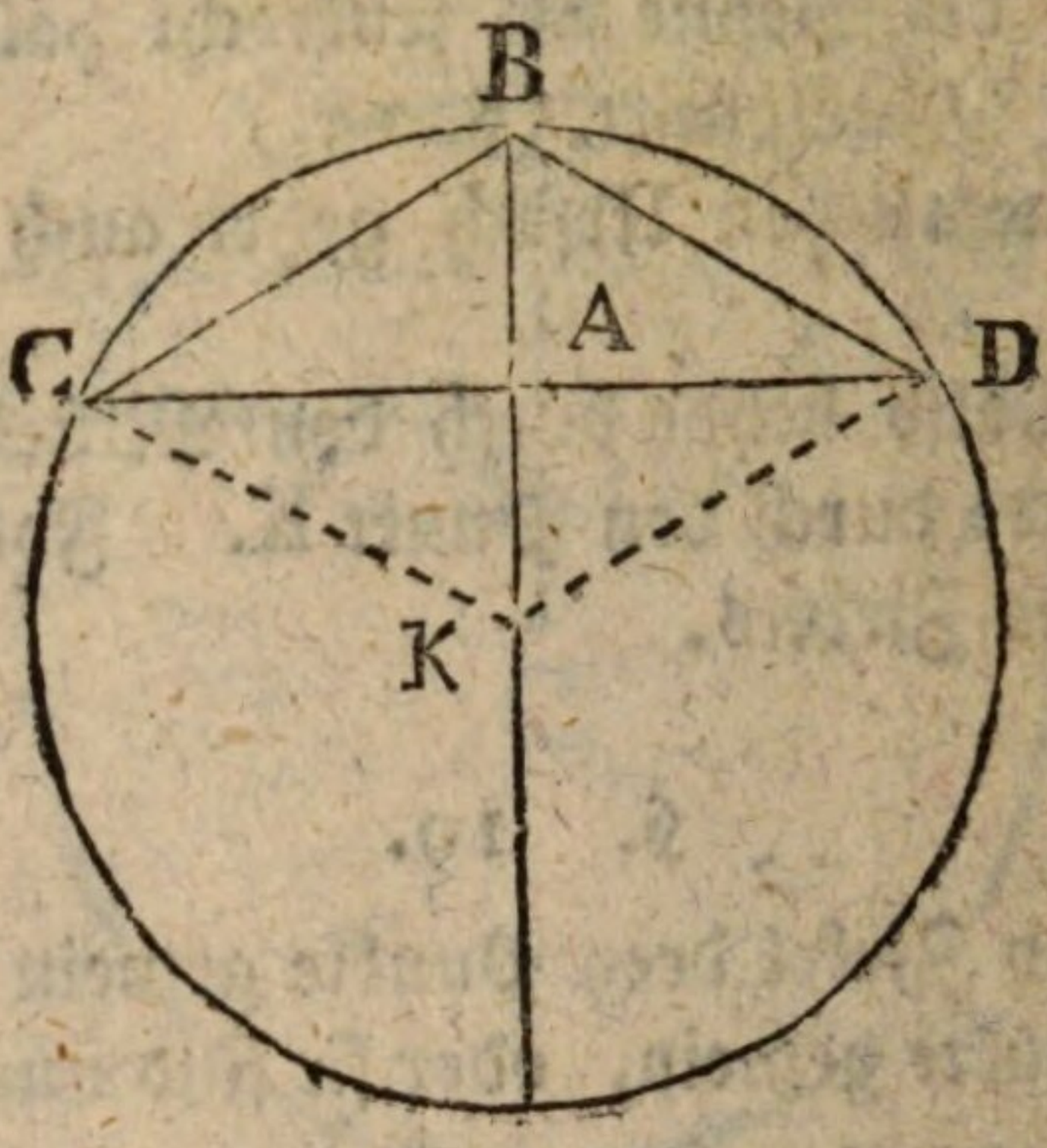
Zwey Zirkel können einander nicht in mehr als zwey Punkten schneiden.

Denn schnitten sie einander in mehr als zwey Punkten, so wären es nicht mehr zwey verschiedene, sondern ein und derselbe Zirkel. (§. 19.)

§. 21.

Wenn eine Linie BK durch den Mittelpunkt gehet, und einen Bogen oder eine Sehne halbiret, so ist sie auf der Sehne senkrecht.

(Siehe die folgende Figur.)



Gesetzt BK geht durch den Mittelpunkt K und halbiret den Bogen CBD in B.

I) Weil die Bogen BD, BC gleich sind, so sind auch ihre Sehnen BD, BC gleich.

In den Dreyecken BCK, BDK, ist demnach BK = BK, KD = KC, BD = BC. Folglich sind beyde Dreyecke ähnlichgleich, und es ist ∠BKD = ∠BKC.

Da in den Dreyecken KAD und KAC, der ∠AKD = ∠AKC, KD = KC, KA = KA, so sind die Dreyecke ähnlichgleich, und es ist ∠KAD = ∠KAC, folglich sind beyde Winkel rechte, und KA ist senkrecht auf CD.

II) Wenn AK die CD halbiret, so ist AD = AC.

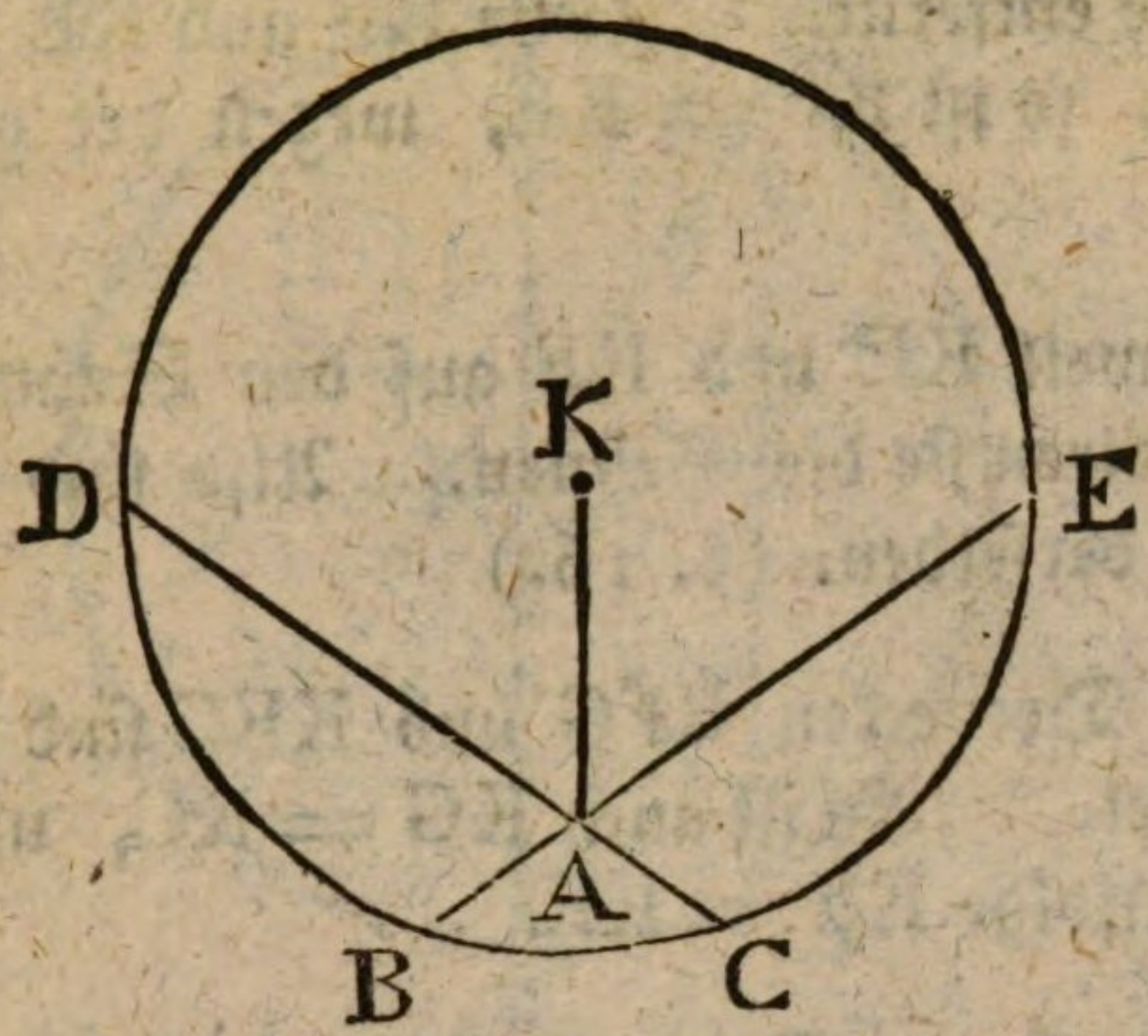
Es ist auch AK = AK und KD = KC.

Folglich △KAD ≅ △KAC.

Folglich ∠KAD = ∠KAC, beyde sind rechte, und AK ist senkrecht auf CD.

§. 22.

Wenn zwey Sehnen (die keine Durchmesser sind), einander schneiden, so können sie einander nicht halbiren.



Gesetzt es könnten die Sehnen DC und BE einander in ihrer Mitte A schneiden.

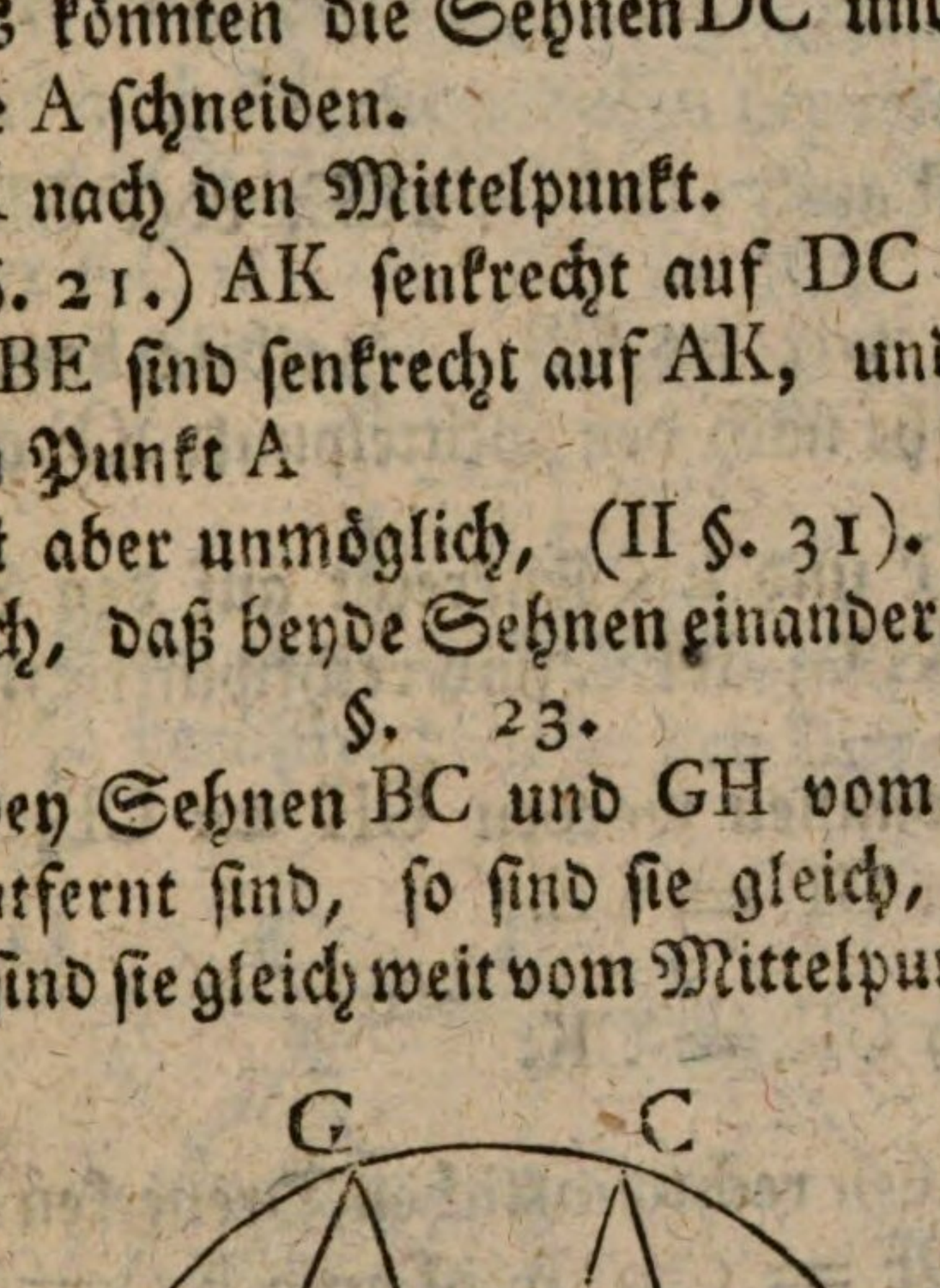
Ziehe AK nach den Mittelpunkt.

So ist (§. 21.) AK senkrecht auf DC und auf BE, oder DC nnd BE sind senkrecht auf AK, und gehen durch den nemlichen Punkt A

Dieses ist aber unmöglich, (II §. 31). Also ist es auch unmöglich, daß beyde Sehnen einander halbiren.

§. 23.

Wenn zwey Sehnen BC und GH vom Mittelpunkte gleich weit entfernt sind, so sind sie gleich, und wenn sie gleich sind, so sind sie gleich weit vom Mittelpunkte entfernt.



I) Es seyen die Sehnen BC und GH gleich weit vom Mittelpunkte entfernt. Ziehe KF und KE senkrecht auf die Sehnen, so ist KF = KE, wegen der gleichen Entfernung.

Ferner weil KE und KF auf den Sehnen senkrecht sind, so halbiren sie die Sehnen. Also sind FG und CE die Hälften derselben. (§. 16.)

In den Dreyecken KFG und KEC sind in F und E rechte Winkel. Es ist auch KG = KC, und der Voraussetzung zufolge KF = KE.

Also sind beyde Dreyecke ähnlichgleich, und es ist GF = CE.

Folglich ist auch 2GF = 2CE, oder GH = CB.

II) Es sey GH = CB. Halbire beyde Sehnen in F und E. Ziehe nach den Mittelpunkt KF und EK.

So sind KF und EK senkrecht auf den Sehnen, und die Dreyecke KFG, KEC sind rechtwinklich.

Da angenommen worden GH = CB, so ist $\frac{1}{2}$ GH = $\frac{1}{2}$ CB, oder GF = CE.

Es ist auch GK = CK.

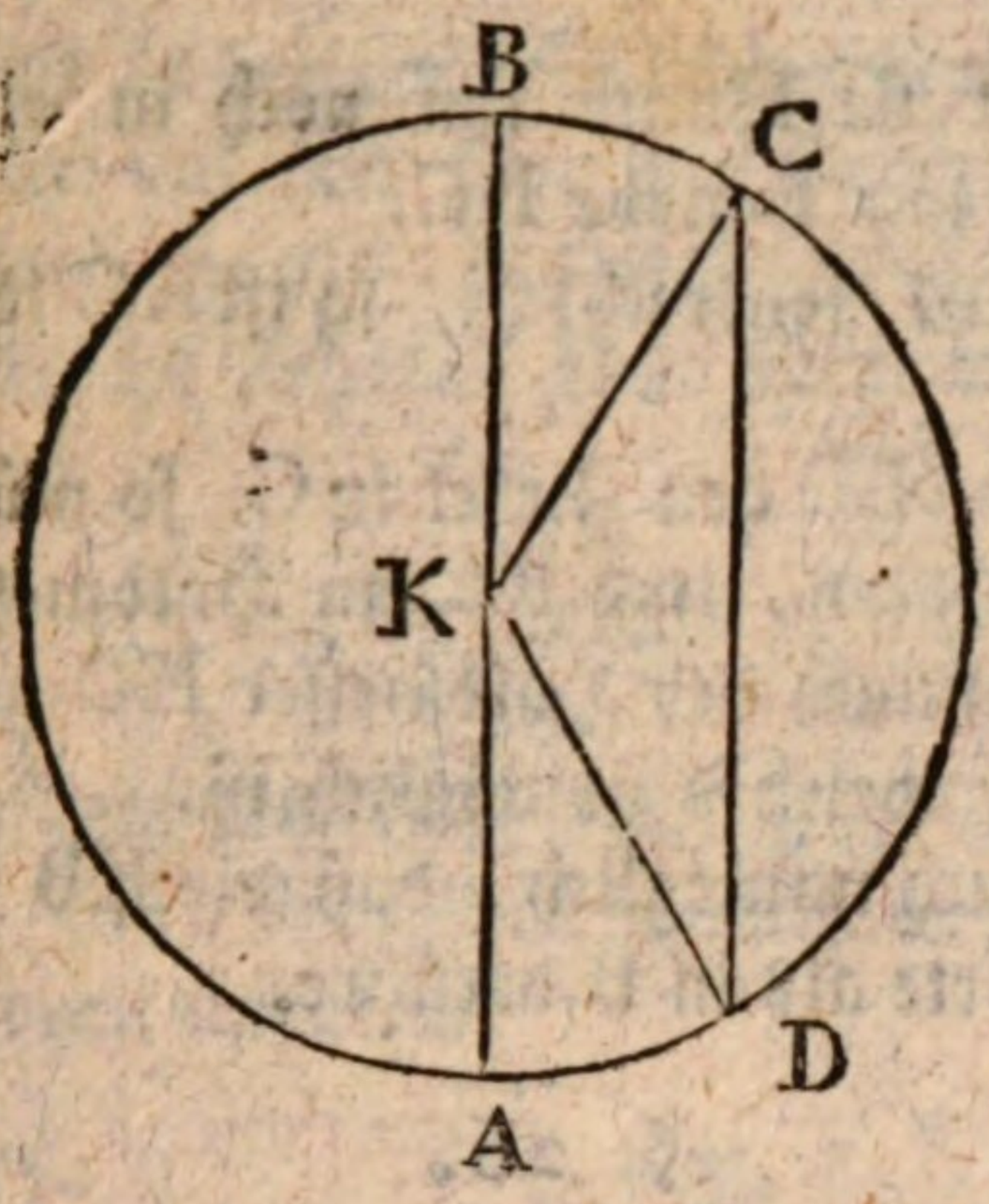
Da nun in den rechtwinklichen Dreyecken KFG, KEC, KG = KC, GF = CE, so ist auch KF = KE.

Das heißt, die Sehnen sind vom Mittelpunkte gleich weit entfernt.

§. 24.

Der Durchmesser des Zirkels ist größer als jede andere Sehne.

Dieses



Dieses giebt zwar der bloße Augenschein zu erkennen. Jedoch kann es auch folgendermaßen bewiesen werden.

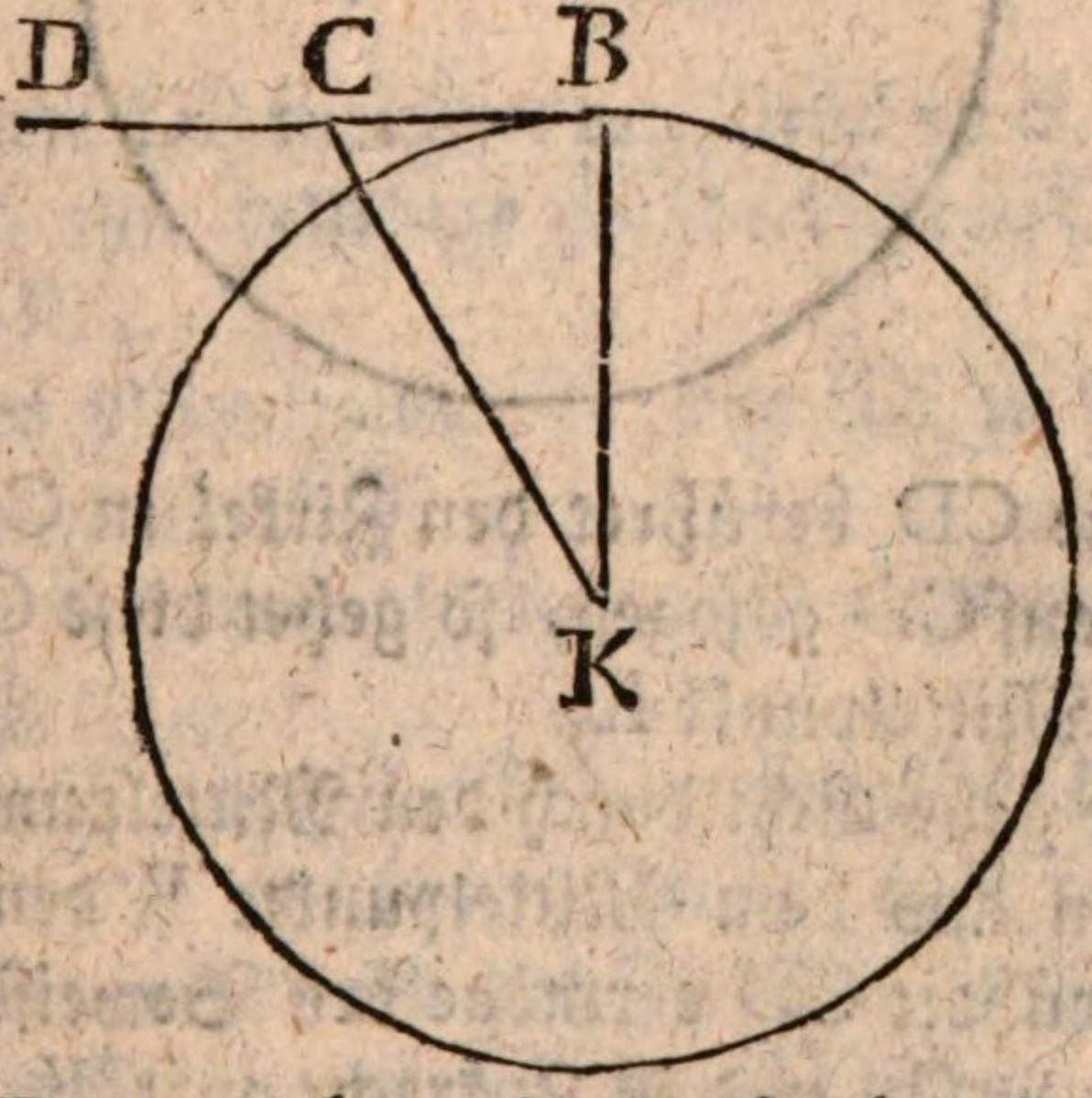
Im Dreyecke CKD ist CD kleiner als KC + KD.

Es ist aber KC = KB, KD = KA.

Also ist auch CD kleiner als KB + KA oder als der Durchmesser BA.

§ 25.

Wenn am Ende eines Halbmessers eine senkrechte Linie errichtet wird, so berühret dieselbe den Zirkel nur in einem einzigen Punkte.



Es sey BD senkrecht auf dem Halbmesser KB, so berühret diese BD den Zirkel nur in B.

Denn gesetzt sie könnte ihn noch in einem anderen Punkte C berühren, so ziehe KC.

Da KB auf BD senkrecht ist, so ist KC länger als KB. (II. §. 33.)

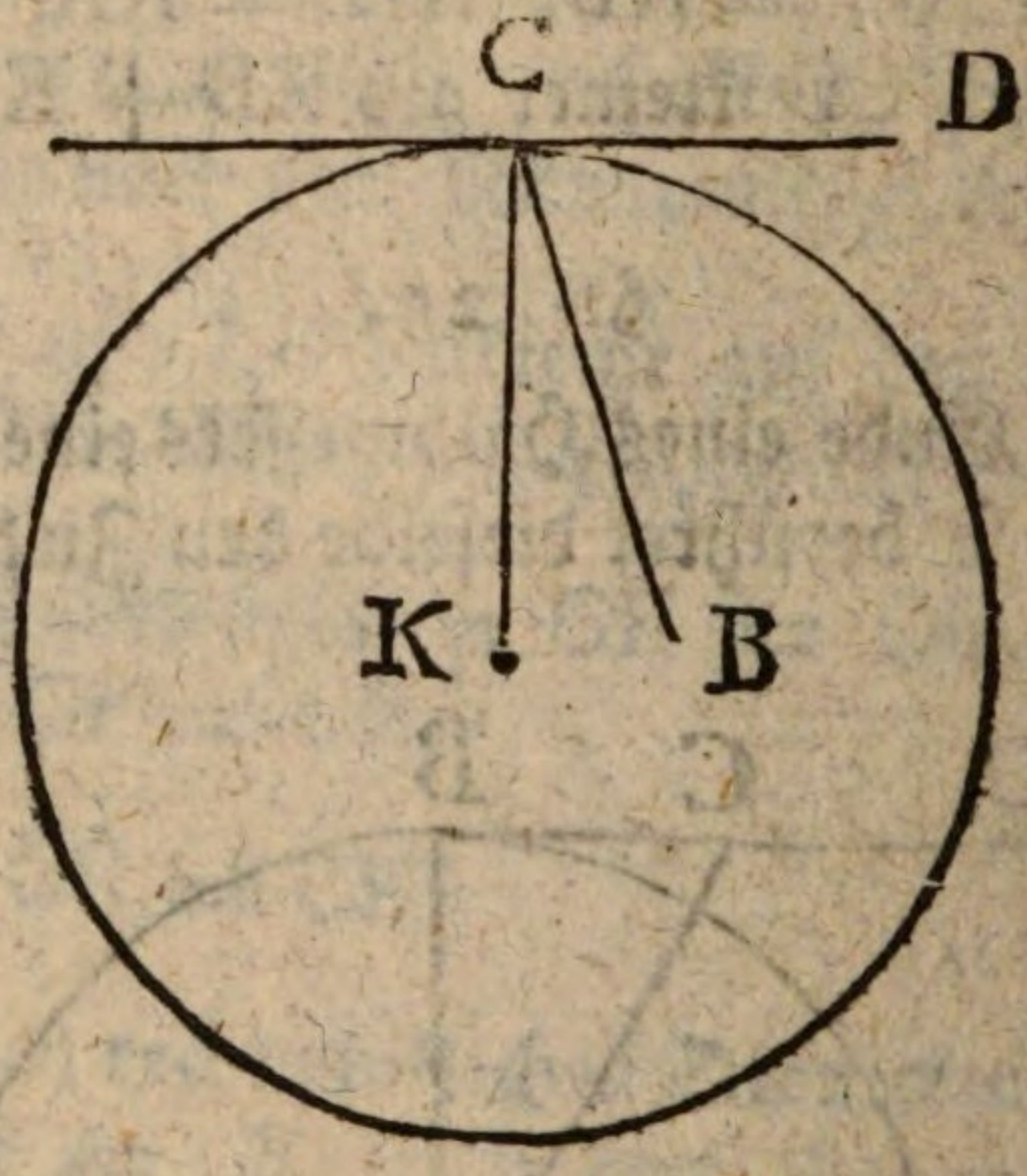
Berührte nun BD den Zirkel in C, so müste der Punkt C zum Zirkel gehören, und KC ein Halbmesser seyn.

Es wäre demnach der Halbmesser KC größer als der Halbmesser KB, welches unmöglich ist.

Also ist es auch unmöglich, daß die KB den Zirkel an einem anderen Orte als in B berühre.

§. 26.

Wenn eine gerade Linie einen Zirkel berühret, und es wird auf derselben im Berührungspunkte eine senkrechte Linie gezogen, so gehet dieselbe durch den Mittelpunkt.



Gesetzt die CD berühret den Zirkel in C und es wird CK senkrecht auf CD gezogen, so gehet diese CK nothwendig durch den Mittelpunkt K,

Gesetzt sie gehe nicht durch den Mittelpunkt, wie CB. So ziehe man aus dem Mittelpunkte K den Halbmesser KC. So berühret CD vermöge des Beweises bey §. 25. den Zirkel nur in C, und ist senkrecht auf CK.

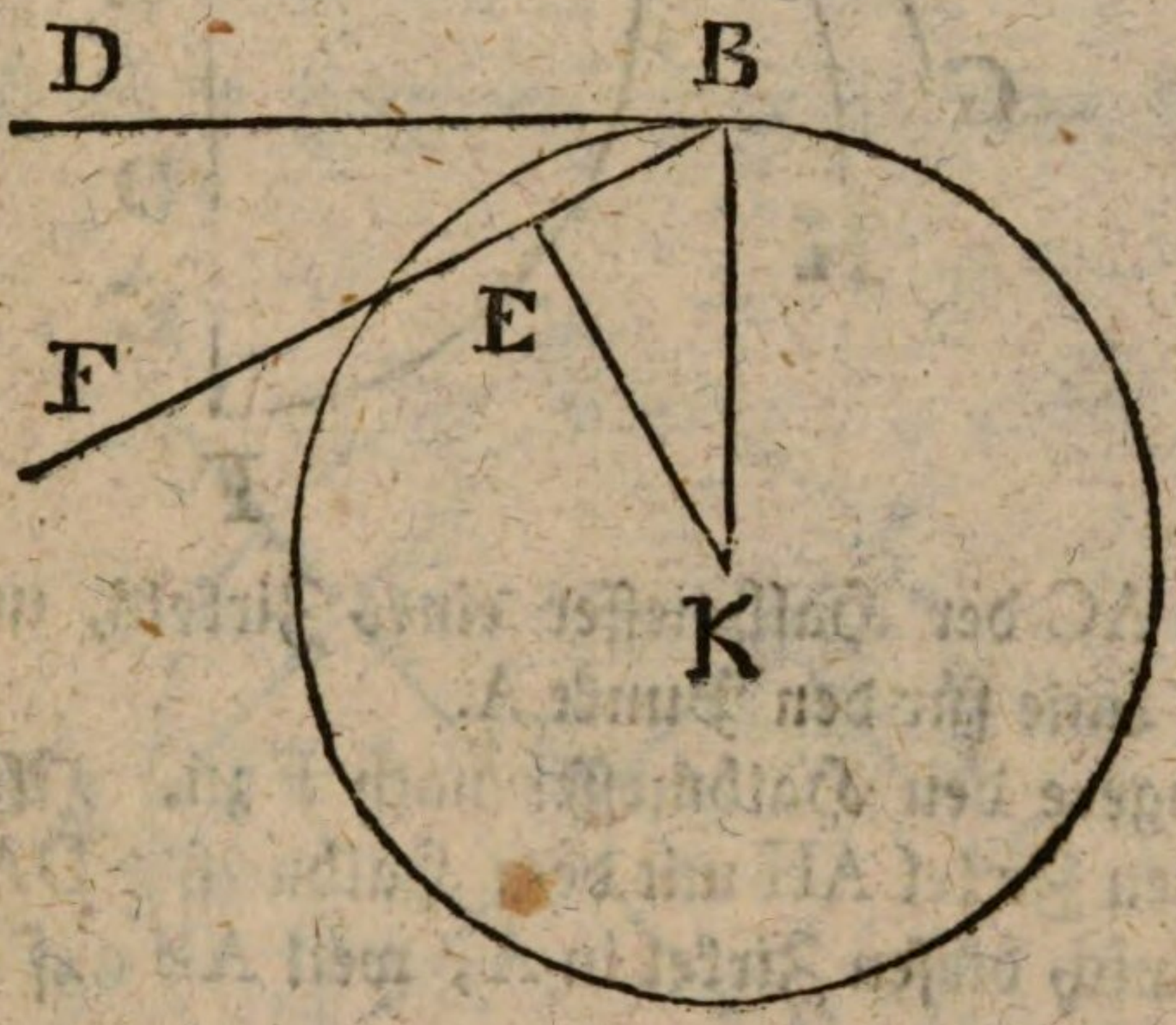
Es soll aber auch CB auf CD senkrecht seyn.

Also wären in der Linie CD über dem Punkte C zwey senkrechte Linien CK und CB, welches nicht möglich ist.

Es ist demnach nicht möglich, daß die auf CD im Punkte C senkrecht stehende Linie nicht durch den Mittelpunkt gehe.

§. 27.

Zwischen dem Umkreise eines Zirkels und der berührenden Linie, kann durch den Berührungspunkt keine gerade Linie gezogen werden.



Die gerade DB berühret den Zirkel in B. Ziehe durch den Punkt B eine beliebige gerade Linie *B*F, so nahe als du willst an BD.

Aus dem Mittelpunkte K ziehe KE senkrecht auf BF, und den Halbmesser KB.

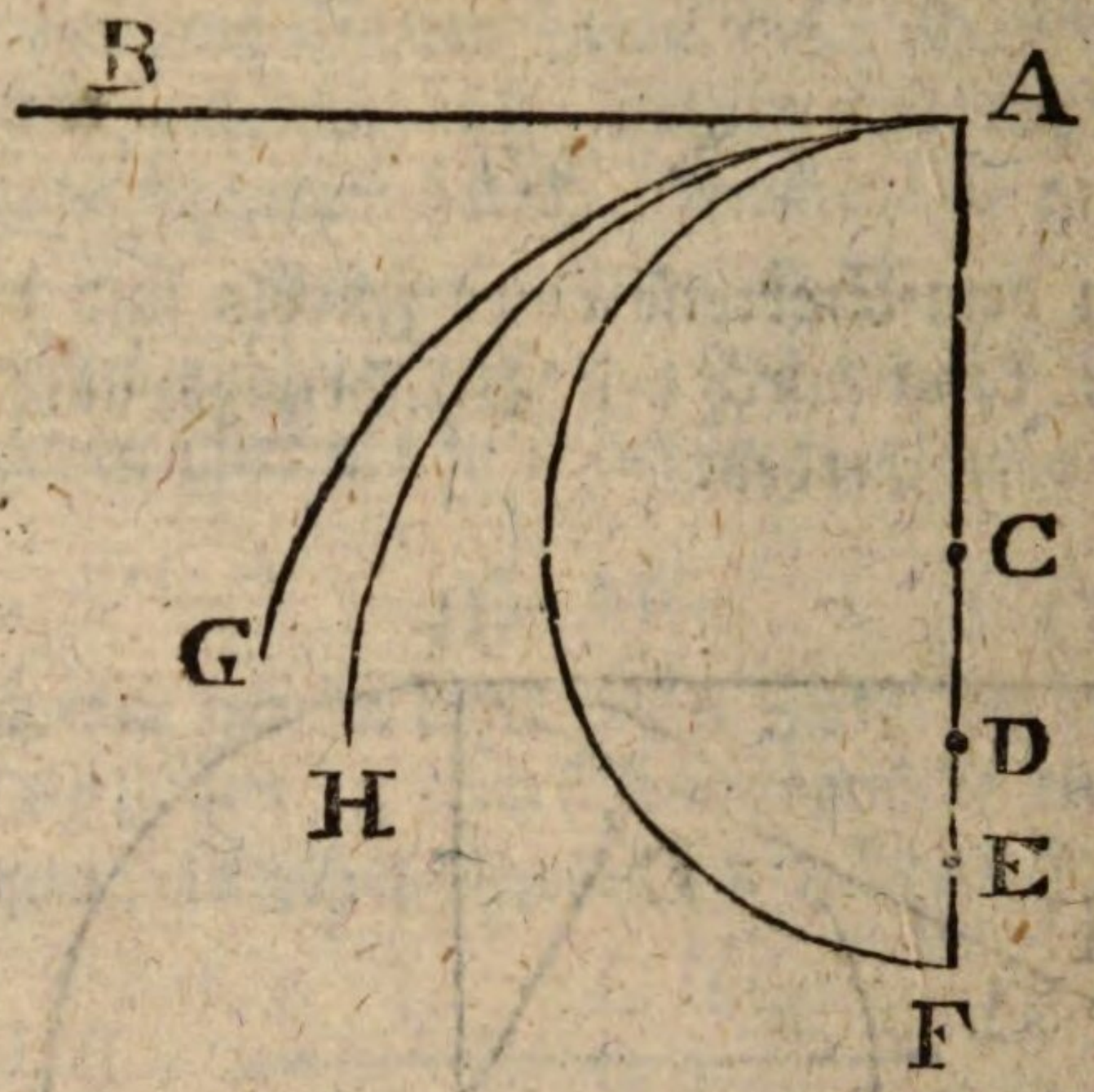
So ist KE kleiner als KB, die nicht auf BF senkrecht stehet. (II. §. 33.)

Folglich fällt der Punkt E innerhalb des Zirkels (§. 9).

Es kann also auf keine Weise die BF so gezogen werden, daß sie außerhalb des Zirkels, zwischen dem Umkreise und der berührenden Linie BD liege.

§. 28.

Zwischen dem Umkreise und der berührenden Linie können durch den Berührungspunkt so viel Zirkellinien gezogen werden als man will.



Es sey AC der Halbmesser eines Zirkels, und AB die berührende Linie für den Punkt A.

Verlängere den Halbmesser nach F zu. Aus D beschreibe einen Zirkel AH mit dem Halbmesser DA, so berühret AB auch diesen Zirkel in A, weil AB auf AD senkrecht ist.

Weil aber der Halbmesser DA größer ist als CA, so fällt auch der Umkreis AH außerhalb des ersten Umkreises, also zwischen diesem und der berührenden Linie.

Nimmt man EA zum Halbmesser, so fällt die Zirkellinie AG ebenfalls zwischen dem ersten Umkreise und der berührenden Linie.

Auf gleiche Art kann man fortfahren, und zwischen der berührenden Linie und dem gegebenen Umkreise so viel Zirkellinien ziehen als man will.

§. 29.

Aufgabe.

Einen Zirkelbogen halbiren.

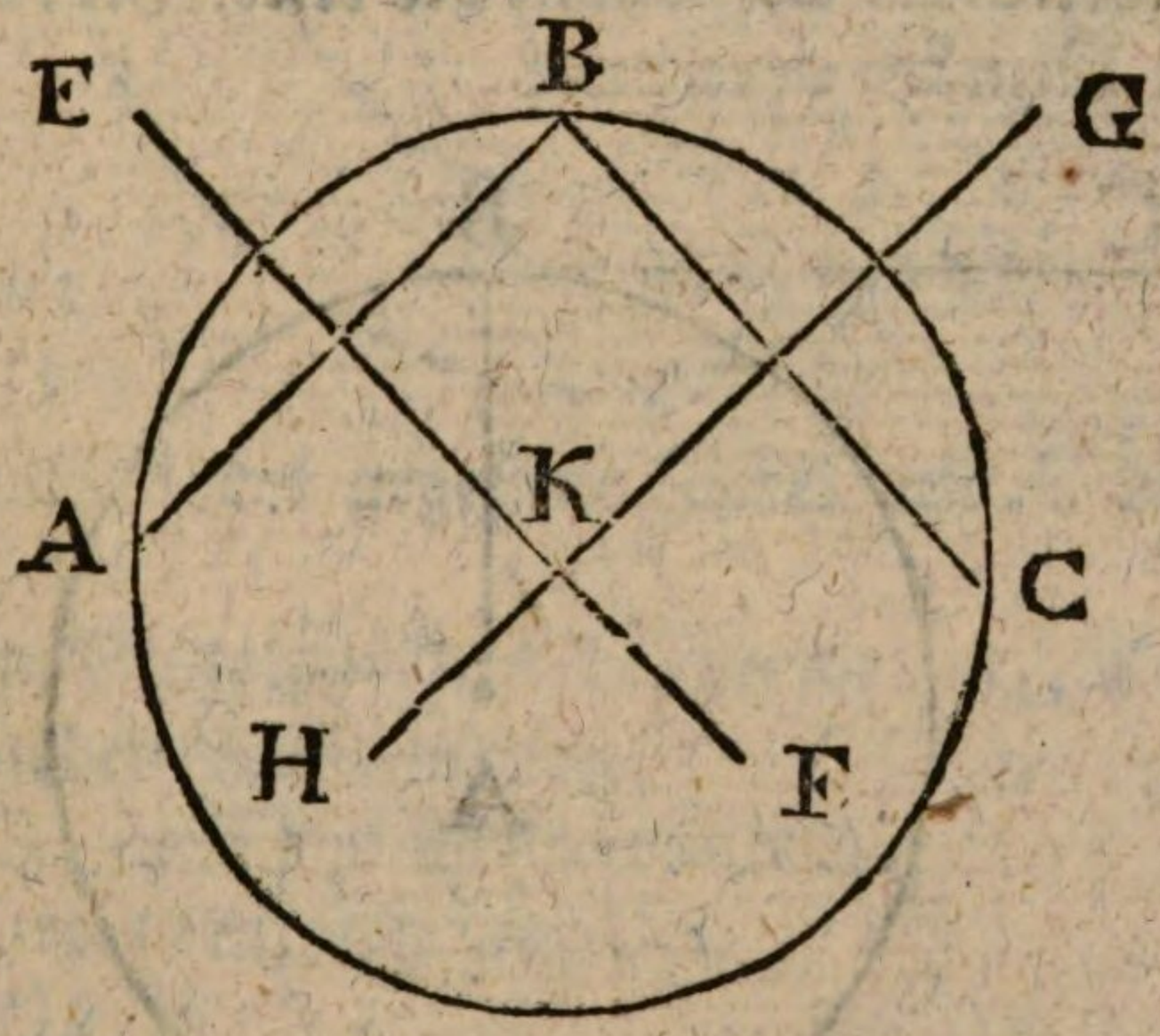
Ziehe die Sehne des Bogens. Halbire dieselbe, vermittelst einer senkrechten Linie. (II. §. 55.)

So schneidet solche senkrechte Linie den Bogen in zwey gleiche Theile. (§. 16.)

§. 30.

Aufgabe.

Durch drey gegebene Punkte eine Zirkellinie ziehen.



Stelle dir vor, der Zirkel sey schon gezogen. Verbinde einen der gegebenen Punkte B mit den beyden übrigen A und C vermittelst der geraden Linien BA und BC.

Halbire diese Linien BA und *B*C, welche Sehnen des verlangten Zirkels sind, vermöge der senkrechten Linien GH und EF.

So werden diese senkrechte Linien einander in einem Punkte K schneiden, und dieser ist der Mittelpunkt des verlangten Zirkels.

Der

Der Beweis ist in §. 18. enthalten.

Anmerkung. Die drey gegebenen Punkte müssen nicht in einer geraden Linie liegen.

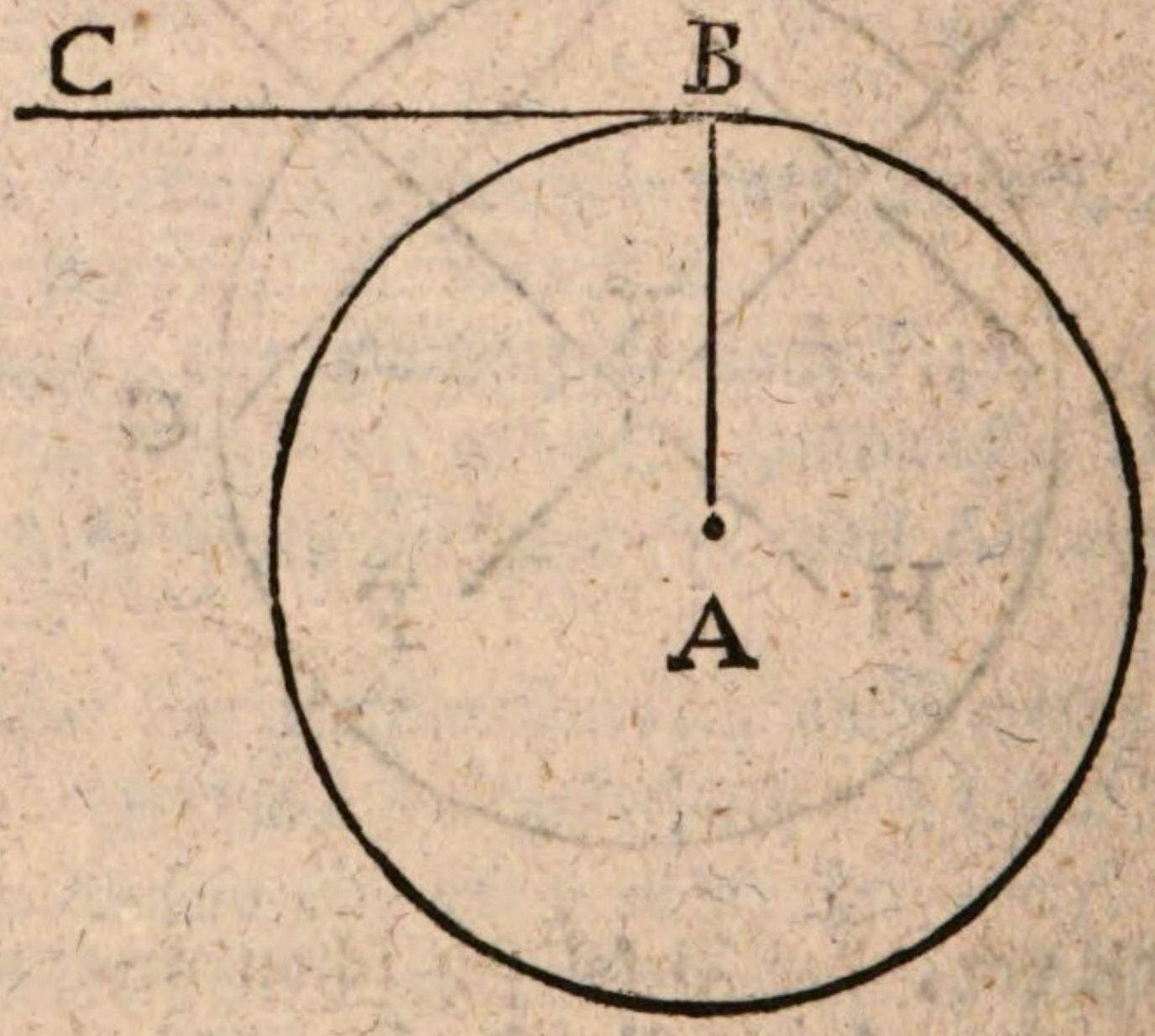
Zusatz I. Wenn der Mittelpunkt eines Zirkels unbekannt ist, so darf man nur drey willkührliche Punkte im Umkreise annehmen und den Mittelpunkt suchen.

Zusatz II. Ebenfalls kann man den Mittelpunkt eines gegebenen Zirkelbogens finden, wenn man einen willkührlichen Punkt in demselben annimmt, und zu diesem Punkte, und den beyden Endpunkten den Mittelpunkt suchet.

§. 31.

Aufgabe.

Eine gerade Linie ziehen, die einen Zirkel in einem gegebenen Punkte berühre.

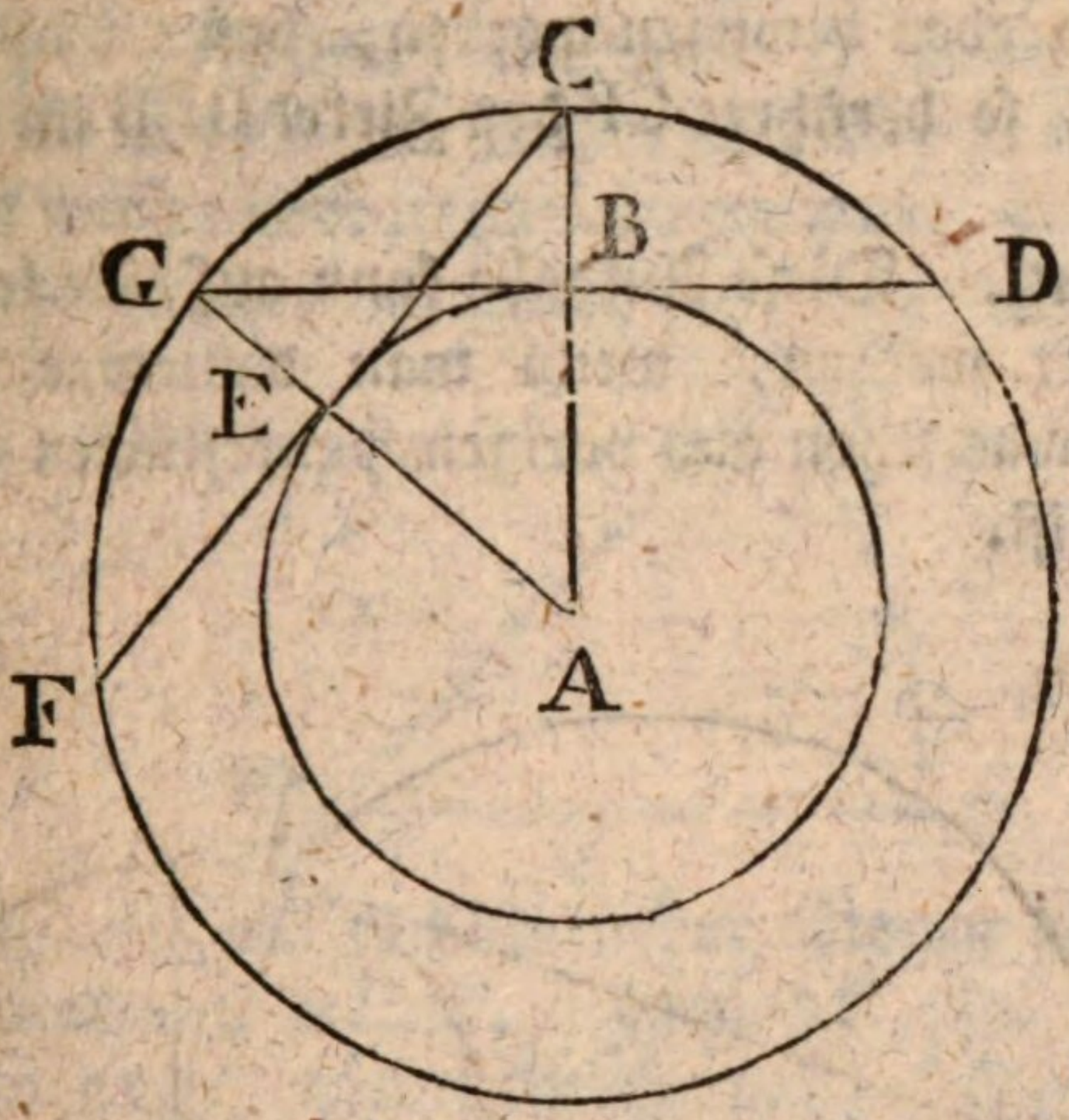


Auflösung. Es sey gegeben der Punkt B.
Ziehe den Halbmesser BA.
Errichte BC senkrecht auf BA.
So berühret BC den Zirkel im Punkte B.
Siehe §. 25.

§. 32.

Aufgabe.

Es ist außerhalb des Zirkels ein Punkt gegeben. Durch denselben soll eine gerade Linie gezogen werden, die den Zirkel berühre.



Es sey BEB der gegebene Zirkel und C der gegebene Punkt.

Aus dem Mittelpunkte A beschreibe den Zirkel CDFGC mit dem gegebenen konzentrisch.

Ziehe CA nach den Mittelpunkt A.

Ziehe GBD senkrecht auf CA.

Ziehe GA.

Nimm GF = GC.

Ziehe CF.

So berühret CF den Zirkel in E, und gehet, wie verlanget worden, durch den Punkt C.

Beweis. Weil GC = CD und CG = GF, so ist GC + CD = CG + GF oder der Bogen GCD ist gleich dem Bogen CGF. Folglich sind auch die Sehnen gleich (§. 7.), das ist, GD = CF.

Da

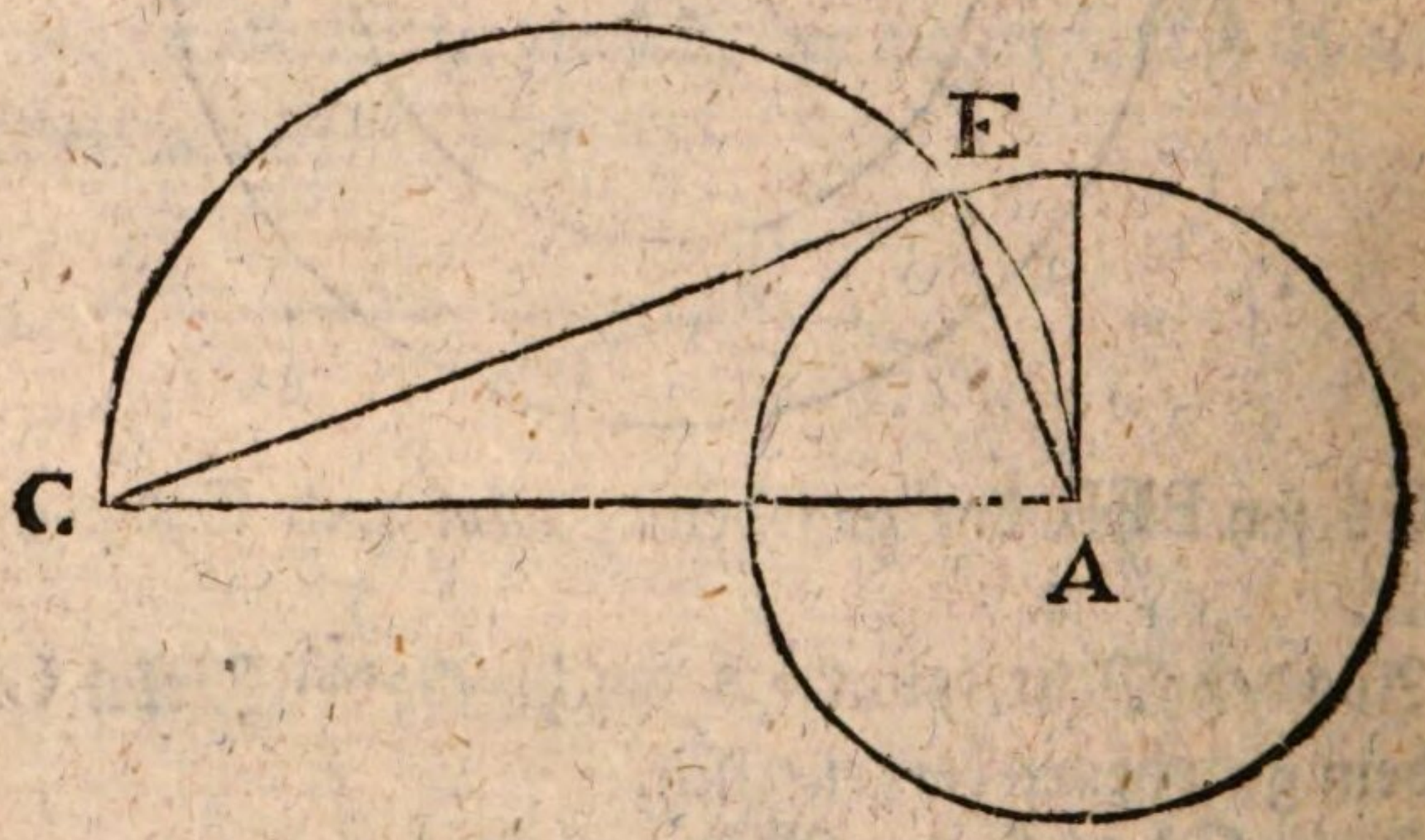
Da nun GA den Bogen CGF halbiret, und durch den Mittelpunkt A gehet, so ist sie senkrecht auf CF. (§. 21.)

Weil CF = GD, so sind diese Sehnen vom Mittelpunkte A gleich weit entfernet, also ist AE = AB.

Weil nun AB ein Halbmesser des Zirkels BEB ist, so ist auch AE ein Halbmesser des nemlichen Zirkels.

Und da eben bewiesen worden, daß CF auf AG senkrecht stehet, so berühret CF den Zirkel BEB im Punkte E. (§. 25.)

Anmerkung. Diese Aufgabe kann auf eine leichtere Art aufgelöset werden, wenn man dasjenige zur Hülfe nimmt, was schon aus vorigen Hauptstücken vom Zirkel bekannt ist.



Es sey C der gegebene Punkt.

Ziehe von C zum Mittelpunkte A die gerade Linie CA.

Beschreibe über CA einen halben Zirkel AEC (II §. 55 Zus. III) so wird derselbe den gegebenen Umkreis irgendwo in E schneiden.

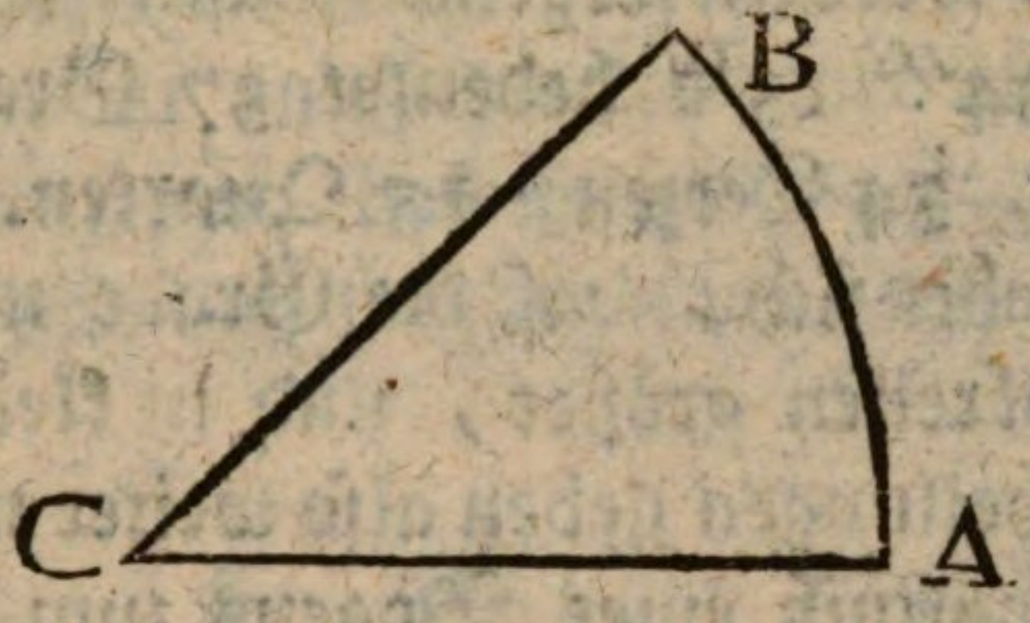
Ziehe CE, so berühret diese gerade Linie CE den Zirkel im Punkte E.

Denn im halben Zirkel AEC bilden die Linien CE und AE einen rechten Winkel (III §. 33).

Also ist EC senkrecht auf dem Halbmesser AE. Folglich berühret CE den Zirkel in E (§. 25.)

§. 33.

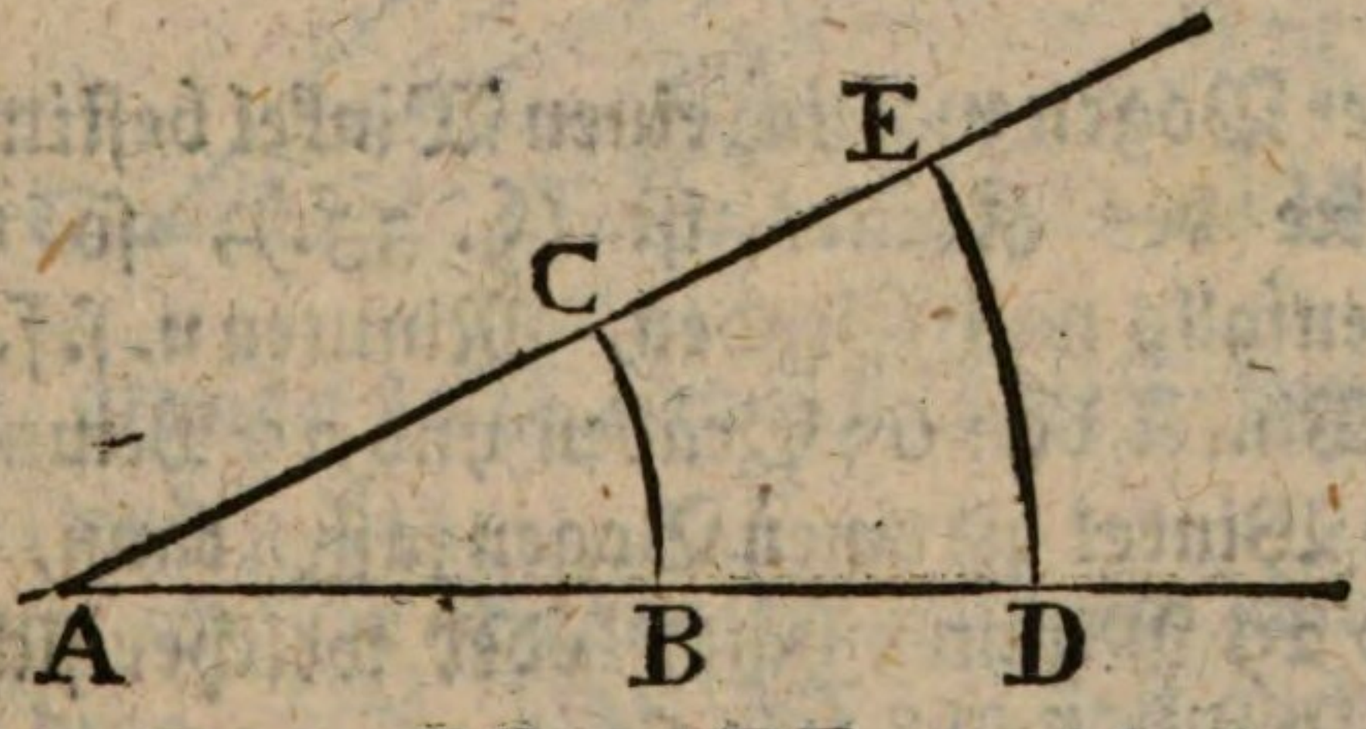
Wenn man im Umkreise eines Zirkels einen gewissen Bogen annimmt, und von den Enden desselben gerade Linien nach den Mittelpunkt ziehet, so entstehet am Mittelpunkte ein Winkel der größer oder kleiner ist, nachdem der Bogen größer oder kleiner angenommen worden. Solcher Bogen bestimmet demnach die Größe des Winkels.



Es sey *AB* ein willkührlicher Bogen eines Zirkels, dessen Mittelpunkt in C ist. Ziehe AC, BC, so entstehet ein Winkel ACB, dessen Größe von der Größe des Bogens AB abhängt.

§. 34.

Aehnliche Bogen nennt man diejenigen, die mit verschiedenen Halbmessern beschrieben sind, die aber den nemlichen Winkel bestimmen.



Z. E. die Bogen BC und DE, welche beyde aus dem Mittelpunkte A beschrieben sind, und den nemlichen Winkel CAB oder EAD bestimmen, sind ähnliche Bogen.

§. 35.

Um die Größe eines Bogens genauer zu erkennen, muß man wissen, wie er sich zum ganzen Umkreise verhält, oder wie vielmal er im ganzen Umkreise enthalten ist. Deswegen pfleget man entweder wirklich oder in Gedanken jeden Umkreis in 360 gleiche Theile einzutheilen, die man Grade nennet, jeder Grad wird wiederum in 60 Minuten, jede Minute in 60 Sekunden, jede Sekunde in 60 Terzen, jede Terze in 60 Quarten eingetheilet, u. s. f. Diese Theile werden folgendermaßen angedeutet. Z. E. $37^{g}\ 5'\ 6''\ 34'''\ 15^{IV}$ bedeutet 37 Grade, 5 Minuten, 6 Sekunden, 34 Terzen, 15 Quarten.

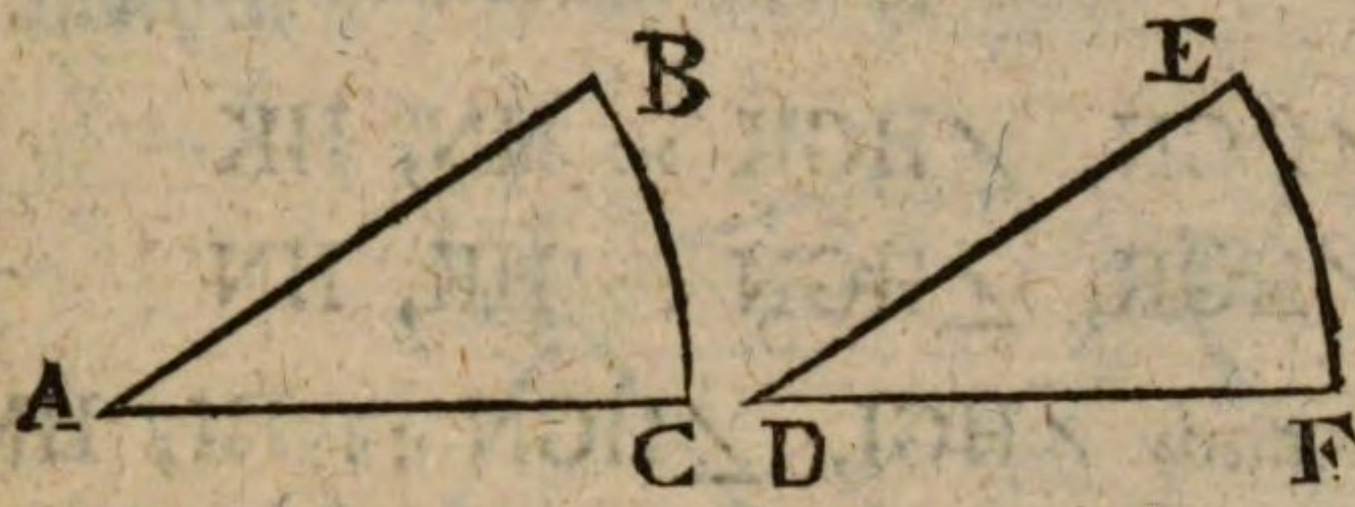
Es verstehet sich, daß die Grade und deren Theile in größeren Umkreisen größer, und in kleineren kleiner sind. Solche Eintheilungen geben also weiter nichts zu erkennen, als das Verhältniß eines Bogens zum ganzen Umkreise. Z. E. ein Bogen von 37 Graden heißt so viel als ein Bogen der sich zum Umkreise verhält wie 37 zu 360. Ein Bogen von 37 Graden und 53 Minuten heißt ein Bogen der sich zum Umkreise verhält wie $37\frac{53}{60}$ zu 360, oder wie $(37 \times 60 + 53)$ zu (360×60), weil 37 Grade 60mal 37 Minuten, und 360 Grade 60mal 360 Minuten ausmachen.

§. 36.

Da jeder Bogen zugleich einen Winkel bestimmet der am Mittelpunkte des Kreises ist (§. 33.), so werden die Winkel ebenfalls nach Graden, Minuten u. s. f. gerechnet. Z. E. ein Winkel von 63 Graden und 29 Minuten heißt so viel als ein Winkel die einen Bogen fassen kann, welcher 63 Grade und 29 Minuten hält, oder welcher sich zum Umkreise verhält wie $63\frac{29}{60}$ zu 360.

§. 37.

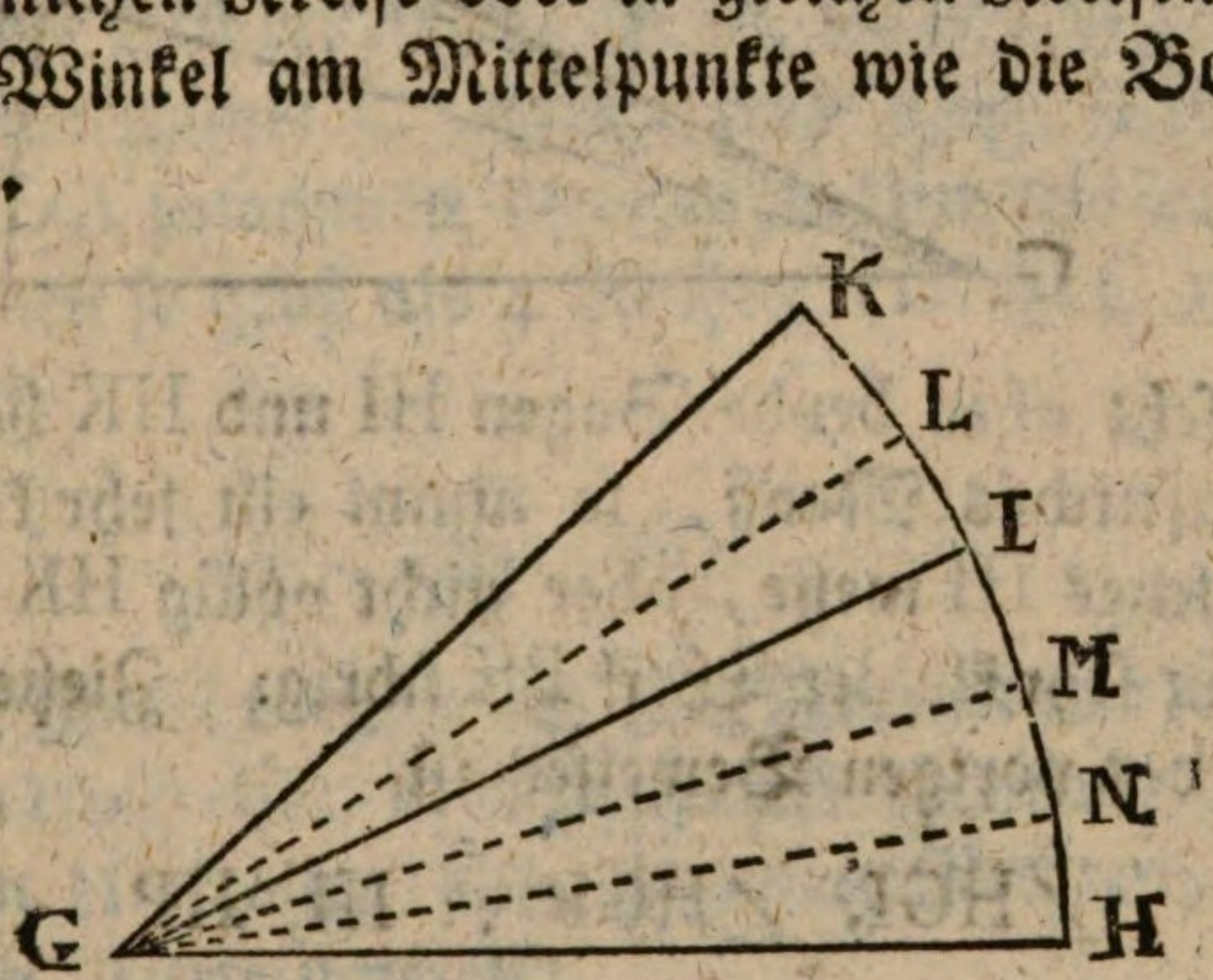
Im nemlichen Kreise oder in gleichen Kreisen gehören gleiche Winkel zu gleichen Bogen, und gleiche Bogen zu gleichen Winkeln.



Man lege die gleichen Winkel A und D oder die gleichen Bogen BC und EF in Gedanken über einander, so wird man sogleich einsehen, daß die ganzen Figuren einander decken müssen, und daß folglich alles beyderseits gleich ist. (I. H. §. 37)

§. 38.

Im nemlichen Kreise oder in gleichen Kreisen verhalten sich die Winkel am Mittelpunkte wie die Bogen die dazu gehören.



Z. E. die Winkel IGH und KGH verhalten sich wie die Bogen IH und KH.

Stelle dir vor der Bogen IH enthalte einige gleiche Theile, etwa drey, HN, NM, MI, so sind auch die drey Winkel HGN, NGM, MGI gleich, und es ist

$\angle$HGN, $\angle$HGI :: HN, HI
oder $\angle$HGI, $\angle$HGN :: HI, HN.

Der Bogen HK enthalte auch eine gewisse Anzahl der nemlichen Theile, als z. E. fünf, nemlich HN, NM, MI, IL, LK, so sind auch die fünf Winkel gleich (§. 37.) nemlich ∠HGN = ∠NGM = ∠MGI = ∠IGL = LGK, und es ist

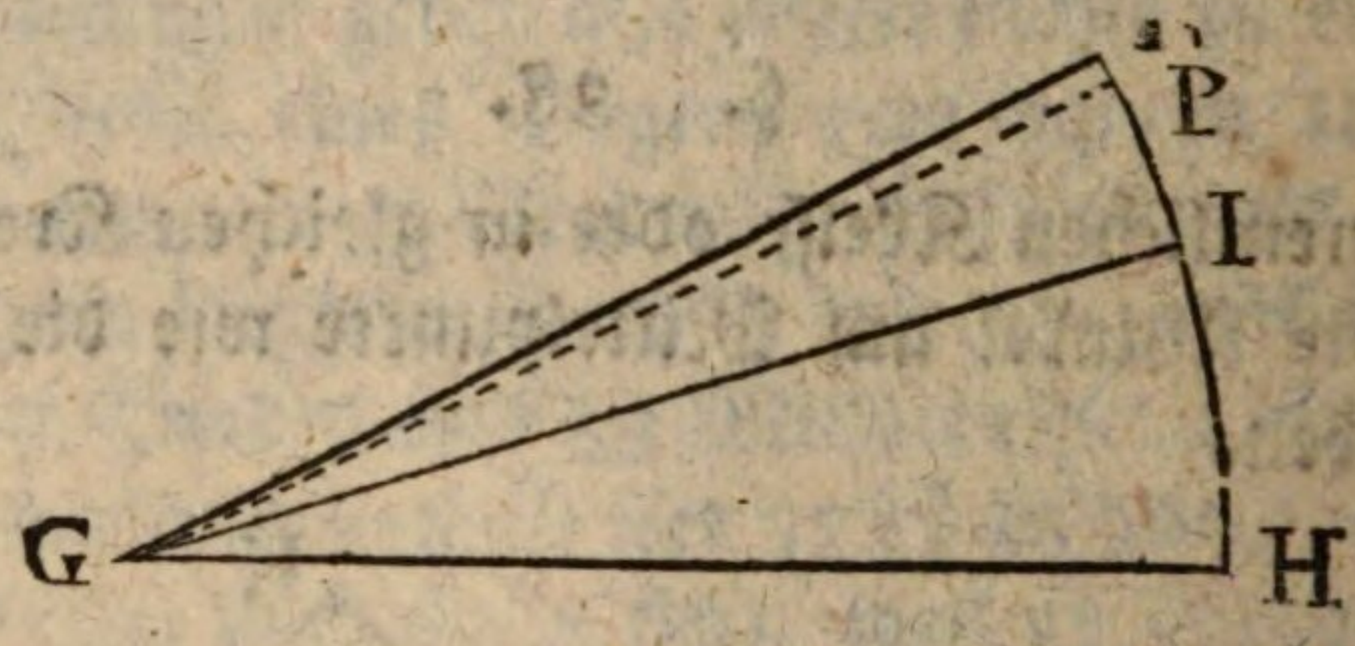
∠HGN, ∠HGK :: HN, HK

oder ∠HGK, ∠HGN :: HK, HN

Da nun auch ∠HGI, ∠HGN :: HI, HN, so ist in beyden letzten Proporzionen der zweyte und vierte Satz gemein, folglich ist

∠HGK, ∠HGI :: HK, HI

das ist, die Winkel verhalten sich wie die Bogen.



Gesetzt aber beyde Bogen HI und HK haben kein gemeinschaftliches Maaß, so nimm ein sehr kleines Maaß an, welches HI messe, aber nicht völlig HK, sondern es bleibe ein sehr kleiner Theil PK übrig: Ziehe PG. Vermittelst des vorigen Beweises ist

∠HGI, ∠HGP :: HI, HP

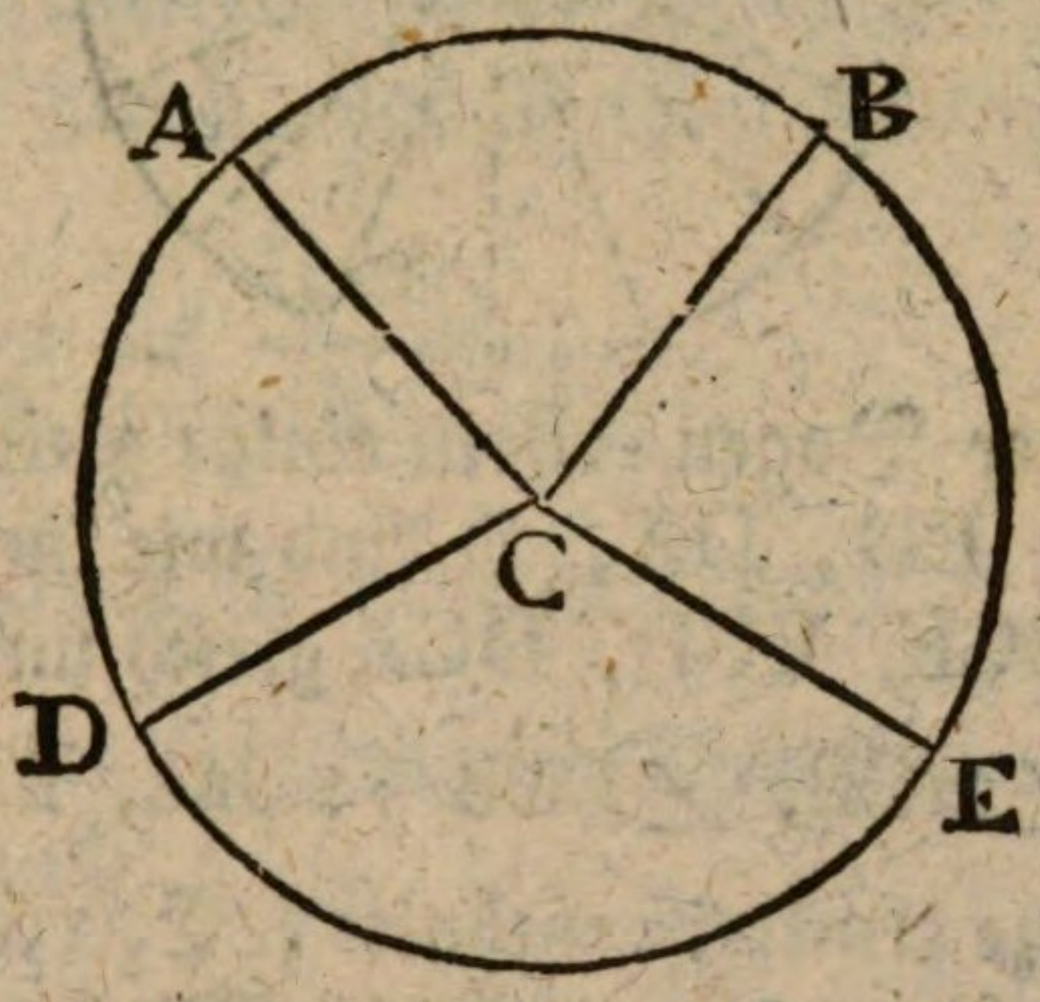
Je kleiner nun das Maaß angenommen wird, desto mehr nähert sich der Bogen HP dem Bogen HK und der Winkel HGP dem Winkel HGK.

Dieses sind also die Gränzen, und es ist (III. §. 24.)

HI, HK :: ∠HGI, ∠HGK.

§. 39.

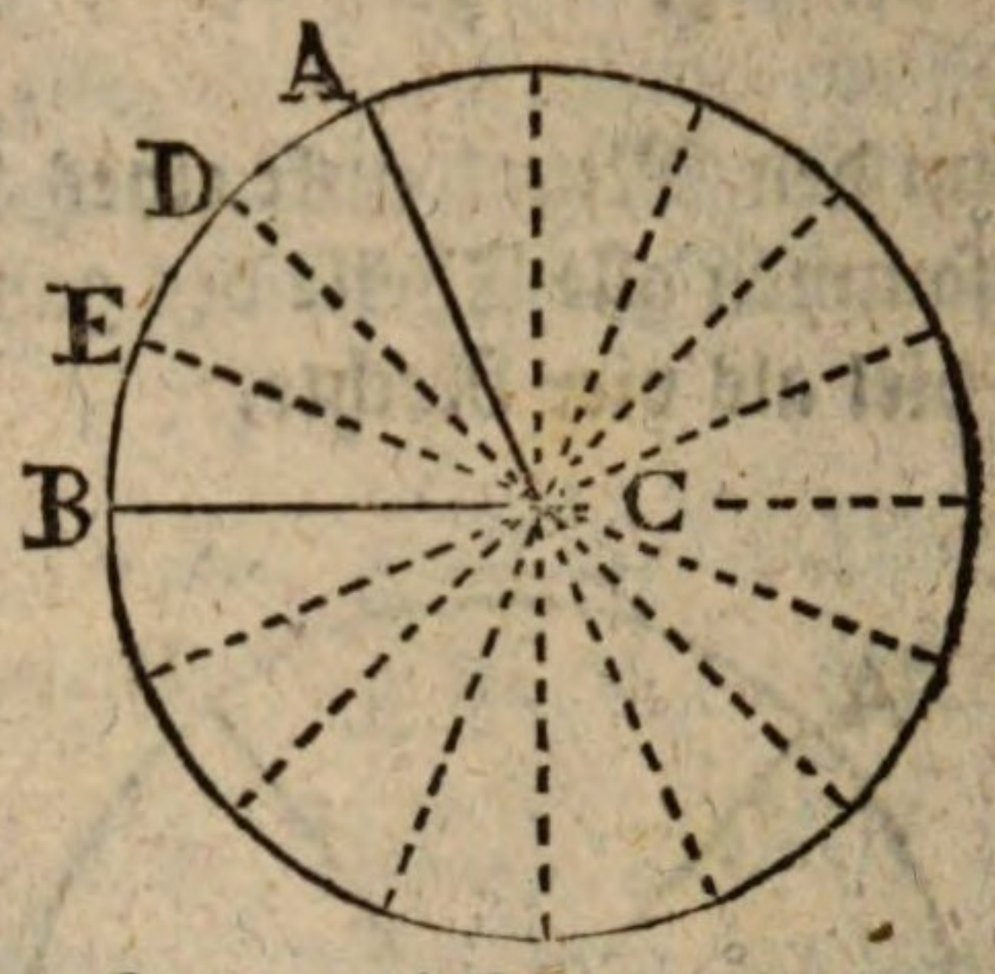
Alle Winkel um den Mittelpunkt eines Kreises, oder alle Winkel die zusammen alle Theile des ganzen Umkreises fassen, machen so viel als vier Rechte.



Z. E. die Winkel ACB, BCE, ECD, DCA, welche um den Mittelpunkt C liegen, und deren Bogen AB, BE, ED, DA zusammen den ganzen Umkreis ausmachen, sind zusammen so groß als 4 Rechte. (II. H. §. 15.)

§. 40.

Jeder Winkel verhält sich zu 4 Rechten wie sein Bogen zum ganzen Umkreise; oder zu zwey Rechten wie der Bogen zum halben Umkreise; oder zu einem Rechten, wie der Bogen zum Viertelumkreise.



Es sey der Bogen AB in einige gleiche Theile getheilet, als BE, ED, DA, so sind wie im vorigen Beweise die Winkel BCE, ECD, DCA gleich und es ist

$$\angle ACB, \angle ECB :: BA, BE.$$

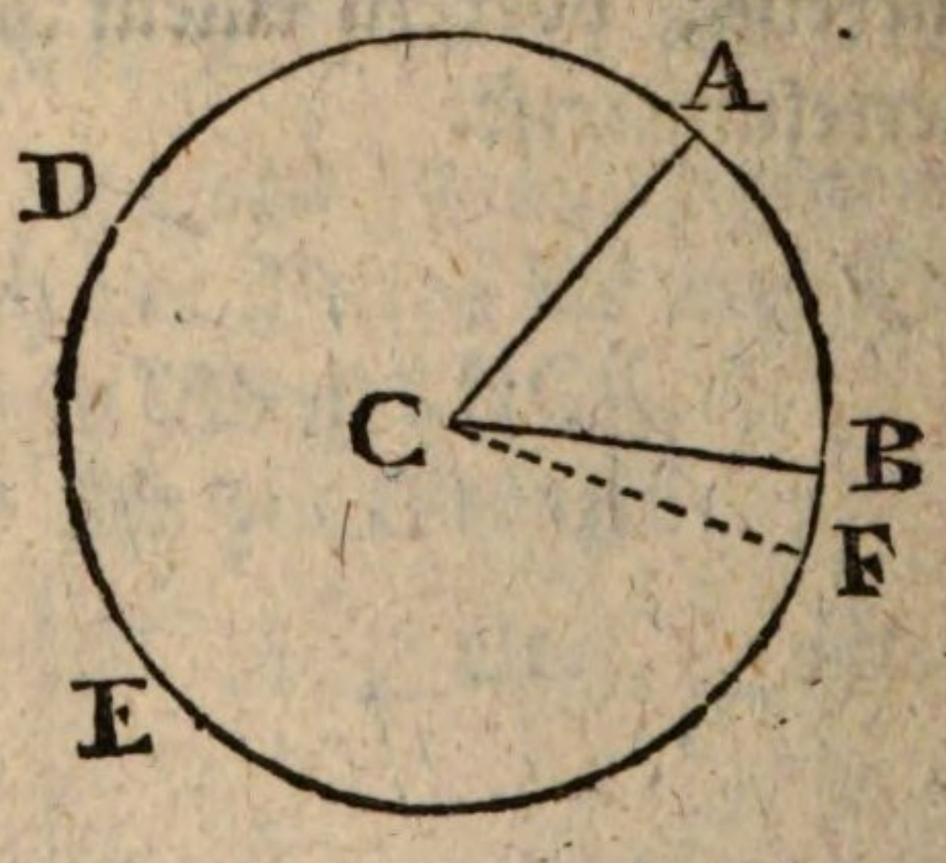
Der ganze Umkreiß enthalte z. E. 16 solche Theile als BE, so entstehen auch 16 gleiche Winkel, und es verhalten sich die 16 Winkel zu einem, wie 16 Bogen zu einem, oder alle um den Mittelpunkt liegende Winkel zu einem, wie der ganze Umkreis zu einem Bogen, oder, weil alle Winkel am Mittelpunkte vier Rechten gleich sind, so ist

$$4\,R, \angle ECB :: \text{Umkr.}, BE$$

Da nun $\angle ACB, \angle ECB :: BA, BE$

so folget $\angle ACB, 4\,R :: BA, \text{Umkr.}$

Ist BE nicht ein Maaß des Umkreises so nehme man kleinere Theile die den Bogen BA messen, nnd trage sie



auf

auf dem Umkreise herum, etwa von B nach A, D, E bis F, und es bleibe FB. So ist vermöge voriger Beweise

$$\frac{\angle \text{CBADEFC}}{\angle \text{BCA}} = \frac{\text{Bogen BADEF}}{\text{Bogen BA}}$$

Da nun diese Verhältnisse beständig gleich bleiben, so sind ihre Gränzen gleich, das ist (III. §. 19.)

$$\frac{4\,\text{R}}{\angle \text{BCA}} = \frac{\text{Umkr.}}{\text{BA}}$$

oder $\angle$BCA, 4 R :: BA, Umkr.

Weil sich nun die Hälften und Viertel wie die Ganzen verhalten, so ist auch

$\angle$BCA, 2 R :: BA, $\frac{1}{2}$ Umkr.

$\angle$BCA, 1 R :: BA, $\frac{1}{4}$ Umkr.

§. 41.

Der Viertel-Umkreis, oder der Bogen von 90 Graden bestimmet einen rechten Winkel; der halbe Umkreiß, oder der Bogen von 180 Graden giebt zwey Rechte.

Denn es war

BA, $\frac{1}{4}$ Umkr. :: $\angle$BCA, 1 R

ist also BA = $\frac{1}{4}$ Umkr. so wird auch $\angle$BCA = 1 R, weil alsdann die Verhältnißzahl beyderseits 1 ist.

Desgleichen war

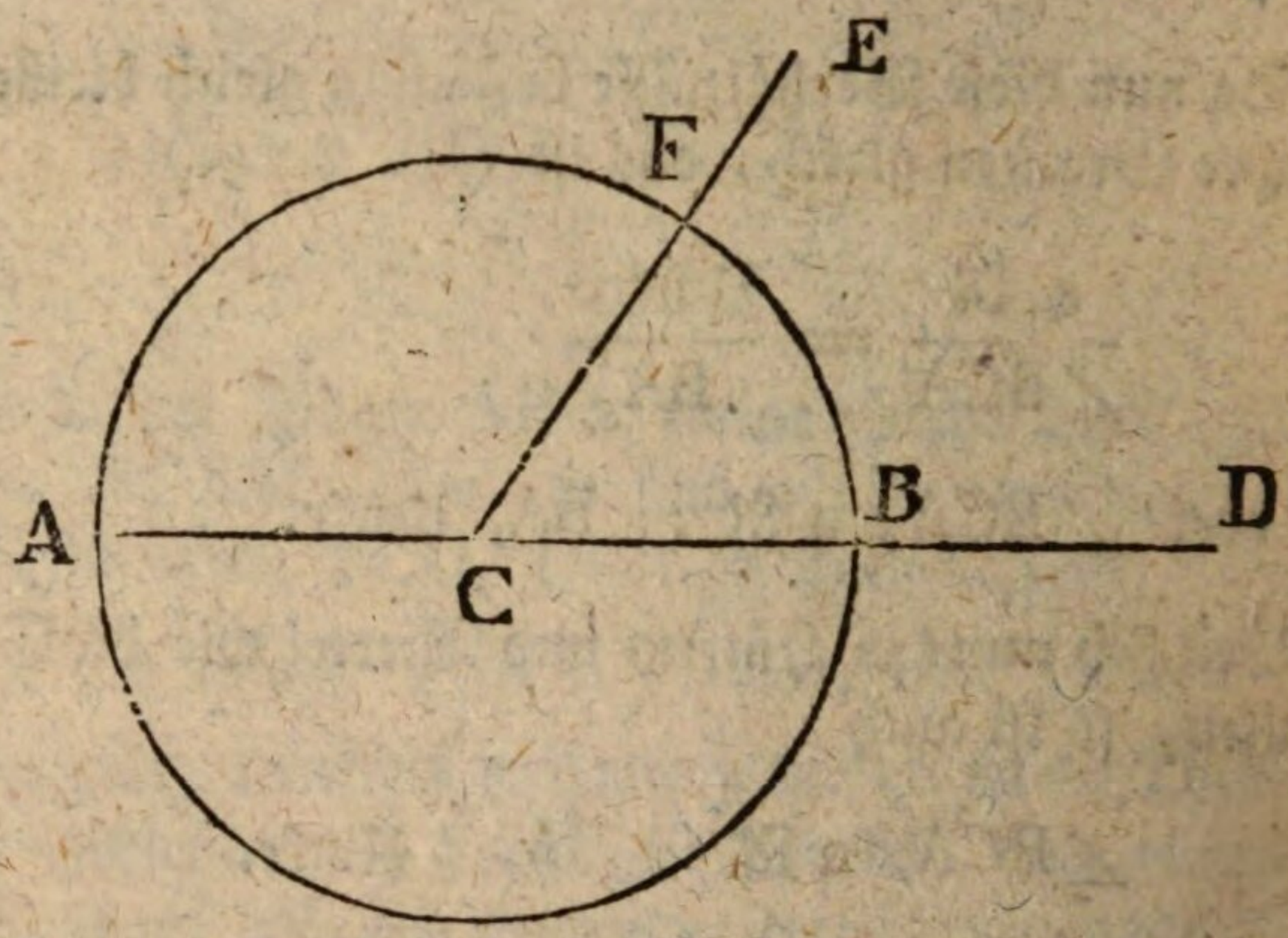
$\angle$BCA, 2 R :: BA, $\frac{1}{2}$ Umkr.

ist nun BA = $\frac{1}{2}$ Umkreis, so wird $\angle$BCA = 2 R, aus der nemlichen Ursache.

§. 42.

Aufgabe.

Die Anzahl der Grade eines Bogens oder Winkels bestimmen.



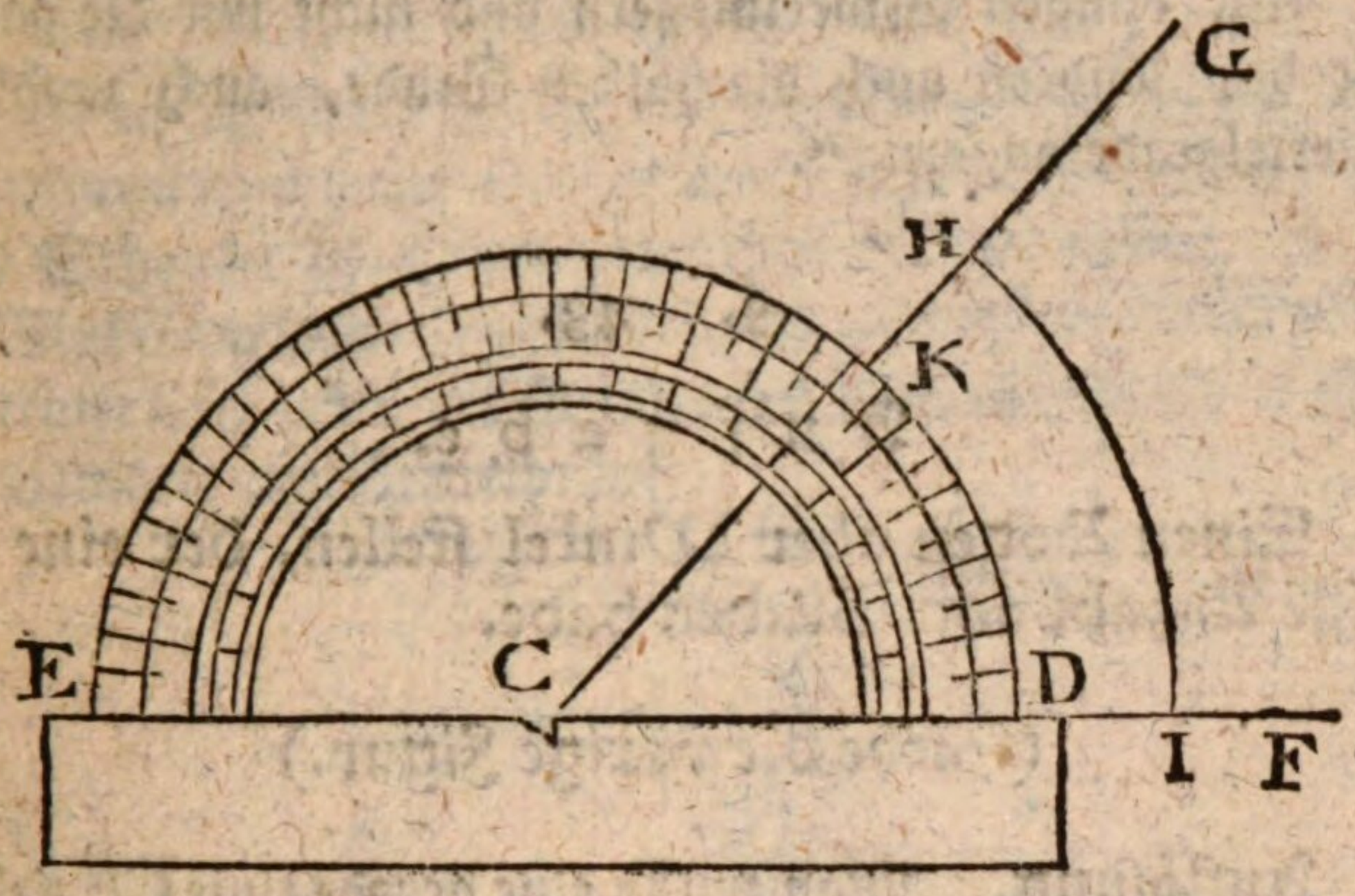
Auflösung. Um die Grade eines Winkels ECD zu bestimmen, beschreibe aus dem Scheitel C mit einem beliebigen Halbmesser den Bogen BF, so hat der Winkel ECD so viel Grade als der Bogen BF, (§. 36.) oder der Winkel ECD verhält sich zu 4 Rechten wie der Bogen BF zum Umkreise. (§. 40.)

Um aber die Grade eines Bogens BF zu bestimmen, müste man den ganzen Umkreis in 360 oder den halben BFA in 180 gleiche Theile eintheilen, da sich dann ausweisen würde wie viel solche Theile auf den Bogen BF gehen.

Weil aber eine solche Eintheilung auf keine geometrische Art verrichtet werden kann, und dieselbe, wäre sie auch erfunden, sehr mühsam wäre, so gebrauche man folgende mechanische Auflösung.

Mechanische Auflösung.

Man bedienet sich zu diesem Behufe eines Instruments, welches ein **Winkelmesser** genannt wird.



Es bestehet aus einem halben Ringe EKD, dessen Ränder zwey konzentrische halbe Zirkel ausmachen. Dieser halbe Ring ist in seine 180 Grade eingetheilet, welche mit Linien angezeigt sind, die alle nach den gemeinschaftlichen Mittelpunkt C gehen. Diese Grade sind von 10 zu 10 mit Zahlen bezeichnet, sowohl von D nach E zu, als von E nach D. Der Durchmesser ist ED, und zu mehrerer Festigkeit macht er nur den Rand eines Rektangels aus, woran der halbe Ring befestiget ist. Der Mittelpunkt C ist durch einen kleinen Einschnitt bemerket.

Will man nun die Grade eines Winkels GCF messen, so leget man den Mittelpunkt C des Instruments am Scheitel des Winkels, und den Halbmesser CD an dem einen Schenkel CF.

Man beobachtet den Punkt K, wo der andere Schenkel den Rand des Instruments trift. Man zählet die Grade von D bis K auf dem Winkelmesser, so sind diese zugleich die Grade des Winkels GCF.

Ist ein Bogen HI gegeben, so nehme oder suche man den Mittelpunkt C, woraus der Bogen beschrieben worden. Man ziehe HC und IC. Man messe wie vorher den Winkel GCF oder HCI, so sind seine Grade zugleich die Grade des Bogens HI.

Auf einigen Winkelmessern sind nicht nur die ganzen Grade, soudern auch die halben Grade, auch wohl die Viertelgrade angezeiget.

§. 43.

Aufgabe.

Einen Bogen oder Winkel stellen, der eine gewisse Anzahl von Graden habe.

(Siehe die vorige Figur.)

Auflösung. Man müste eine gerade Linie CF ziehen, aus dem Ende C derselben als Mittelpunkte mit einem beliebigen Halbmesser einen Zirkel beschreiben, den Umkreis in 360 Grade eintheilen, und von der Linie CF an den Bogen IK nehmen, der so viel Grade enthielte, als verlanget wären. Zöge man HC oder GC, so hätte auch der Winkel GCF die geforderten Grade.

Dieses wäre aber theils eine langwierige Arbeit, theils auch durch die bekannten Grundsätze der Geometrie nicht auszuführen. Deswegen muß man sich wiederum des Winkelmessers bedienen.

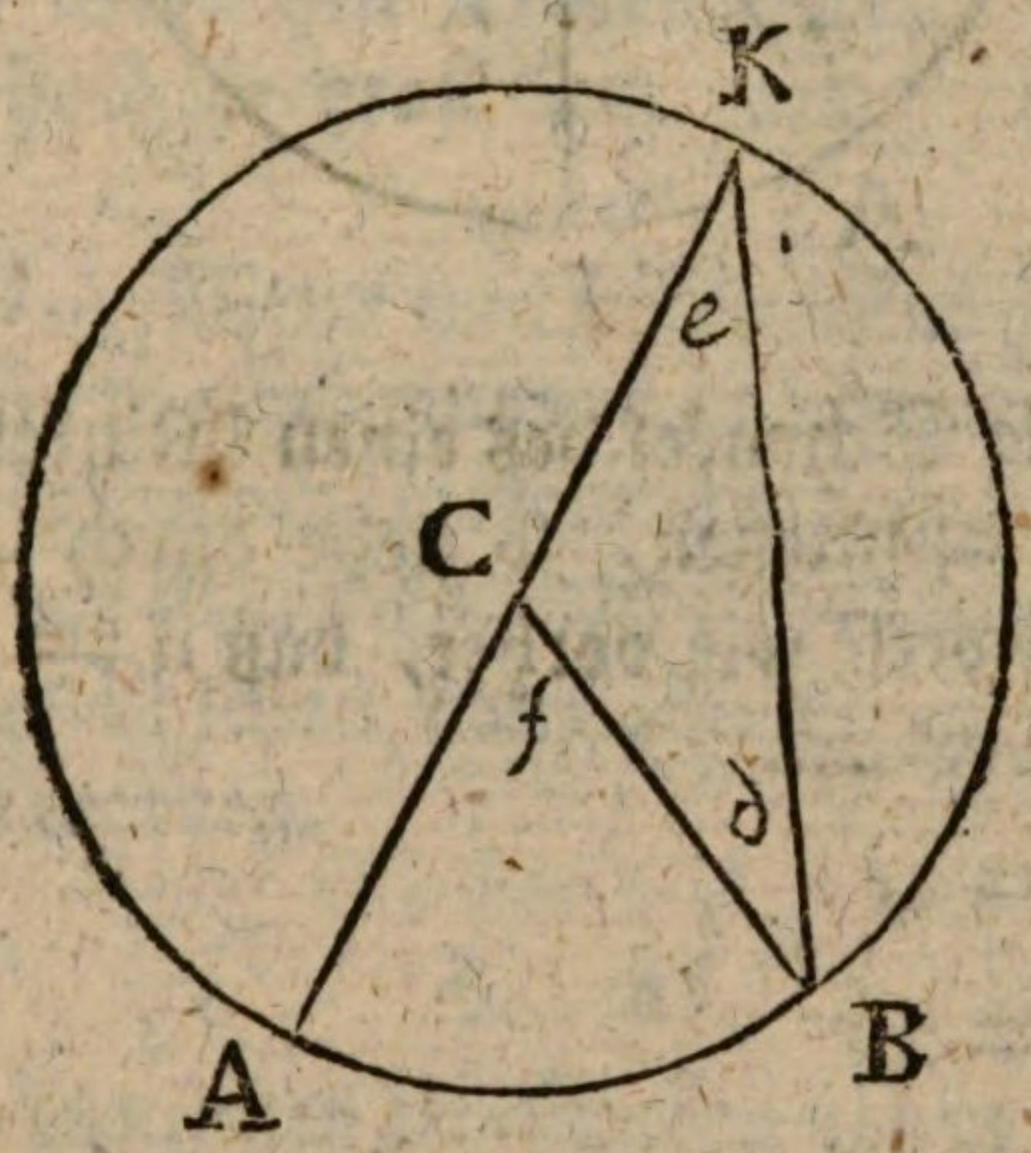
Mechanische Auflösung.

Ziehe willkürlich CF. Am Ende C lege den Mittelpunkt C des Winkelmessers, und an die Linie CF seinen Halbmesser CD. Von D nach K zähle so viel Grade als verlanget werden. Merke den Punkt K. Nimm den Winkelmesser weg, und ziehe KC oder GC, so hat der Winkel GCF die verlangten Grade.

Beschreibet man aus dem Mittelpunkte C einen Bogen IK zwischen beyden Schenkeln des Winkels, so hat dieser Bogen eben so viel Grade als der Winkel, oder als verlanget worden.

§. 44.

Wenn in einem Zirkel ein geradlinichter Winkel am Mittelpunkte und ein anderer am Umkreise mit den Enden ihrer Schenkel über dem nemlichen Bogen stehen, so ist der Winkel am Mittelpunkte doppelt so groß als der Winkel am Umkreise, oder der Winkel am Umkreise ist die Hälfte des Winkels am Mittelpunkte.



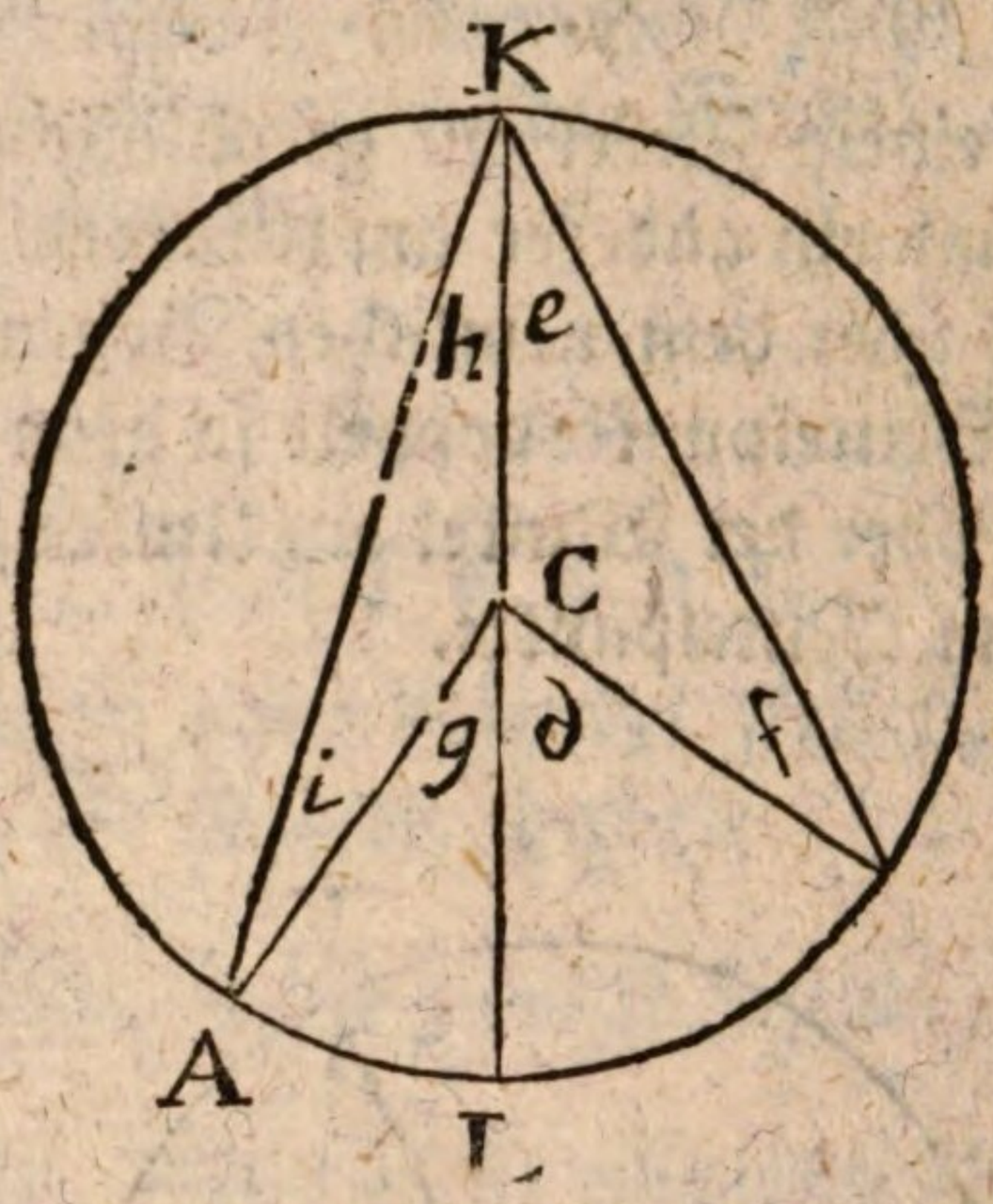
I) Es stehe der Winkel *e* am Umkreise und *f* am Mittelpunkt, beyde über dem Bogen A*B*. Es ist BCK ein gleichschenkliches Dreyeck, weil CB = *C*K

Also ist $\angle e = \angle d$, und $\angle e + d = 2\angle e$.

Der auswendige Winkel *f* ist $= \angle e + \angle d$ (IV. §. 11.)

Also ist $\angle f = 2\angle e$.

II) Wenn

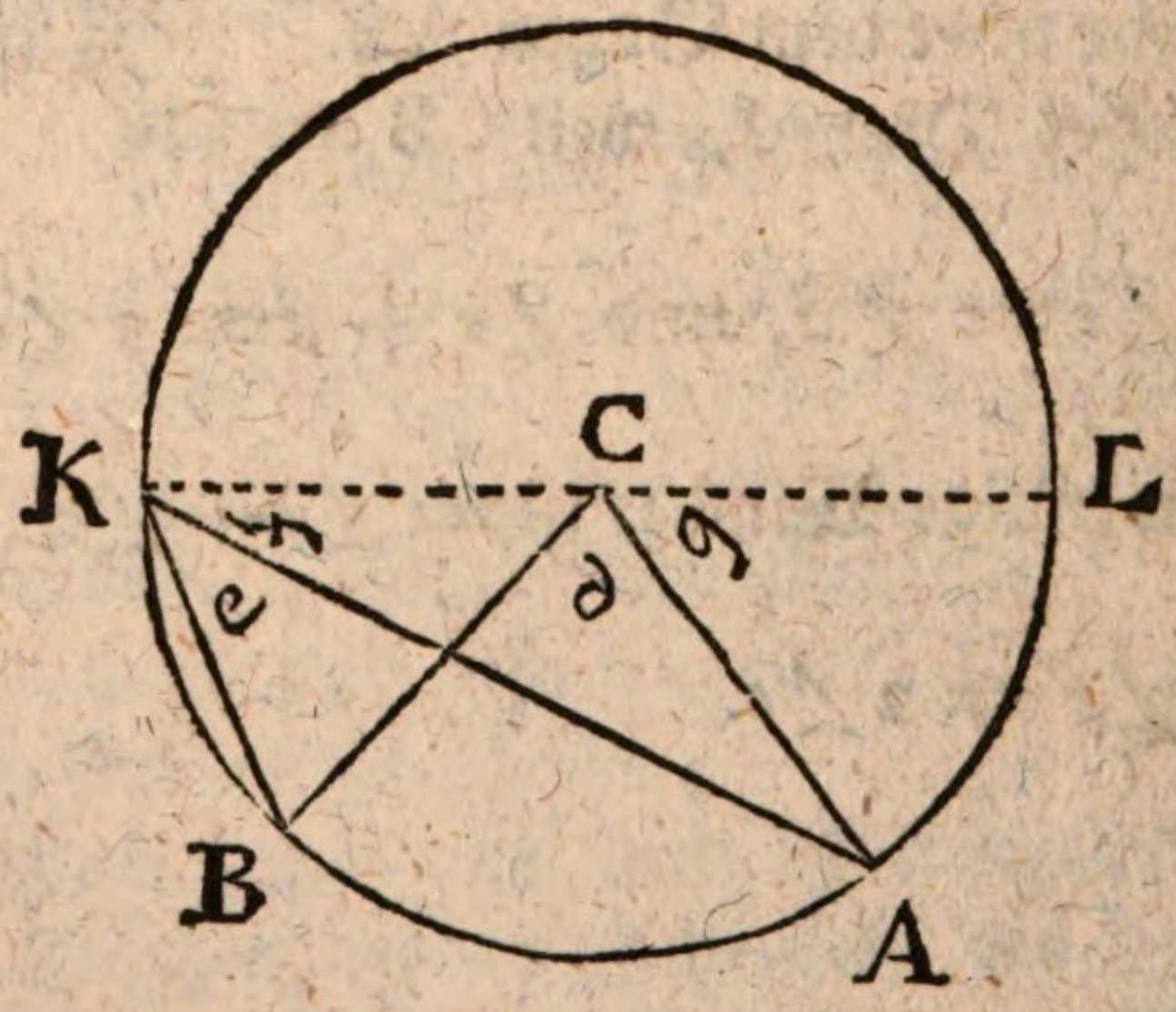


II) Wenn die Schenkel des einen Winkels die Schenkel des andern einschließen, so ziehe durch C den Durchmesser KL. Beweise wie vorher, daß $d = e + f = 2e$, und $g = h + i = 2h$.

Da nun $d = 2e$

$g = 2h$

so ist $(d + g) = 2e + 2h = 2(e + h)$



III) Gesetzt die Schenkel schneiden einander, so ziehe den Durchmesser KL.

Beweise

Beweise wie vorher, daß über dem Bogen LB, $\angle(d+g) = 2\angle(e+f) = 2\angle e + 2\angle f$.

Beweise eben so, daß über dem Bogen LA, $\angle g = 2\angle f$.

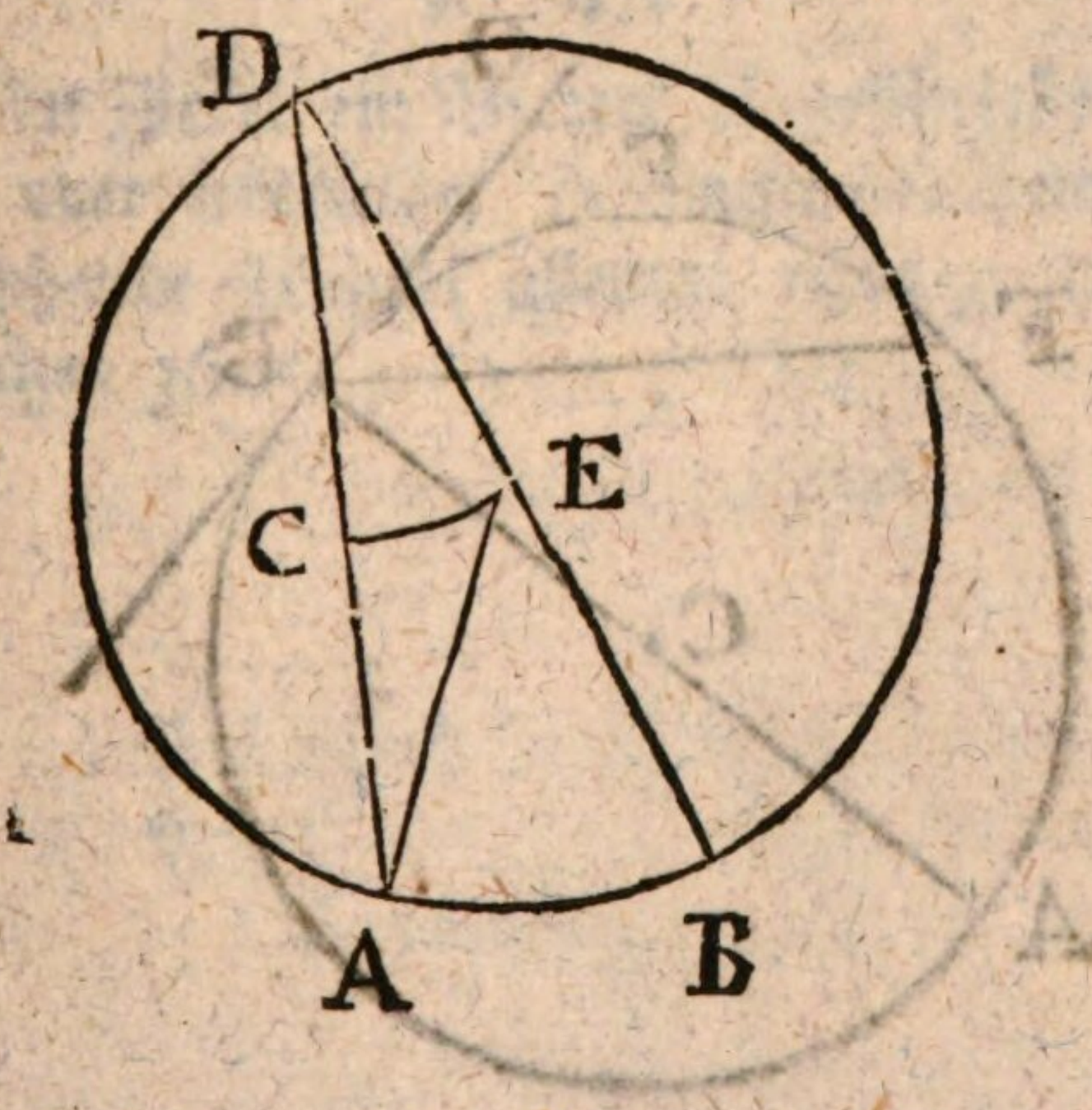
Von $\angle d + \angle g = 2\angle e + 2\angle f$
ziehe ab $\angle g = \ldots . 2\angle f$
so bleibet $\angle d \ldots = 2\angle e$

Zusatz I. Daher folget, daß Winkel am Umkreise, die über dem nemlichen Bogen stehen, alle gleich sind, weil sie alle halb so groß sind, als der Winkel am Mittelpunkte.

Zusatz II. Wenn von beyden Enden des Durchmessers gerade Linien nach einen Punkt des Umkreises gezogen werden, so entstehet am Umkreise allemal ein rechter Winkel, weil alsdann der Winkel am Mittelpunkte zwey Rechte ausmacht. Dieses ist schon oben (III. §. 33.) auf eine andere Art bewiesen worden.

§. 45.

Bey den nemlichen Umständen als in vorigem Lehrsatze hat der Winkel am Umkreise halb so viel Grade als der Winkel am Mittelpunkte.



Im

Im Zirkel ABDA wird der Winkel AEB durch den Bogen AB bestimmet.

Aus dem Punkt D mit dem Halbmesser DE (= AE) beschreibe den Bogen CE.

Da nun die Zirkelbogen AB und CE mit gleichen Halbmessern beschrieben sind, so ist (§. 38.)

AB, CE :: ∠AEB, ∠ADB.

Es ist aber bewiesen (§. 44.), daß

∠AEB, ∠ADB :: 2, 1

Also ist auch

AB, CE :: 2, 1

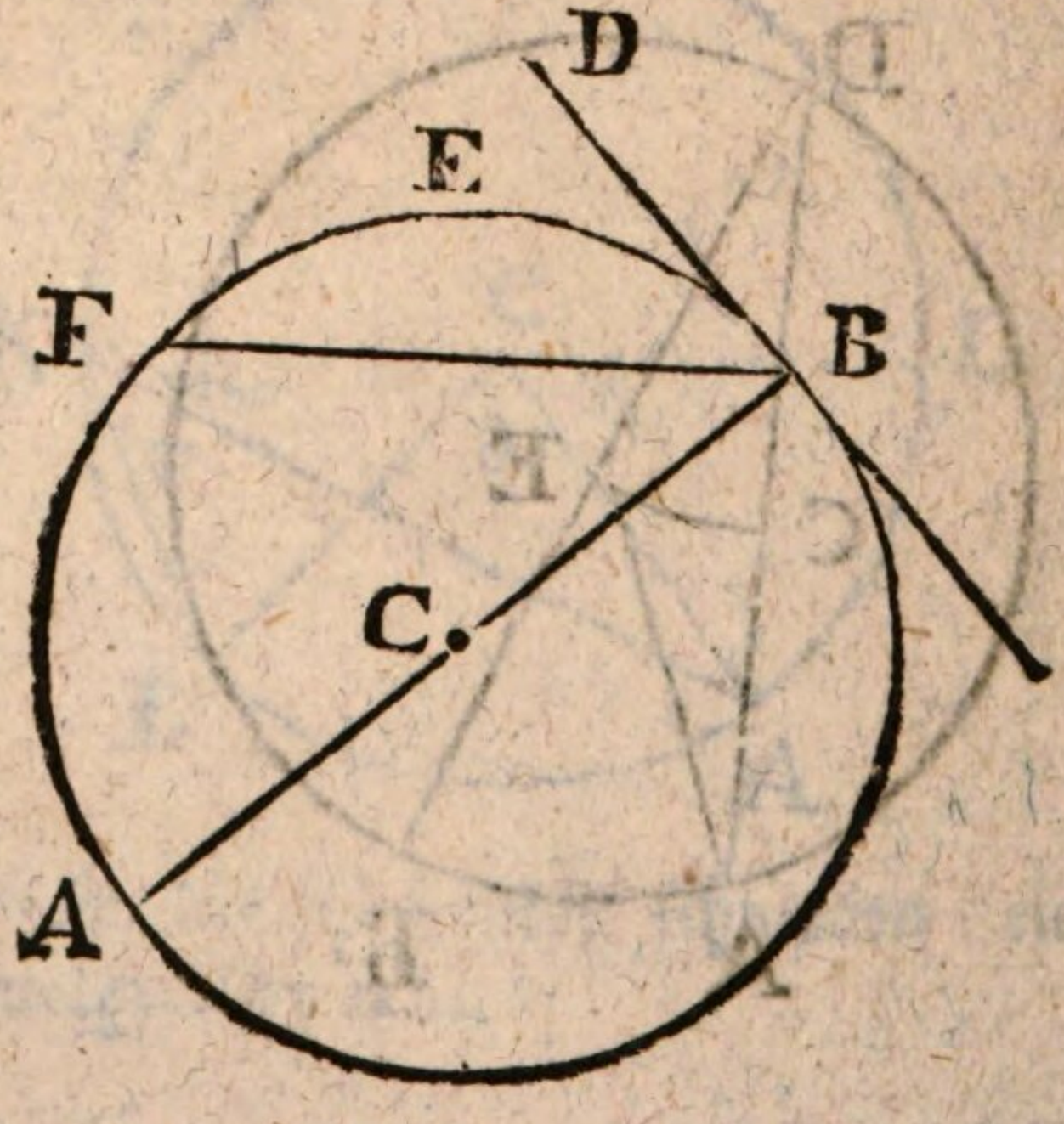
oder CE = $\frac{1}{2}$AB.

Also hat CE halb so viel Grade als AB. Da nun die Grade dieser Bogen zugleich die Grade der Winkel sind, die sie bestimmen, so hat auch ∠ABD halb so viel Grade als ∠ACB.

Zusatz. Der Winkel ABD hat demnach halb so viel Grade als der Bogen AB, worauf er stehet.

§. 46.

Der Winkel den eine Sehne und eine berührende Linie am Umkreise bilden, hat halb so viel Grade als der Bogen der zur Sehne gehöret.



Es berühre DB den Zirkel in B, und BF sey eine beliebige Sehne, die aus dem Punkte B entspringt, so hat der Winkel DBF halb so viel Grade als der Bogen BEF.

Errichte über DB im Punkte B eine senkrechte Linie BA, so gehet sie durch den Mittelpunkt C (§. 26.), und BEFA ist ein halber Zirkel $=$ 180g.

Der Winkel DBA, als ein Rechter, hat halb so viel Grade als der Halbzirkel BEFA. Rechnet man demnach in Graden, so ist

$$\angle DBA = \tfrac{1}{2}(BEFA)$$
$$= \tfrac{1}{2}(BEF + FA)$$
$$= \tfrac{1}{2}BEF + \tfrac{1}{2}FA.$$

Ferner ist $\angle FBA = \tfrac{1}{2}FA$ nemlich an Graden (§. 45.).

Da nun $\angle DBA = \tfrac{1}{2}BEF + \tfrac{1}{2}FA$

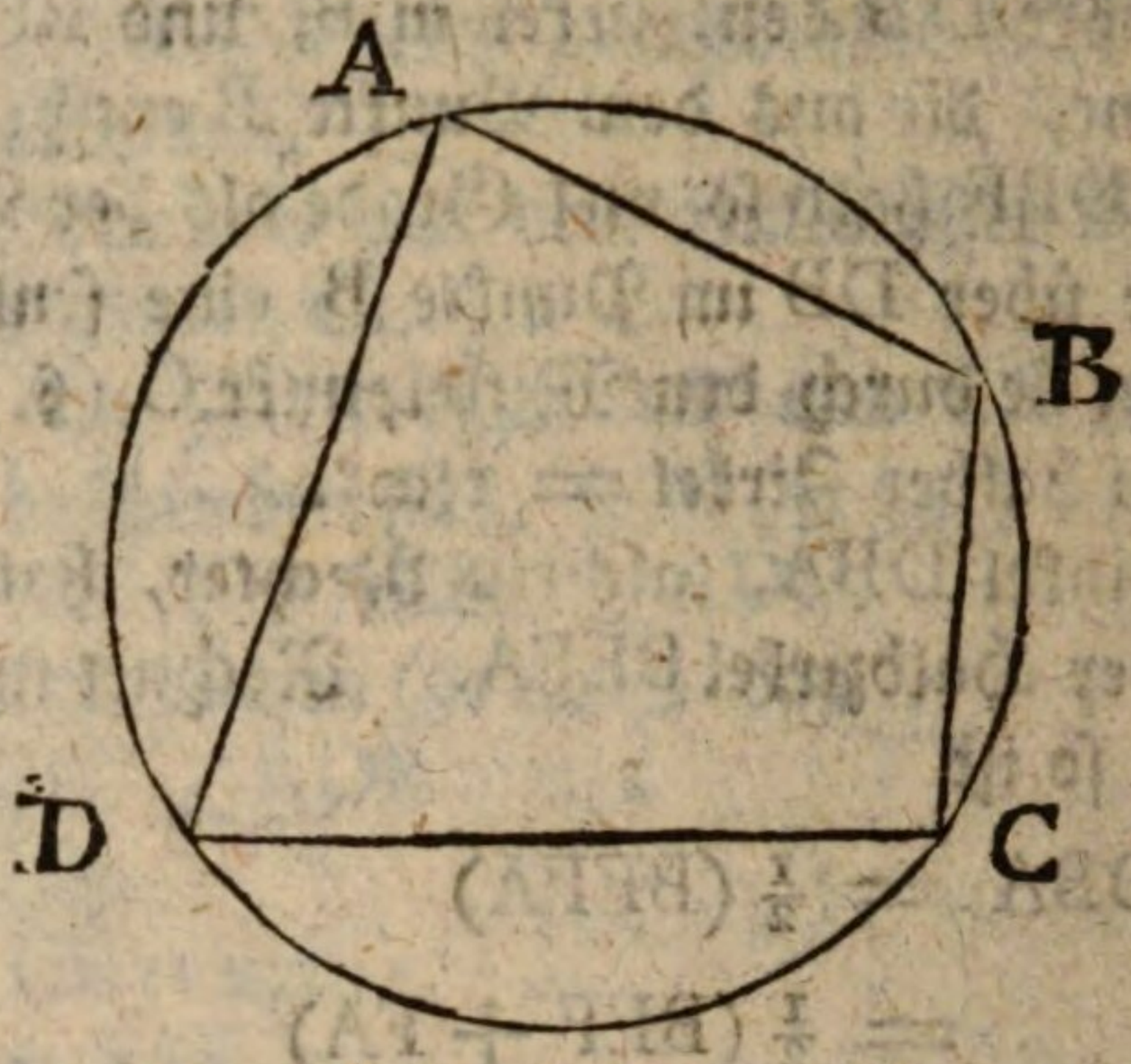
$\angle FBA = \ldots\ldots \tfrac{1}{2}FA$

so ist $\angle DBA - \angle FBA = \tfrac{1}{2}BEF$

oder $\angle DBF = \tfrac{1}{2}BEF.$

§. 47.

Wenn im Zirkel ein Viereck eingeschrieben wird, es sey regulär oder irregulär, so machen in demselben zwey gegenüberstehende Winkel allemal 180g, und alle vier Winkel machen 360g.



Es sey das irreguläre Viereck ABCD im Zirkel eingeschrieben, so hat ∠ABC halb so viel Grade als der Bogen ADC, und ∠ADC halb so viel als der Bogen ABC. Also hat man in Graden folgende Vergleichungen:

$$\angle ABC = \tfrac{1}{2} \text{Bog. } ADC$$

$$\angle ADC = \tfrac{1}{2} \text{Bog. } ABC$$

daher $\angle ABC + \angle ADC = \tfrac{1}{2} \text{Bog. } ADC + \tfrac{1}{2} \text{Bog. } ABC$

oder $\angle ABC + \angle ADC = \tfrac{1}{2} (\text{Bog. } ADC + \text{Bog. } ABC)$

Es machen aber der Bogen ADC + Bogen ABC den ganzen Umkreis, welcher 360 Grade hat. Also ist

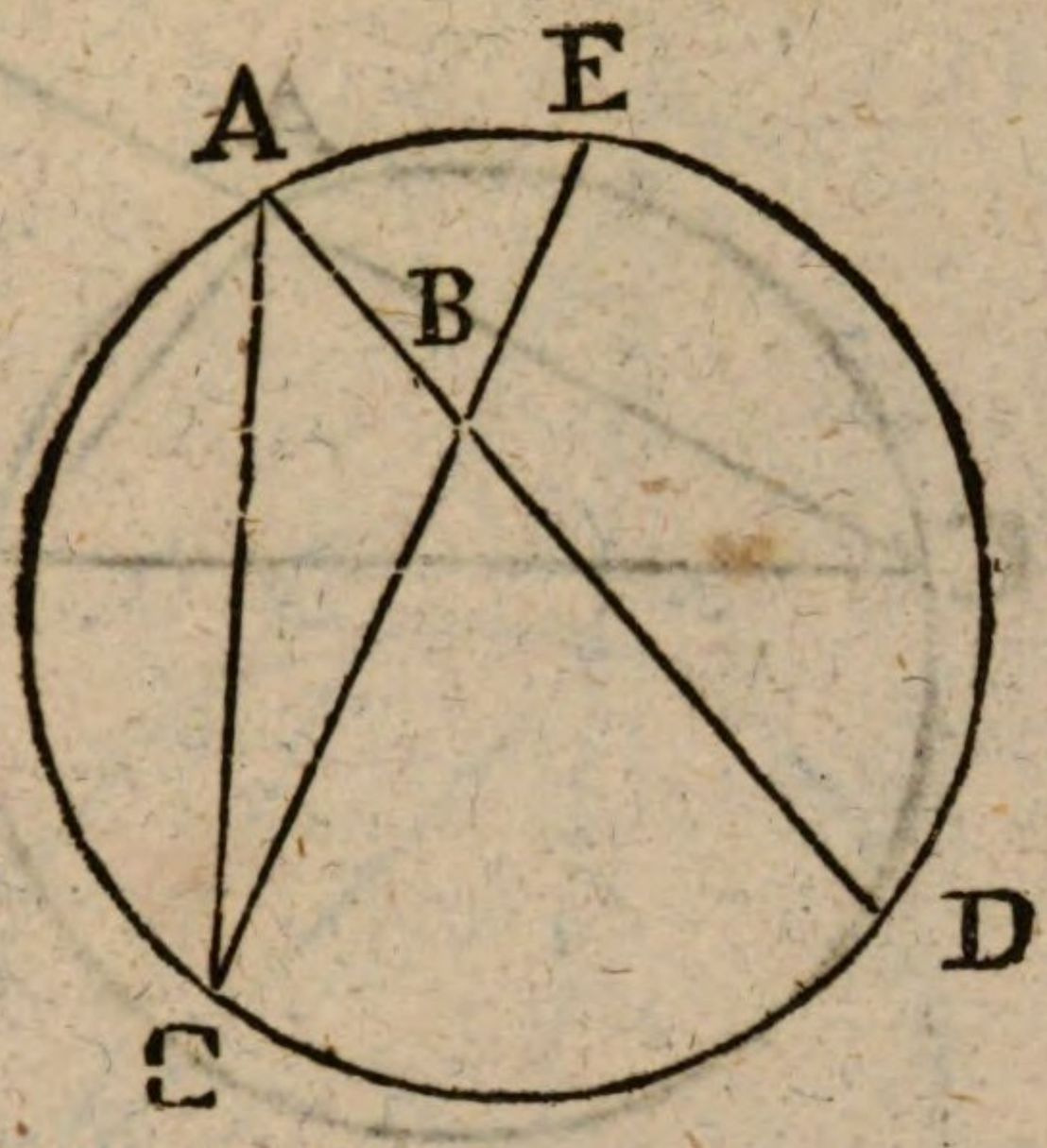
$$\angle ABC + \angle ADC = \tfrac{1}{2}(360^g) = 180^g = 2R.$$

Eben so läßt sich beweisen, daß $\angle BAD + \angle BCD = 180^g$. Folglich $\angle ABC + \angle ADC + \angle BAD + \angle BCD = 360^g$.

§. 48.

Der Winkel CBD dessen Scheitel B in der Zirkelfläche anderswo als im Umkreise lieget, hat so viel Grade als beyde Hälften der Bogen CD und AE.

Denn



Denn es ist $\angle DBC = \angle A + \angle C$ (IV §. 11)
Nun ist an Graden (§. 44)

$$\angle A = \tfrac{1}{2} CD$$

$$\angle C = \tfrac{1}{2} AE$$

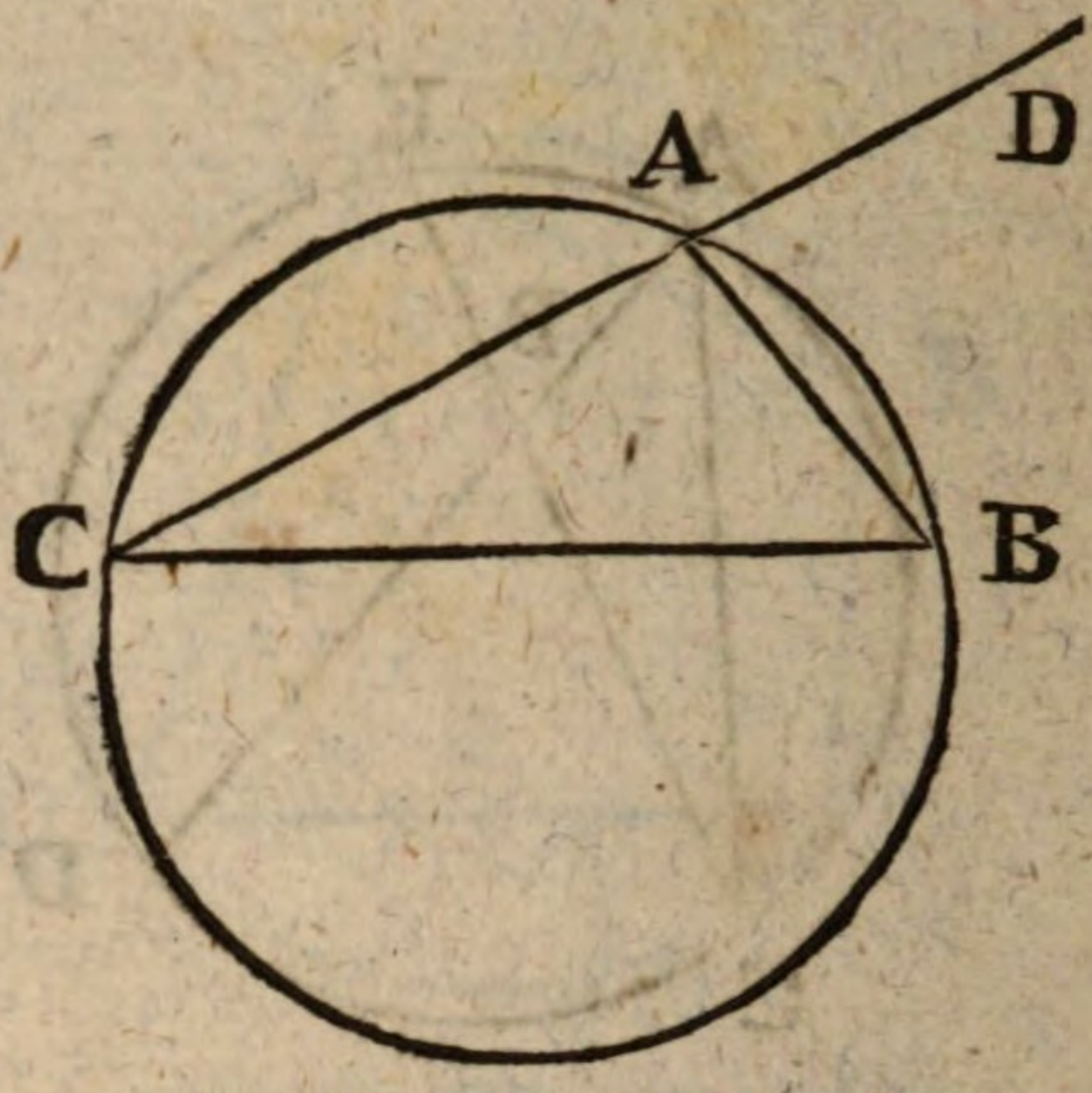
folglich $\angle A + \angle C = \tfrac{1}{2} CD + \tfrac{1}{2} AE$

oder $\angle DBC = \tfrac{1}{2} CD + \tfrac{1}{2} AE.$

§. 49.

Der Winkel DAB, der von einer Sehne AB, und der Verlängerung AD einer andern CA am Umkreise gebildet wird, hat so viel Grade als die Hälften der Bogen AB und AC

(Siehe die folgende Figur.)



Denn es ist $\angle DAB = \angle ACB + \angle ABC$ (IV. §. 11).
Nun ist an Graden (§. 44)

$$\angle ACB = \tfrac{1}{2} \text{ Bog. } AB$$

$$\angle ABC = \tfrac{1}{2} \text{ Bogen } AC$$

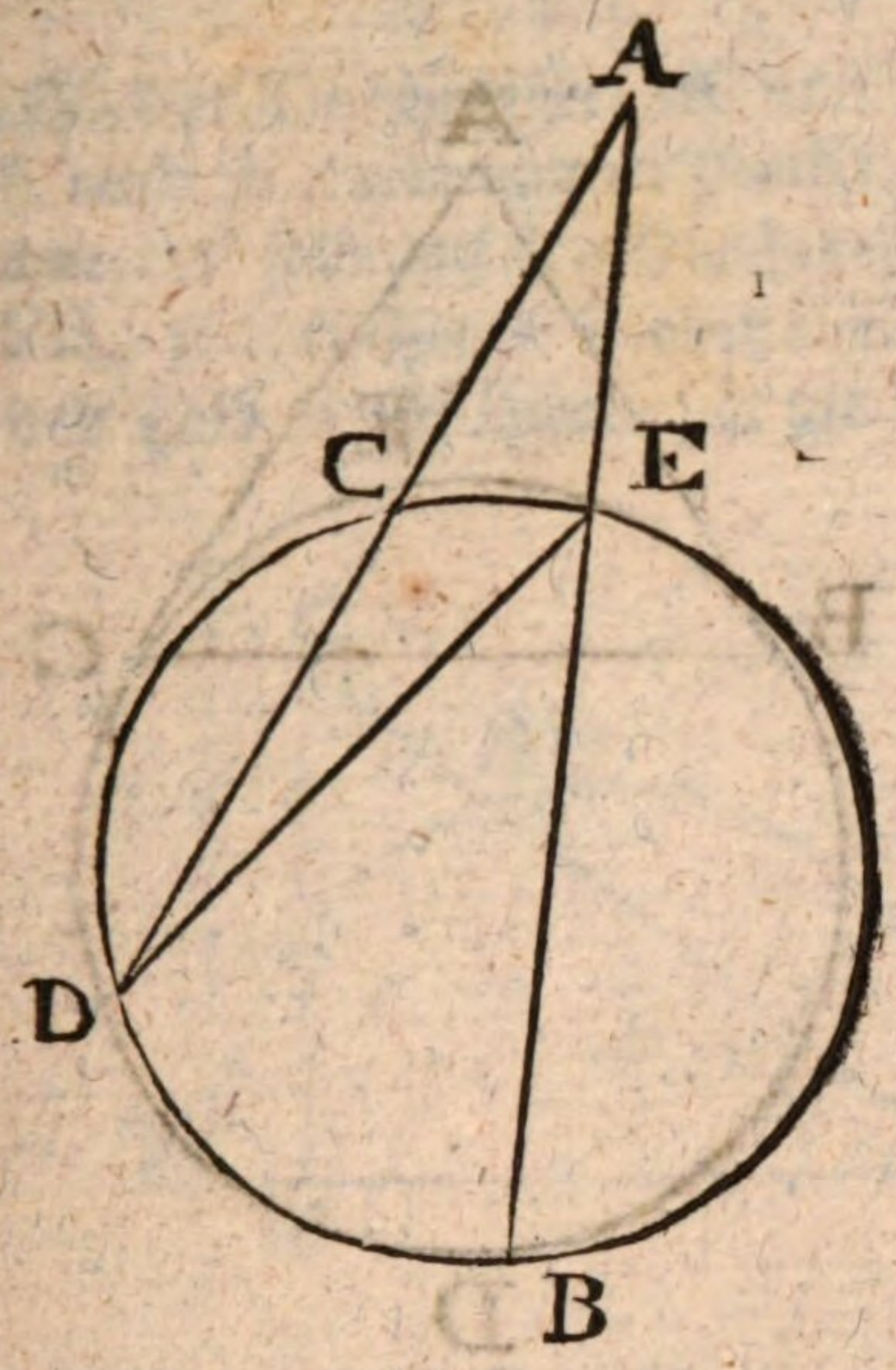
also $\angle ACB + \angle ABC = \tfrac{1}{2}$ Bog. $AB + \tfrac{1}{2}$ Bog. AC

oder $\angle DAB = \tfrac{1}{2}$ Bog. $AB + \tfrac{1}{2}$ Bog. AC

§. 50.

Der Winkel BAD, der außerhalb der Zirkelfläche von zwey Linien AB, AD gebildet wird, die den Zirkel schneiden, ist an Graden der halben Differenz der Bogen BD und EC gleich.

(Siehe die folgende Figur.)



Es ist $\angle BED = \angle EAD + \angle EDA$, oder

$\angle EAD = \angle BED - \angle EDA$

Nun ist an Graden (§. 44)

$\angle BED = \frac{1}{2} BD$

$\angle EDC = \frac{1}{2} EC$

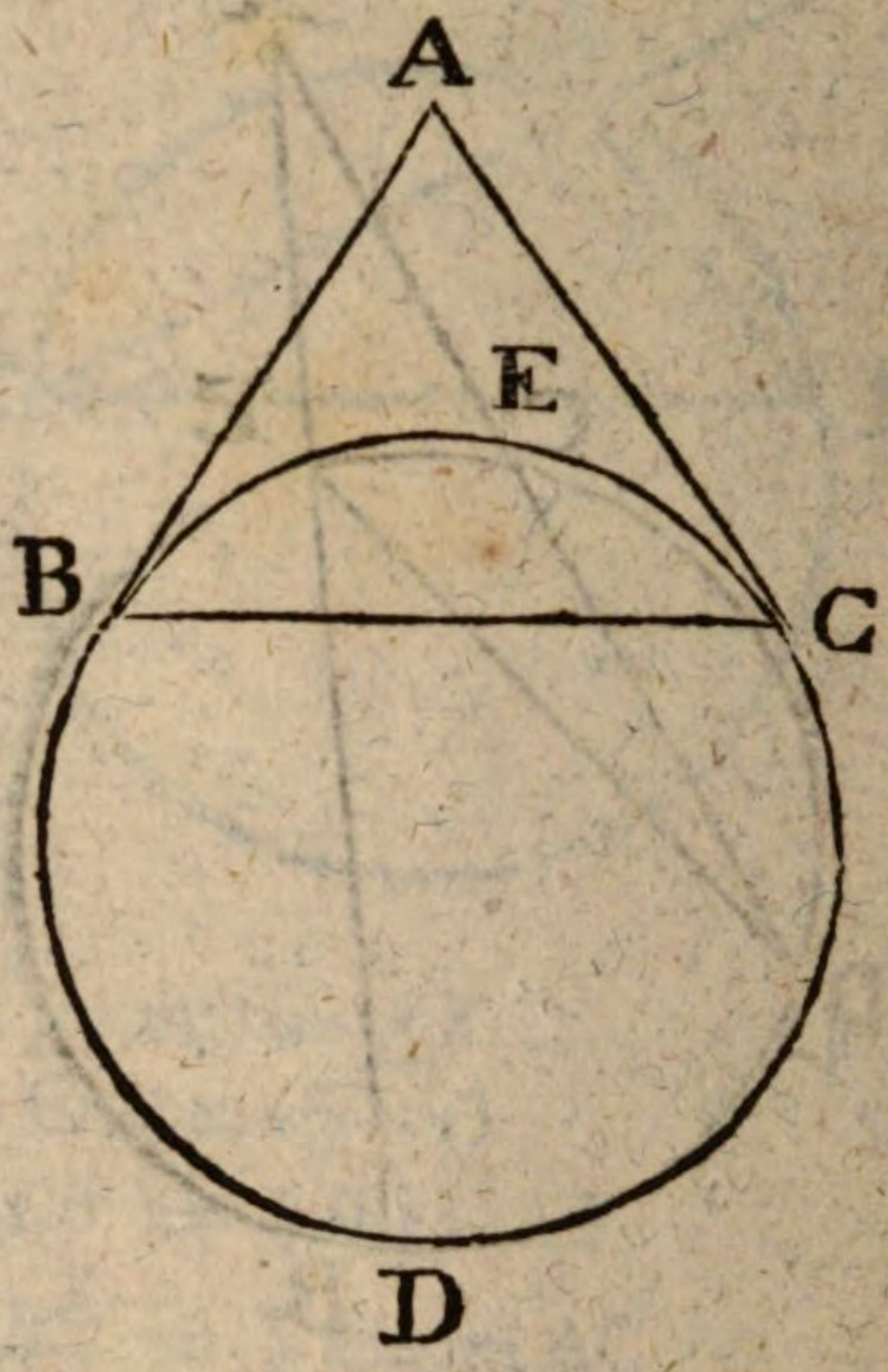
folglich $\angle BED - \angle EDC = \frac{1}{2} BD - \frac{1}{2} EC$

oder $\angle EAD = \frac{1}{2}(BD - EC)$

§. 51.

Wenn die Linien AB und AC den Zirkel berühren, so bilden sie einen Winkel A, der an Graden der halben Differenz beyder Bogen BDC und BEC gleich ist.

(Siehe die folgende Figur.)



Im Dreyecke *ABC* ist

$$\angle A + \angle B + \angle C = 2\,\mathfrak{R} = 180^{g}$$

Es sind aber $180^{g} = \frac{1}{2}\,BDCEB = \frac{1}{2}\,BDC + \frac{1}{2}\,BEC.$
Also sind an Graden

$$\angle A + \angle B + \angle C = \frac{1}{2}\,BEC + \frac{1}{2}\,BDC.$$

Nun ist ferner an Graden (§. 46).

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\,BEC$$

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\,BEC$$

Also $\angle ABC + \angle ACB = \frac{1}{2}\,BEC + \frac{1}{2}\,BEC$

Von $\angle A + \angle B + \angle C = \frac{1}{2}\,BDC + \frac{1}{2}\,BEC$

nimm ab $\angle B + \angle C = \frac{1}{2}\,BEC + \frac{1}{2}\,BEC$

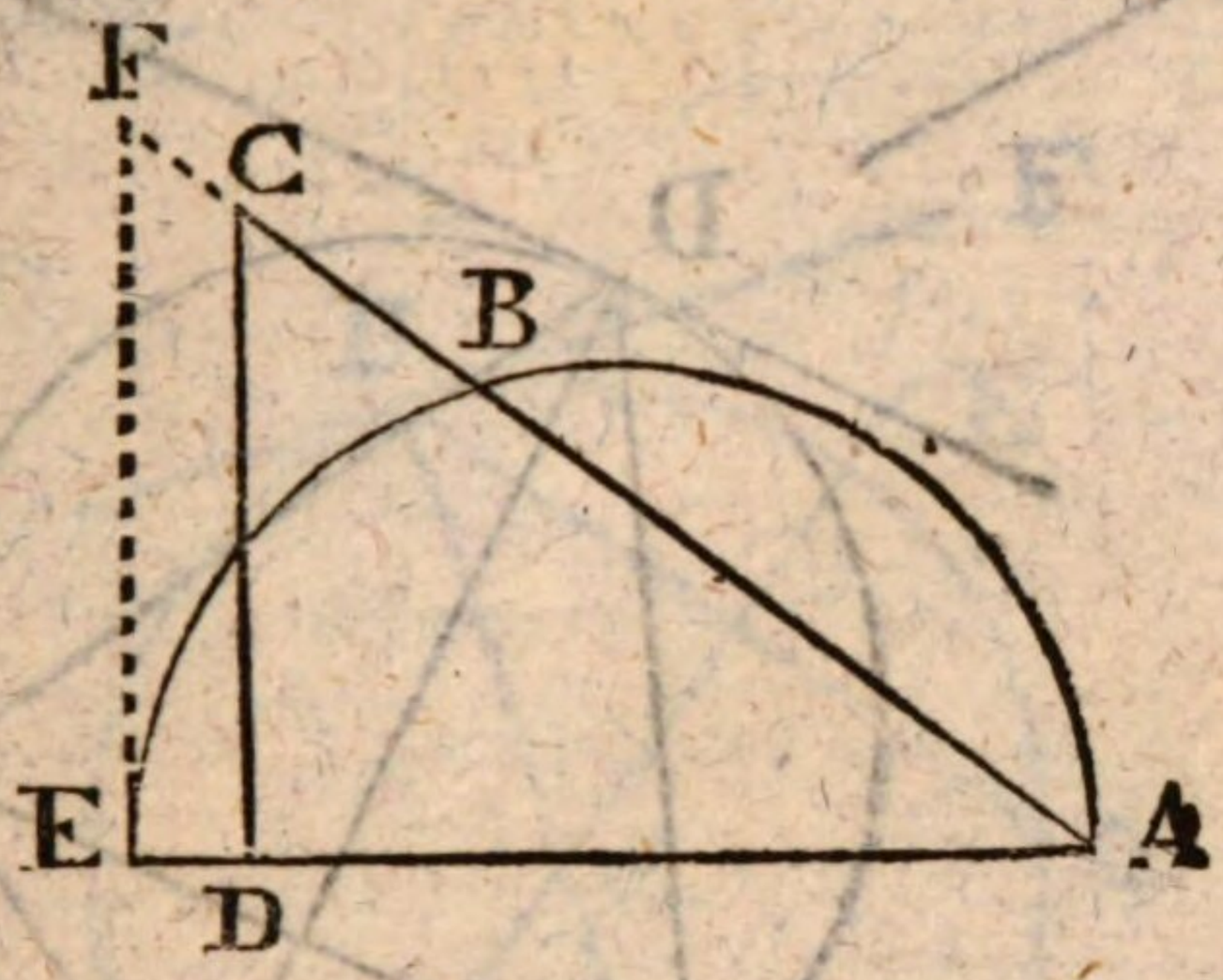
so bleibet $\angle A \ldots\ldots = \frac{1}{2}\,BDC - \frac{1}{2}\,BEC$

oder $\angle A \ldots\ldots = \frac{1}{2}\,(BDC - BEC)$

§. 52.

§. 52.

Es sey *AE* der Durchmesser, *AC* oder AF schneide den Umkreis in A und in einem andern Punkte B. Vom Ende der *AC* oder AF falle auf den Durchmesser die senkrechte CD oder FE, so entstehet in C oder F ein Winkel ACD oder *AFE*, der halb so viel Grade hat als der Bogen AB



Weil das Dreyeck ADC in D einen rechten Winkel hat, so sind

$$\angle A + \angle C = \mathfrak{R} = 90^g.$$

Es ist aber

$$90^g = \tfrac{1}{2}\text{Bog. }EBA = \tfrac{1}{2}\text{Bog. }EB + \tfrac{1}{2}\text{Bog. }AB$$

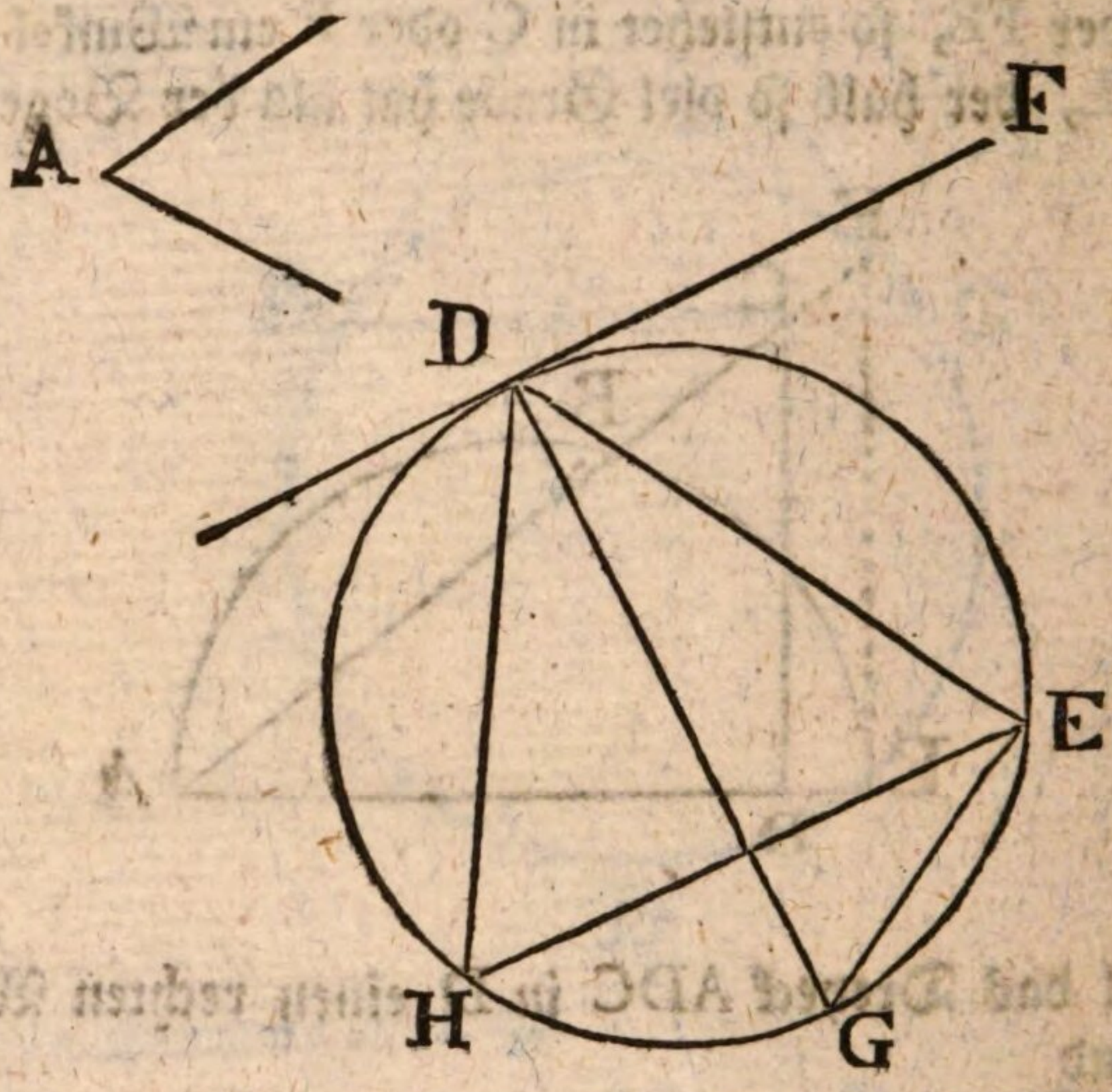
Also ist $\angle A + \angle C = \tfrac{1}{2}$ Bog. EB + $\tfrac{1}{2}$ Bog. AB.
Nun ist (§. 44) $\angle A \ldots = \tfrac{1}{2}$ Bog. EB
Folglich $\angle C = \ldots\ldots = \tfrac{1}{2}$ Bog. AB.

§. 53.

Aufgabe.

Es sind ein Zirkel und ein Winkel A gegeben. Es soll im Zirkel ein Abschnitt bestimmet werden, der den gegebenen Winkel fassen könne, das heißt, wenn von beyden Enden des abgeschnittenen Bo-

gens gerade Linien nach den Umfang des Abschnittes gezogen werden, so sollen sie einen Winkel bilden, der dem gegebenen gleich sey.



Auflösung. Ziehe eine gerade Linie FD, die den Zirkel irgendwo in D berühret.

Ziehe die Sehne DE, so daß ∠FDE = ∠A.

So ist DHGE der verlangte Abschnitt; und wenn man DH und EH, oder DG und EG u. s. f. ziehet, so ist ∠H = ∠A, ∠G = ∠A, u. s. f.

Denn ∠FDE hat halb so viel Grade als der Bogen DE (§. 46).

∠DHE hat auch halb so viel Grade als der Bogen DE (§. 44).

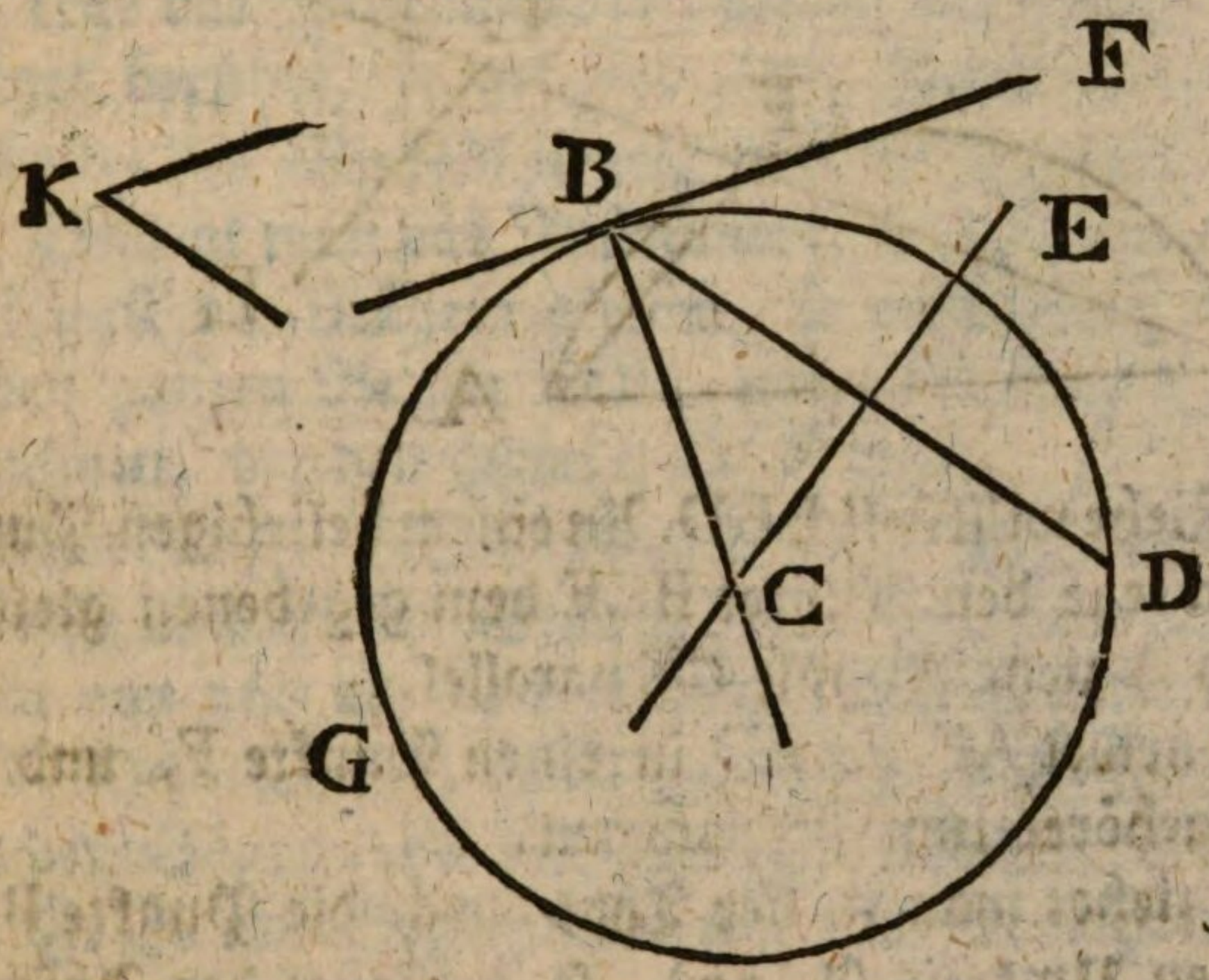
Also ist ∠DHE = ∠FDE, und da ∠FDE = ∠A, so ist ∠DHE = ∠A.

Das nemliche gilt von ∠DGE, und von allen im gefundenen Abschnitte enthaltenen Winkeln.

§. 54.

Aufgabe.

Es ist gegeben ein Winkel K und eine gerade Linie BD. Es wird ein Zirkel-Abschnitt verlanget, der von der Sehne BD begränzet sey, und den Winkel K fassen könne.



Auflösung. Ziehe BF, so daß ∠DBF = ∠K.
Errichte BC senkrecht auf BF.
Ziehe EC senkrecht durch die Mitte von BD.
So schneiden diese letzten Linien einander in einem Punkte C.

Aus dem Mittelpunkte C mit dem Halbmesser CB beschreibe einen Zirkel.

So wird der Abschnitt BGD den gegebenen Winkel K fassen.

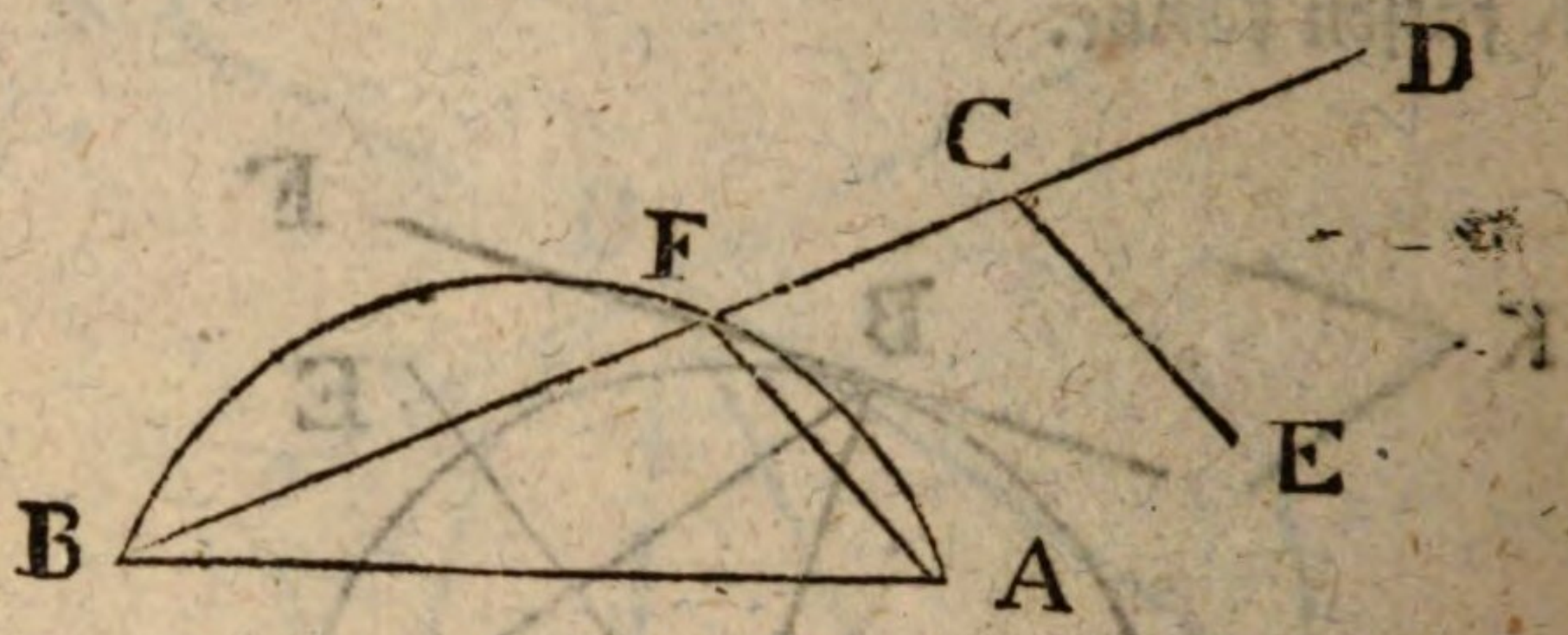
Denn durch diese Konstrukzion berühret BF den Zirkel.

Und da ∠DBF = ∠K, so muß auch der Abschnitt BGD den Winkel K fassen (§. 53).

§. 55.

Aufgabe.

Es ist eine Sehne AB gegeben, nebst dem Winkel, den der Abschnitt fassen soll. Man soll die Punkte bestimmen, wodurch der Bogen gehen wird, ohne den Mittelpunkt des Zirkels zu suchen.



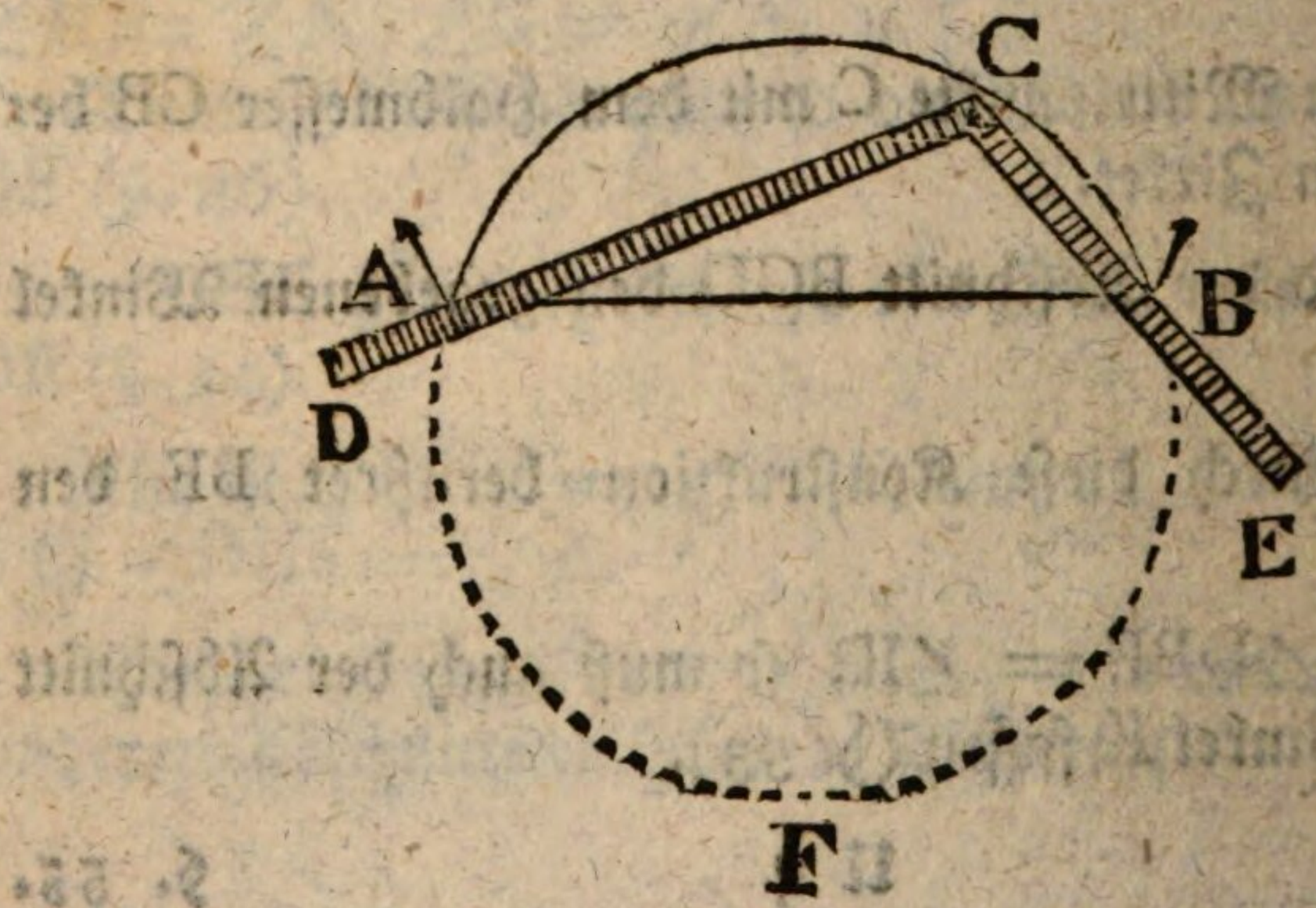
Aufl. Ziehe willkürlich BD. An einem beliebigen Punkte C derselben lege den Winkel BCE dem gegebenen gleich.

Durch A ziehe AF mit CE parallel.

So schneidet AF die BD in einen Punkte F, und dieser Punkt gehöret zum Zirkelbogen.

Denn ziehet man in der That durch die Punkte B, F und A einen Umkreis (§. 30), so entstehet der Abschnitt BFAB, welcher den Winkel BFA = BCE fasset.

Ziehet man nun aus B mehrere solche Linien wie BD, so lassen sich auf eine ähnliche Art mehr solche Punkte des Bogens, wie F bestimmen.



Mechanische Auflösung.

Es sey AB die gegebene Sehne, und es werde über derselben ein Abschnitt verlangt, der einen gewissen Winkel fassen könne.

Befestige an einander zwey Lineale, so daß sie den Winkel DCE bilden, der dem gegebenen gleich sey.

An den Enden A und B der Sehnen schlage Nägel ein.

Lege das Instrument so, daß es mit beyden Kanten die Nägel berühre, so gehöret jeder Punkt wie C, der im Scheitel des Winkels lieget, zum verlangten Bogen.

Bewegt man das Instrument, so daß die beyden Ränder längst den Nägeln gleiten, so beschreibet der Scheitel C den ganzen Bogen ACB, und ACBA ist der verlangte Abschnitt, der den Winkel DCE fasset.

Anmerkung. Will man, daß der Bogen ACB eine gewisse Anzahl von Graden habe, so ziehe man diese Grade von 360 ab, so bleibet der Bogen AFB.

Dem Winkel ACB gebe man halb so viel Grade, als der Bogen AFB hat, worauf er stehet.

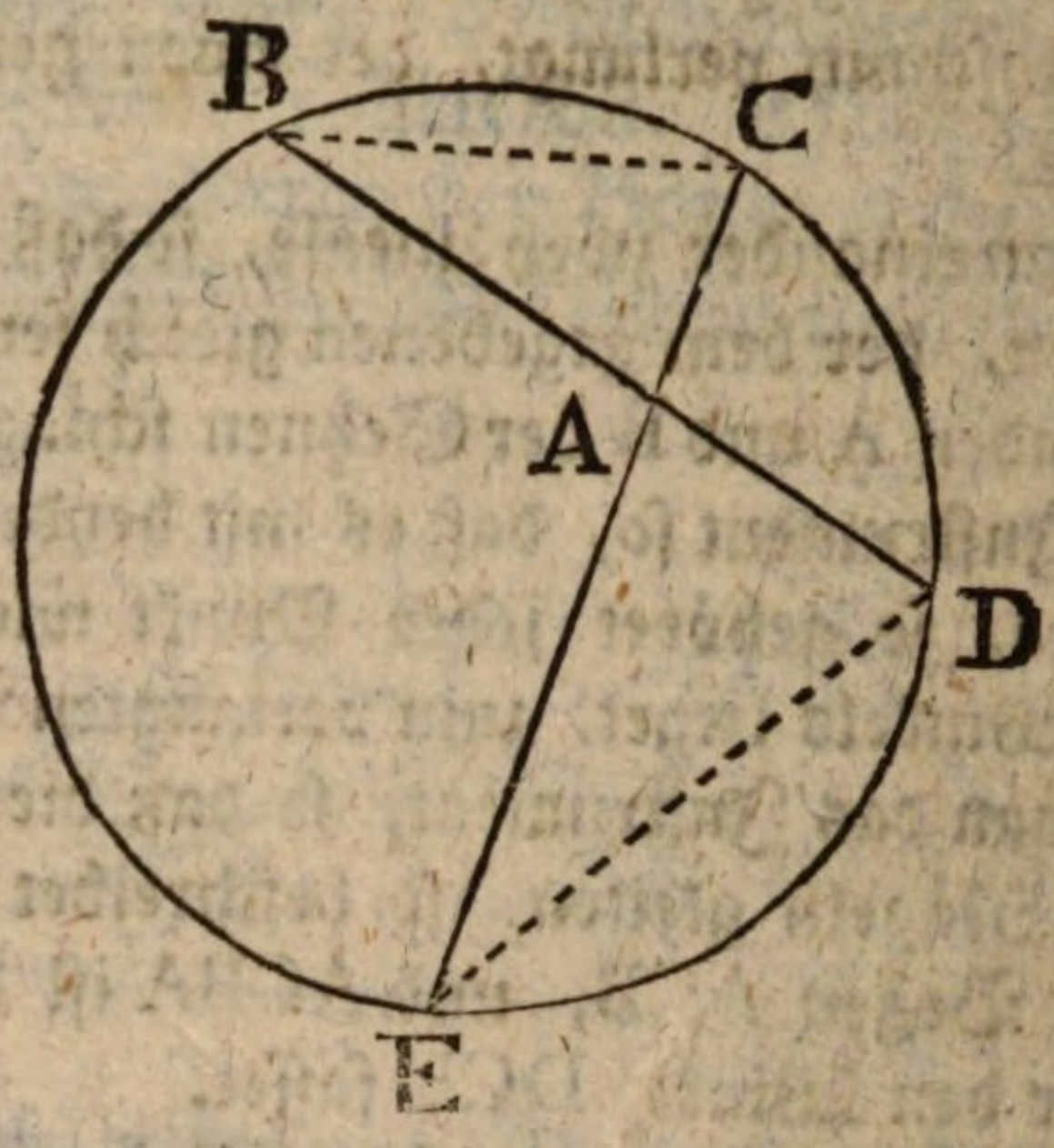
Z. E. der Bogen ACB soll 110 Grad halten.

von 360
subtr. 110
bleibe 250
die Hälfte 125 Grad = ∠ACB.

§. 56.

Wenn zwey Sehnen in einem Zirkel einander schneiden, so sind ihre Theile in umgekehrtem Verhältnisse.

(Siehe die folgende Figur.)



Es seyen BD und CE die beyden Sehnen.

Es ist △ABC ∽ △ADE. Denn es ist ∠BAC = ∠DAE, als Scheitelwinkel.

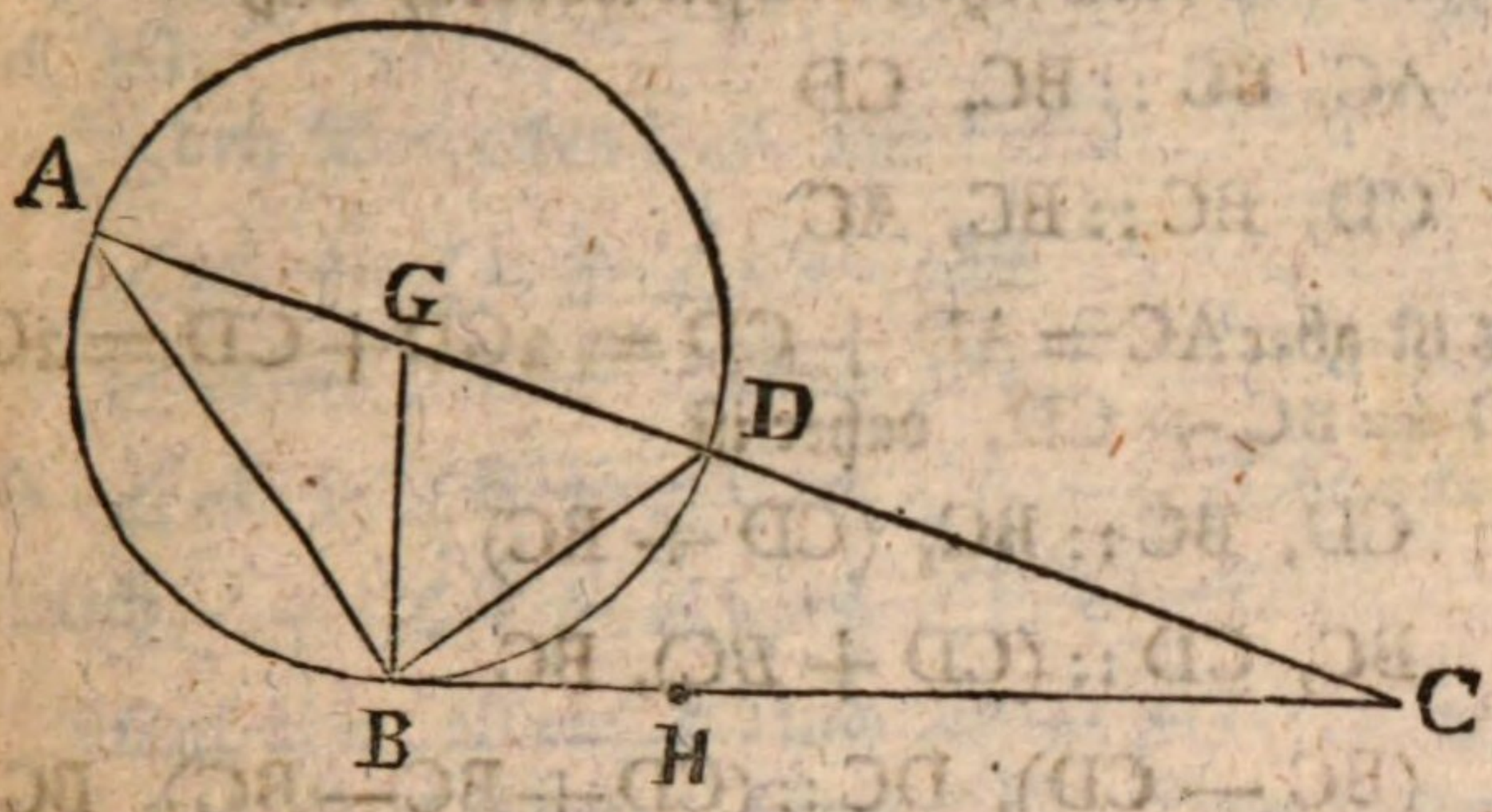
Ferner ist ∠CBA = ∠AED, oder ∠CBD = ∠CED, weil sie beyde auf dem Bogen CD stehen, und ihre Scheitel im Umkreise haben (§. 44). Folglich ist auch ∠BCA = ∠ADE.

Also verhält sich BA, Gegenseite des Winkels C, zu AE, Gegenseite des gleichen Winkels D, wie AC, Gegenseite des ∠B, zu AD, Gegenseite des gleichen ∠E. Kurz, es ist

AB, AE :: AC, AD.

§. 57.

Es sey C ein Punkt außerhalb des Zirkels. Von C werde gezogen die berührende Linie CB und die schneidende CDA, die durch den Mittelpunkt G gehet, so ist CB die mittlere Proporzional-Linie zwischen CA und CD.



Beyde Dreyecke ACB und DCB haben in C einen gemeinen Winkel. Die Hälfte des Bogens BD giebt die Grade des Winkels DBC (§. 46), wie auch die Grade des Winkels DAB oder CAB (§. 44). Also sind auch diese Winkel gleich, nemlich $\angle DBC = \angle CAB$. Folglich sind ebenfalls die dritten Winkel gleich, oder $\angle BDC = \angle CBA$, und es ist $\triangle BDC \sim \triangle CBA$.

Also verhält sich AC, Gegenseite des $\angle ABC$, zu BC Gegenseite des gleichen $\angle BDC$, wie BC, Gegenseite des $\angle BAC$, zu CD, Gegenseite des gleichen Winkels DBC, oder kurz, es ist

AC, BC :: BC, CD

oder ∴ AC, BC, CD.

Zusatz. Dieser Lehrsatz giebt ein Mittel an die Hand, eine gegebene Linie BC so zu theilen, daß der größte Theil zwischen dem Reste und der ganzen Linie die mittlere Proporzional-Linie sey.

Am Ende B errichte die senkrechte $BG = \frac{1}{2}BC$.

Aus G mit dem Halbmesser GB beschreibe einen Zirkel.

Ziehe AC.

Mache $CH = CD$, so ist die Linie BC in H verlangter Maaßen getheilet, und der Theil CH ist die mittlere Proporzional-Linie zwischen BC und BH.

Denn

Denn es ist eben jetzt bewiesen worden, daß

AC, BC :: BC, CD

oder CD, BC :: BC, AC

Es ist aber $AC = AD + CD = 2GD + CD = 2GB + CD = BC + CD$, daher ist

CD, BC :: BC, (CD + BC)

oder BC, CD :: (CD + *B*C), BC

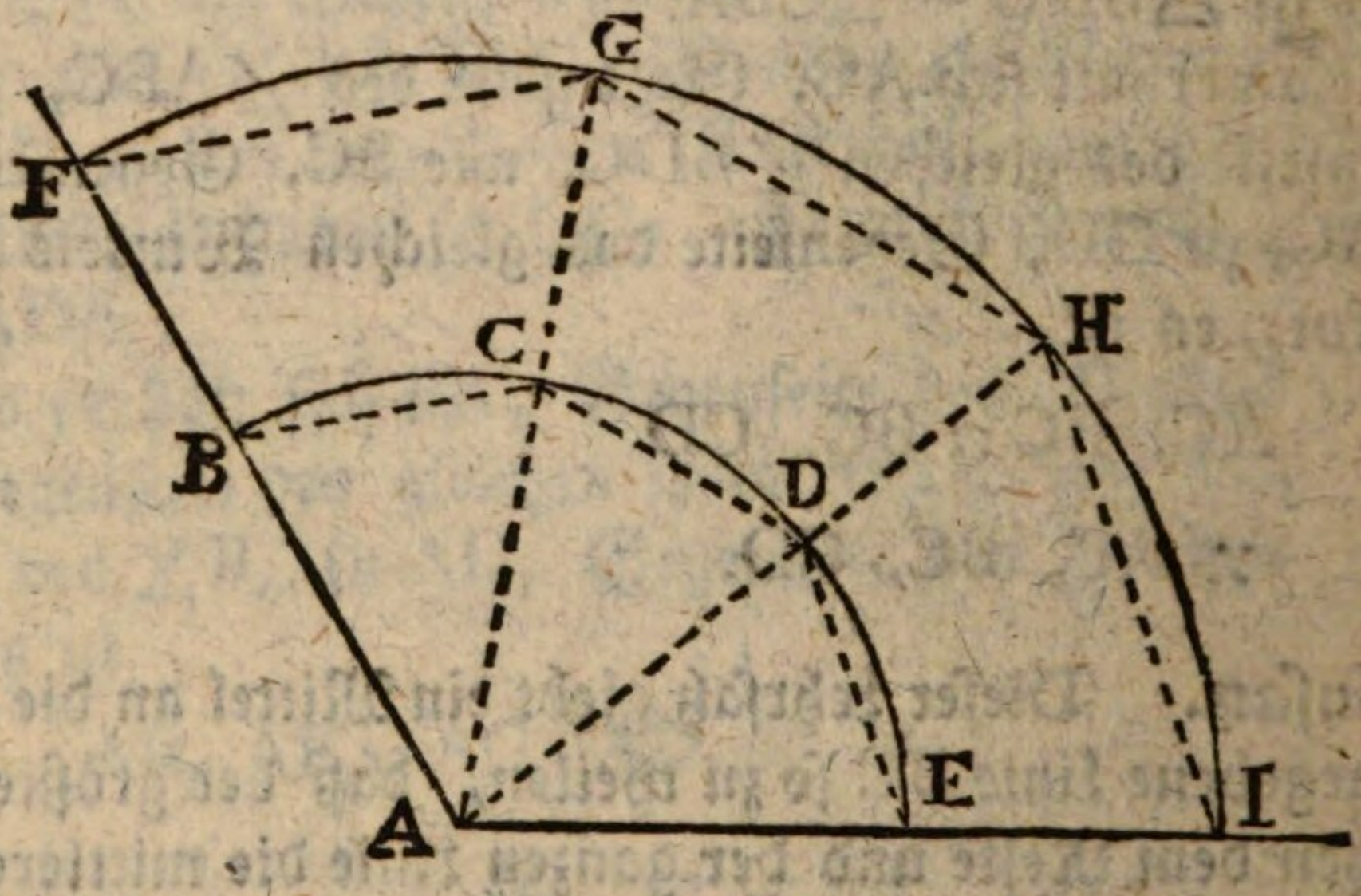
daher (BC — CD), DC :: (CD + BC — BC), BC

oder (BC — CD), DC :: CD, BC

oder BH, CH :: CH, BC.

§. 58.

Aehnliche Zirkelbogen verhalten sich wie die Halbmesser.



Es seyen aus *A* zwey ähnliche Bogen mit den Halbmessern *A*B und AF beschrieben, so daß sie den nemlichen Winkel FAI bestimmen.

Stelle dir vor, der Winkel FAI sey in einige gleiche Theile getheilet, z. E. in drey Theile, vermittelst der Linien *A*G und *A*H, so entstehen in jedem Bogen auch drey gleiche Theile.

Ziehe

Ziehe die Sehnen BC, CD, DE, desgleichen FG, GH, HI.

In den Dreyecken B*A*C und F*A*G

$$\angle A + \angle B + \angle C = 2\,\Re$$

$$\angle A + \angle F + \angle G = 2\,\Re$$

also $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A + \angle F + \angle G$

folglich $\angle B + \angle C = \angle F + \angle G.$

Weil aber $AB = AC$ und $AF = AG$ (II §. 10) so ist auch $\angle C = \angle B$ und $\angle G = \angle F$. Setze in der letzten Gleichung B anstatt C und F anstatt G, so ist

$$2\angle B = 2\angle F$$

folglich $\angle B = \angle F$

da nun $\angle B = \angle F$ und $\angle A = \angle A$, so ist

$$\triangle BAC \backsim \triangle FAG$$

Daher ist

BC, FG :: AB, *A*F.

Eben so wird bewiesen, daß

CD, GH :: AC, AG :: AB, AF

DE, HI :: AD, AH :: *A*B, AF.

Da also

BC, FG
CD, GH } :: AB, *A*F
DE, HI

so ist auch

(BC + CD + DE), (FG + GH + HI) :: *A*B, AF

oder

AB, (BC + CD + DE) :: AF, (FG + GH + HI)

Wenn

Wenn man anstatt 3 Theile, immer mehrere annimmt, so nähert sich die Summe der Sehnen BC + CD + DE je mehr und mehr der Größe des Bogens BE. Die Summen der Sehne FG + GH + HI nähert sich je mehr und mehr der Größe des Bogens FI. Das Verhältniß zwischen *A*B und (BC + CD + DE) nähert sich demnach je mehr und mehr dem Verhältniß zwischen AB und dem Bogen BE. Das Verhältniß zwischen AF und (FG + GH + HI) nähert sich je mehr und mehr dem Verhältnisse zwischen AF und dem Bogen FI.

Setzet man also die Gränzen der Verhältnisse anstatt der Verhältnisse selbst, so ist (III §. 24)

*A*B zum Bog. BE wie AF zum Bog. FI

oder AB, BE :: AF, FI

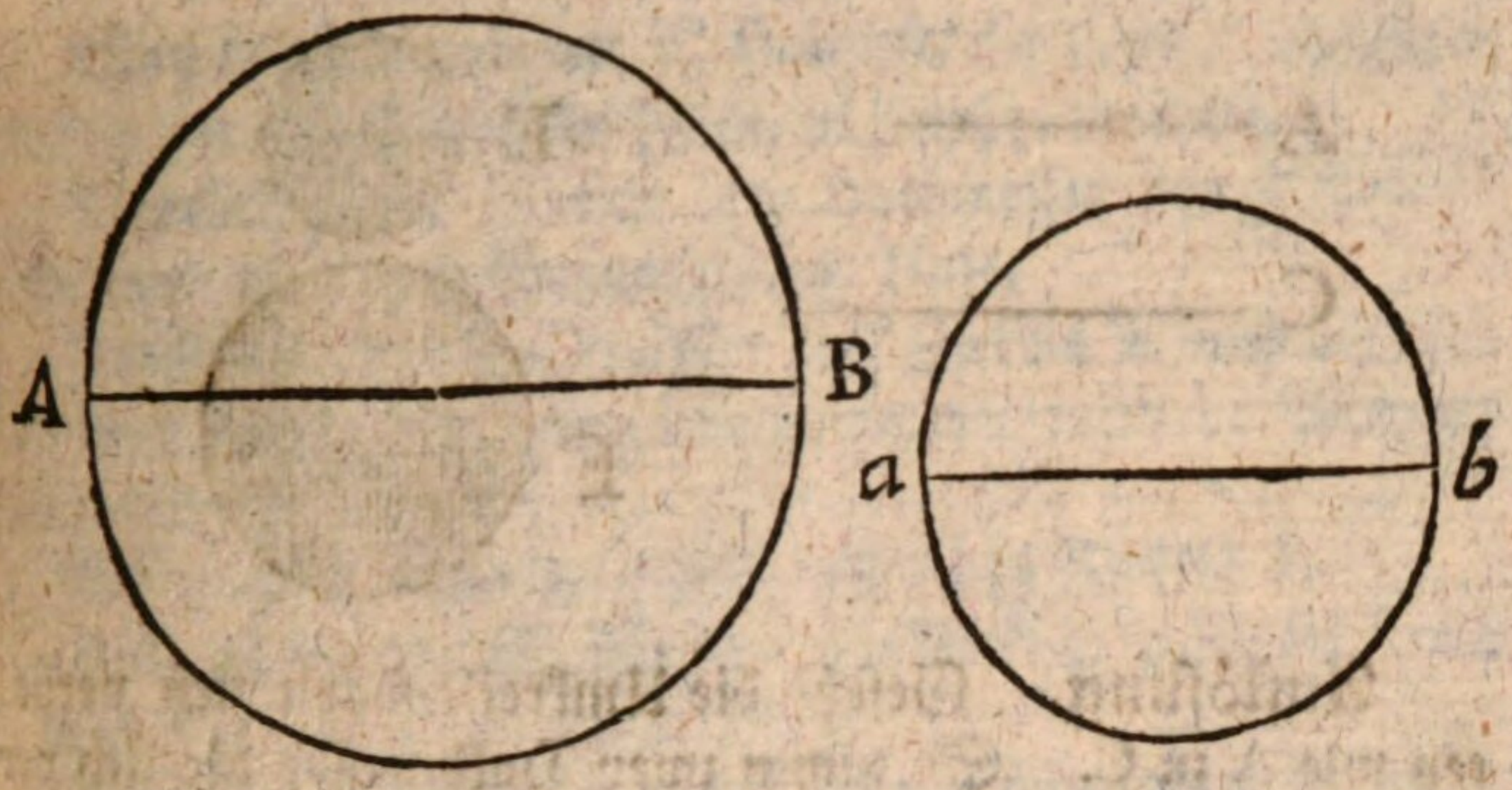
oder AB, *A*F :: BE, FI.

Das heißt, die ähnlichen Bogen verhalten sich wie die Halbmesser;

Zusatz. Der nemliche Beweis läßt sich auf den ganzen Umkreis anwenden. Also verhalten sich die Umkreise wie die Halbmesser, oder auch wie die doppelten Halbmesser, das ist, wie die Durchmesser.

§. 59.

Zirkelflächen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser.



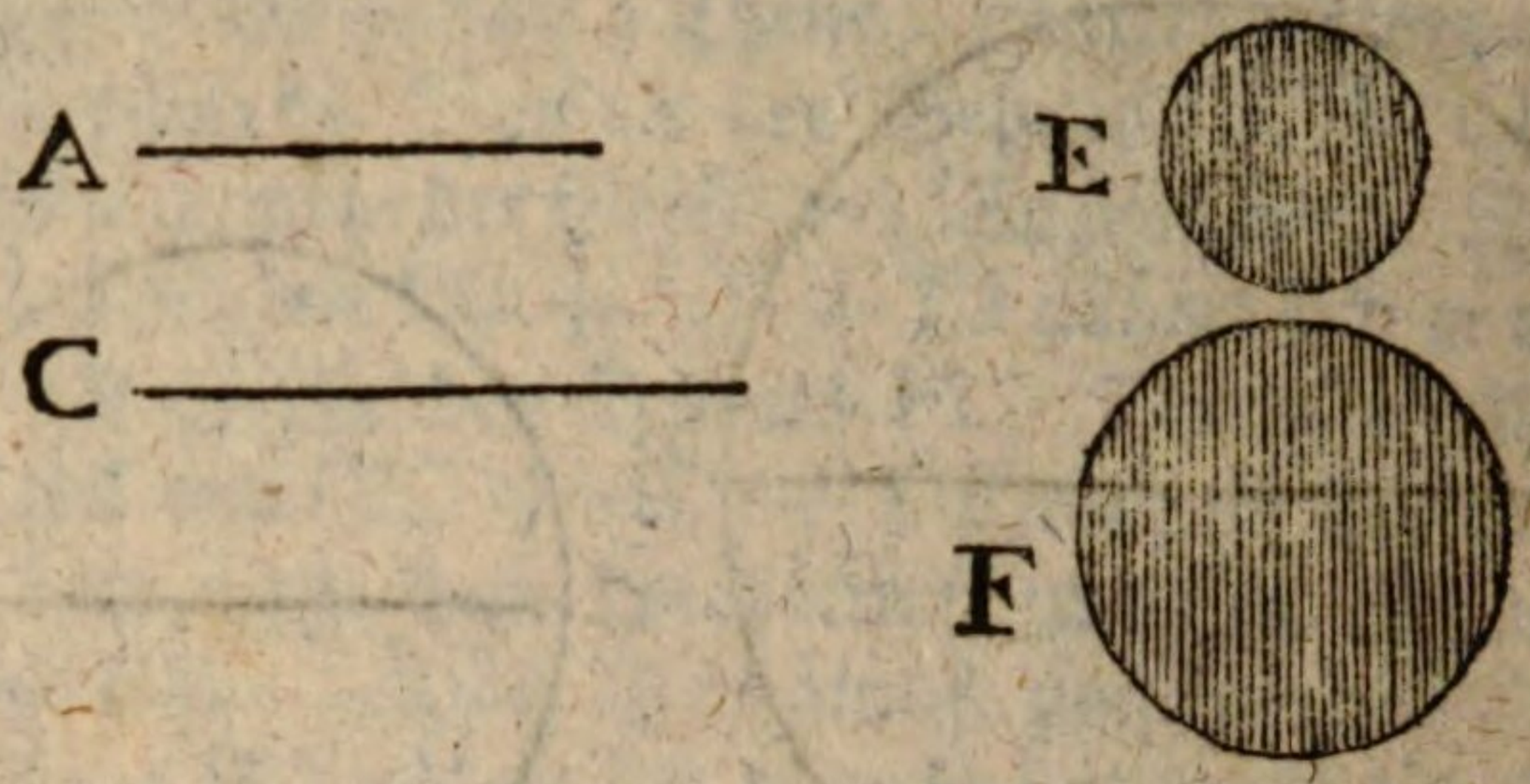
Gesetzt es werden in beyden Zirkeln ähnliche Vielecke beschrieben, so verhalten sich diese Vielecke wie die Quadrate der Durchmesser AB und *ab* (V §. 10.) Dieses Verhältniß bleibet unverändert, so viel man auch Seiten in beyden Vielecken annehmen mag. Man kann aber so viel Seiten annehmen, daß die Vielecke sich den Zirkeln ohne Ende nähern, und also sind die Zirkel die Gränzen der Vielecke.

Die Gränzen verhalten sich wie die wachsende Größen. (III §. 24) Also da die Zirkel die Gränzen der in ihnen beschriebenen ähnlichen Vielecke sind, so verhalten sich die Zirkel wie diese Vielecke, das ist, wie die Quadrate der Durchmesser.

Aufgabe.

§. 60.

Zwey Zirkel beschreiben, deren Umkreise sich wie zwey gegebene gerade Linien verhalten.



Auflösung. Gesetzt die Umkreise sollen sich verhalten wie A zu C. So nimm zwey Halbmesser die sich verhalten wie A zu C, und beschreibe damit die Kreise E und F.

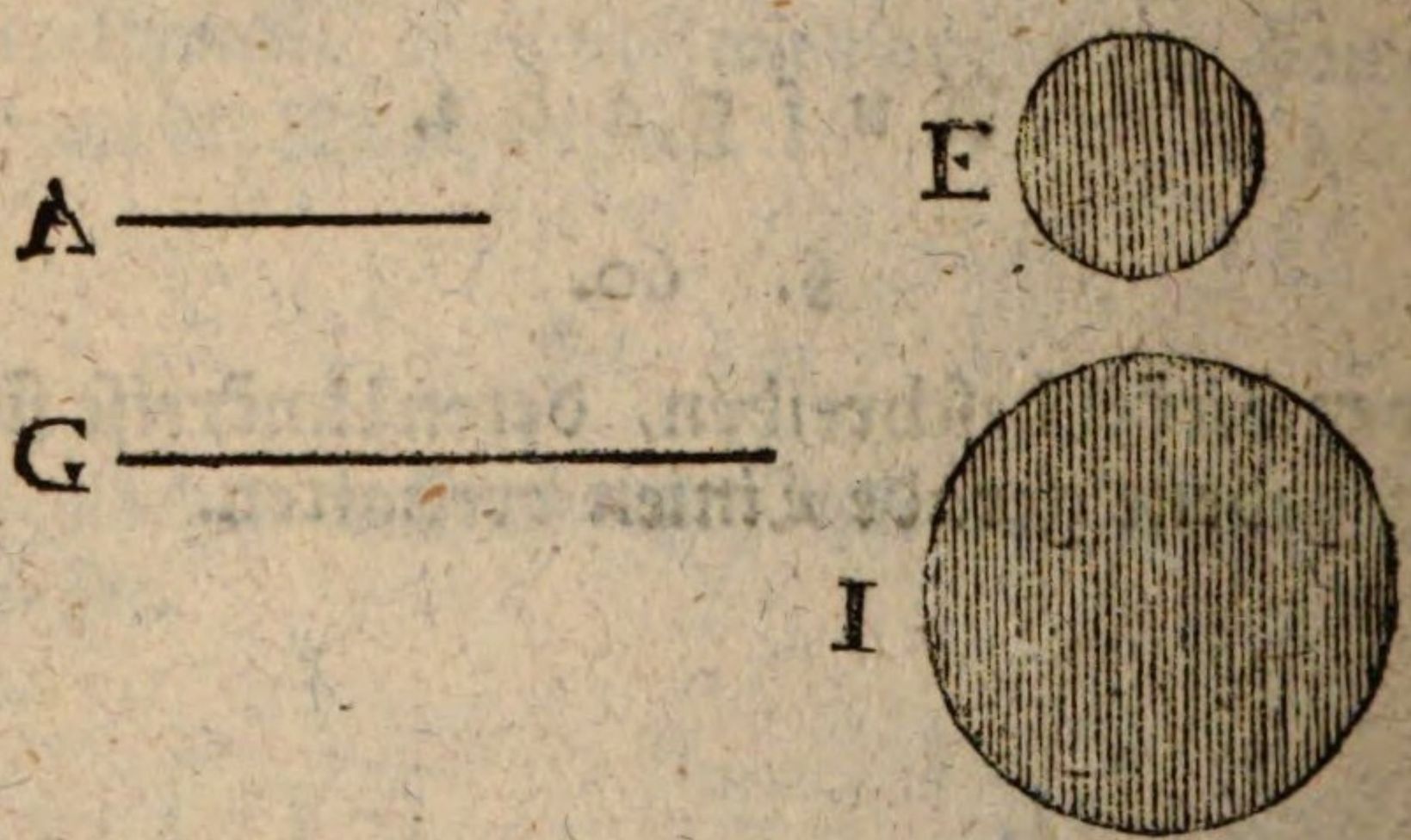
Da sich nun die Umkreise wie die Halbmesser verhalten (§. 58. Zusatz), so werden sich die Umkreise der Zirkel E und F verhalten wie A zu C.

Wäre der Halbmesser des Zirkels E gegeben, so müßte zu A, C und E die vierte Proporzional-Linie gesucht werden, um den Halbmesser des Zirkels F zu bekommen.

Aufgabe.

§. 61.

Zwey Zirkel beschreiben, deren Flächen sich wie zwey gerade Linien verhalten.



Auflösung. Gesetzt es sollen zwey Zirkel gemacht werden, deren Flächen sich verhalten wie *A* zu G.

Man

Man verfahre wie im V. Hauptstücke §. 16. bey Gelegenheit der geradlinichten Figuren gelehrt worden.

Nemlich zu A, G und dem Halbmesser des Zirkels E suche man die vierte Proporzional-Linie.

Zwischen dem Halbmesser des Zirkels E und der gefundenen Linie suche man wiederum die mittlere Proporzional-Linie.

So ist diese letzte der Halbmesser des Zirkels I.

Und dann verhält sich der Zirkel E zum Zirkel I wie A zu G.

Der Beweis wird wie bey andern ähnlichen Figuren, z. E. bey Dreyecken geführt. (IV H. §. 51.)

Zusatz. Durch die Rechnung wird die Auflösung noch kürzer. Es sey e der Halbmesser des Zirkels E, und i der gesuchte Halbmesser des Zirkels I. Alsdann ist (§. 59.)

$$E, I :: e^2, i^2$$

da nun seyn soll

$$E, I :: A, G,$$

so wird

$$A, G :: e^2, i^2.$$

Durch diese Proporzion wird i^2 gefunden. Ziehet man daraus die Quadratwurzel, so hat man den Halbmesser i.

§. 62.

Aufgabe.

Einen Zirkel machen, der der Summe oder Differenz zweyer gegebenen Zirkel gleich sey.

Auflösung. Man verfahre wie bey den Dreyecken (IV. §. 58. 59.) und anderen ähnlichen Figuren gelehret worden. Nur daß man hier die Halbmesser anstatt der homologen Seiten nehmen muß. Der Beweis ist auch allemal

einerley, und beruhet darauf, daß sich die Zirkelflächen wie die Quadrate der Halbmesser verhalten. (§. 59.)

§. 63.

Aufgabe.

Aus dem Durchmesser oder Halbmesser eines Zirkels seinen Umkreis berechnen.

Vorbereitung. Bisher ist kein Mittel bekannt um diese Aufgabe mit einer vollkommenen Genauigkeit aufzulösen. Auch muß man vermuthen, daß das Verhältniß zwischen dem Halbmesser oder Durchmesser und dem Umkreise ein surdes Verhältniß ist, oder daß beyde Größen inkommensurabel sind. Unterdessen kann man Näherungen finden, die im Gebrauche mehr als zulänglich sind.

Man nehme an, der Durchmesser sey = 1, so ist die Seite des Sechsecks = $\frac{1}{2}$. Aus der Seite des VIecks kann die Seite des XIIecks, aus dieser die Seite des XXIVecks, aus dieser die Seite des XLVIIIecks, aus dieser die Seite des XCVIecks, u. s. f. berechnet werden. Nemlich, aus der bekannten Seite eines Vielecks läßt sich die Seite eines Vielecks berechnen das im nemlichen Zirkel beschrieben ist, und doppelt so viel Seiten hat. (V. §. 31.)

Hat man die Seite eines regulären Vielecks, so darf man dieselbe nur mit der Anzahl der Seiten multiplizieren, um den Umfang zu bekommen.

Je mehr Seiten nun das Vieleck bekömmt, desto mehr nähert sich dessen Umfang dem Umkreise des umgeschriebenen Zirkels.

Woraus man siehet, daß man sich dem Umkreise des Zirkels so viel nähern kann als man will. Und wenn man zu einem Vielecke gekommen ist, welches viel tausend Seiten hat, so wird dessen Umfang gar wenig vom Umkreise des Zirkels verschieden seyn.

Ohngefähr auf solche Art haben verschiedene Geometer folgende Zahlen gefunden, welche sich mehr oder weniger

niger dem Verhältnisse des Durchmessers zum Umkreise nähern.

Archimedes fand:

wie 1 zu $3\frac{1}{7}$.
oder wie 7 zu 22.

Metius:

wie 1 zu $\frac{355}{113}$.
oder wie 113 zu 355.

Vieta:

wie 1 zu 3;1415926535.

Ludolph van Ceulen:

wie 1 zu 3;14159265358979323846264338327950:
50288.

Lagny:

wie 1 zu 3;14159265358979323846264338327950:
28841971693993751058209749445923:
07817406296208998628034825342117:
06798214808651327230664709384 46.

Dieses letzte Verhältniß ist so genau, daß in einem Zirkel der 100 Millionen mal größer wäre als die Entfernung der Erde von der Sonne, der Irrthum im Umkreise 100 Millionenmal kleiner seyn würde als die Dicke eines Haars. Mehr kann man wohl billig von einer bloßen Näherung nicht verlangen.

In den gewöhnlichen Fällen, wo es nicht auf eine gar zu große Genauigkeit ankömmt, gebrauchet man die kleineren von obigen Verhältnißzahlen, oder den Anfang der größeren. Nemlich man nimmt an, der Durchmesser verhalte sich zum Umkreise

wie 7 zu 22
oder wie 113 zu 355
oder wie 100 zu 314

Das zweyte dieser Verhältnisse, welches von Metius, einem niederländischen Geometer, herrühret, ist besonders merkwürdig, weil es in kleinen Zahlen das genaueste ist, da der Irrthum auf dem ganzen Umkreise kaum 1 Zehnmillionentheil beträgt.

Auflösung. Ist der Halbmesser gegeben, so verdoppele man ihn erstlich, um den Durchmesser zu bekommen. Hernach gebrauche man eine der angeführten Proporzionen, und sage, wie 7 zu 22, oder wie 113 zu 355, oder wie 100 zu 314, so verhält sich der gegebene Durchmesser zum Umkreise.

Es sey z. E. der Durchmesser eines Zirkels = 17 Zoll, so mache man folgende Regel Detri.

100 giebt 314
was .... 17?

2198
314

Antw. 53;38 der Umkreis.

Oder:

113 giebt 355
was .... 17?

2485
355

6035 : 113 = 53;39 Umkreis
5.6.5

385
33.9

460
33.9

1210
10.1.7

183

Oder:

Oder:

7 giebt 22
was ... 17?

154
22

374 : 7 = 53;42 Umkreis.
35

24
21

30
28

20
14

6

Man siehet hier drey verschiedene Werthe des Umkreises, welche im Grunde alle drey keine vollkommene Richtigkeit haben. Jedoch giebt Proporzion des Metius den Umkreis am genauesten. Wenn demnach der Durchmesser 17 Zoll hat, so hat der Umkreis nächstens 53;39 Zoll.

§. 64.

Aufgabe.

Es ist der Durchmesser oder Halbmesser eines Zirkels gegeben. Es soll die Länge eines Bogens von gewissen Graden, Minuten, u. s. f. berechnet werden.

Vorbereitung. Wenn der Durchmesser 1 ist, so ist der ganze Umkreis:

3;14159265358979323846264338 3

Nimmt man den Durchmesser = 2, oder den Halbmesser = 1 an, welches bey Berechnung der Bogen gewöhnli-

wöhnlicher ist, so wird die Zahl, welche den Umkreis ausdrücket, doppelt so groß, nemlich:

6;283185 307179 586476 925286766

Dividiret man nun diese Zahl durch 360 so bekömmt man den Bogen von einem Grade, dividiret man diesen ferner durch 60, so hat man den Bogen von einer Minute, dividiret man noch durch 60, so bekömmt man den Bogen von 1 Sekunde. Auf diese Art findet man, für den Halbmesser 1

1 Grad = 0;017453 292519 943295 769236908
1 Min. = 0;000290 888208 665721 596153948
1 Sek. = 0;000004 848136 811095 359935899
1 Terz. = 0;000000 080802 280184 922665599

Und so könnte diese Tafel weiter fortgesetzt werden, wenn man immer durch 60 dividirte.

Auflösung. Ist der Halbmesser = 1, so multiplizire man die Anzahl der Grade, Minuten, Sekunden, u. s. f. mit der Größe des Bogens von einem Grade, einer Minute, einer Sekunde, u. s. f. Man addire die Produkte. Z. E. es ist der Halbmesser = 1, und es wird die Größe eines Bogens von $73^g 9' 13''$ verlanget. Wir wollen bey der Rechnung nur 12 Dezimal-Ziffern gebrauchen.

1 Grad = 0;017453 292520
73 mult.

52359 87756
1 221730 4764

1;274090 353960 = 73^g.

1 Min. = 0;000290 888208
9 mult.

0;002617 993872 = $9'$

1 Sek.

1 Sek. = 0;000004 848136
13 mnlt.

14 544408
48 48136

0;000063 025768 = 13″
addire 0;002617 993872 = 9′
und 1;274090 353960 = 73ᵍ

Summe 1;276771 373530 = 73ᵍ 9′ 13″

Ist der Halbmesser nicht 1, sondern eine andere Zahl, so muß die gefundene Größe des Bogens mit solcher Zahl multiplizirt werden. Z. E: wäre der Halbmesser 17 Zoll, so müste die Zahl 1;276771 ....; noch mit 17 multiplizirt werden, um den Bogen in Zollen zu bekommen. Denn da die Bogen von gleich viel Graden sich verhalten wie die Halbmesser, so ist in diesem Falle

1 zu 17
wie 1;276 .....

zu 17 × (1;276 ...)

Man merke noch, daß durch das öftere Multipliziren die letzten Dezimal-Ziffern unsicher werden. Deswegen nehme man anfänglich einige mehr als man zuletzt behalten will, und wenn die Rechnung zu Ende ist, streiche man zwey, drey oder vier von den letzten Ziffern weg.

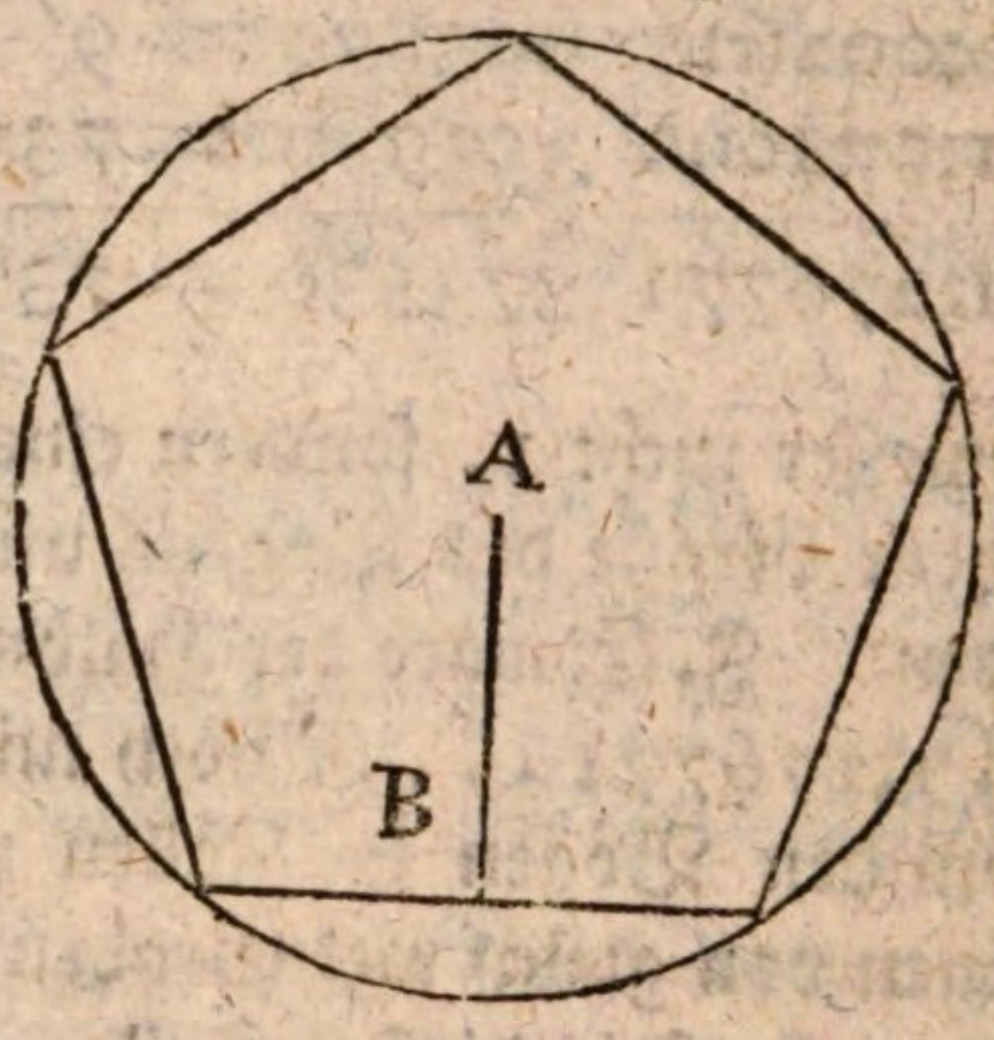
Ist nicht der Halbmesser, sondern der Durchmesser des Zirkels gegeben, so muß man diesen erstlich halbiren um den Halbmesser zu bekommen.

§. 65.

Aufgabe.

Aus dem gegebenen Durchmesser oder Halbmesser den Flächen-Inhalt des Zirkels berechnen.

Vorbereitung. Wenn man ein reguläres Vieleck berechnen will, so mißt man eine Seite desselben, als die Grundlinie eines der ähnlichgleichen Dreyecke woraus dasselbe bestehet. Diese Grundlinie wird mit der halben Höhe AB multipliziret, so bekömmt man die Fläche des



einen Dreyecks. Diese Fläche wird mit der Anzahl der Seiten multipliziret. So ist das Produkt die Größe des Flächen-Inhalts.

Es sey demnach x die Grundlinie des einen Dreyecks, y die Anzahl der Seiten, z die Höhe jedes Dreyecks, so ist die Fläche des Vielecks $= \frac{1}{2} xyz = xy \times \frac{1}{2} z$.

Es ist aber xy der Umfang des Vielecks, nemlich die Seite x so vielmal (y) genommen als Seiten sind. Wird also der ganze Umfang durch p ausgedrückt, so ist die Fläche des Vielecks $= p \times \frac{1}{2} z$, das ist, man erhält die Fläche, wenn man den Umfang p mit der Hälfte der senkrechten Linie z oder AB multipliziret.

Ist demnach E die Fläche des Vielecks, so hat man folgende Gleichung

$$E = p \times \tfrac{1}{2} z.$$

Gesetzt nun die Anzahl der Seiten nimmt immer mehr und mehr zu, so wachsen auch p, z und E. Bey diesen Umständen nähert sich p je mehr und mehr dem Umkreise des Zirkels, und z dem Halbmesser. Folglich nähert sich

das

das Produkt $p \times \frac{1}{2}z$ je mehr und mehr dem Produkte aus dem Umkreise und dem halben Halbmesser. Zugleich nähert sich E je mehr und mehr der Zirkelfläche.

In jeder Gleichung zwischen veränderlichen Größen kann man anstatt derselben ihre Gränzen setzen (II. §. 24). Es sey also π der Umkreis des Zirkels, γ der Halbmesser, ε die Zirkelfläche, so ist

$$\varepsilon = \pi \times \tfrac{1}{2}\gamma$$

oder $$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\gamma\pi.$$

Woraus man siehet, daß man die Zirkelfläche erhält, wenn man den Umkreis π mit dem Halbmesser γ multiplizirt, und das Produkt halbiret, oder wenn man den Umkreis π mit der Hälfte des Halbmessers γ multiplizirt.

Die Hälfte des Halbmessers ist $\frac{1}{4}$ des Durchmessers. Ist also der Durchmesser $= \delta$, so wird

$$\varepsilon = \tfrac{1}{4}\delta\pi$$

oder $$\varepsilon = \frac{\delta\pi}{4}$$

Nun haben wir gesehen, daß wenn δ oder der Durchmesser $= 1$, der Umkreis π alsdann sey

3; 141592 653589 793238 462643383.

Weil $\delta = 1$, so ist $\delta\pi$ die nemliche Zahl. Dividiret man durch 4, so kömmt

0; 785398 163397 448309 615660846.

und diese Zahl drückt die Zirkelfläche in einem Quadratmaaße aus, was das Quadrat des Diameters zur Einheit hat. Denn da der Durchmesser $= 1$, so ist dessen Quadrat auch $= 1$.

Also verhält sich das Quadrat des Diameters zur Zirkelfläche nächstens

wie 1 zu 0; 785398 . . . . .

oder, wenn man sich mit wenigen Ziffern begnügen will,

wie 1 zu 0; 7854

oder wie 10000 zu 7854.

Auflösung. Man quadrire den gegebenen Durchmesser, und sage: wie 10000 zu 7854, so verhält sich nächstens das Quadrat des Durchmessers zur Zirkelfläche.

Es sey z. E. der Durchmesser eines Zirkels = 17.

17 Durchmesser
17

119
17
---
289 Quadrat des Durchmessers.

Wie 10000 zu 7854
so 289

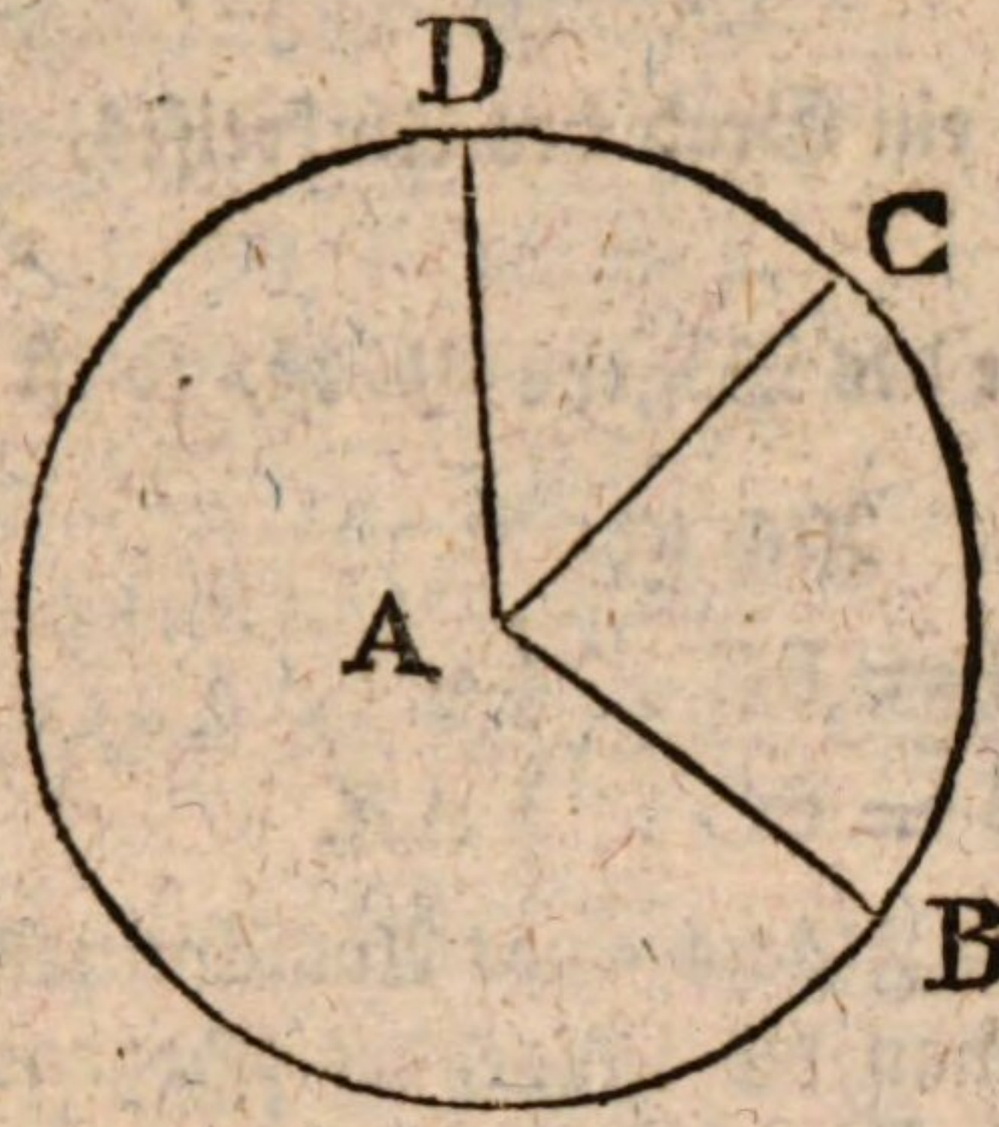
70686
62832
15708
---
zu 226;9806 Zirkelfläche.

Ist der Halbmesser gegeben, so muß man ihn erst doppelt nehmen, um den Durchmesser zu bekommen.

§. 66.

Aufgabe.

Die Fläche eines Ausschnitts vom Zirkel berechnen, wenn die Grade des Bogens sammt dem Halbmesser des Zirkels bekannt sind.



Vorbereitung. Wenn eine gerade Linie AB sich um ihr Ende A mit einer gleichförmigen Bewegung umwendet, so läßt sich leicht begreifen, daß sie in gleichen Zeiten gleiche Bogen, und auch gleiche Ausschnitte beschreibet. Also verhalten sich die Bogen BC und BD wie die Zeiten, eben so verhalten sich auch die Ausschnitte BAC und BAD wie die Zeiten. Also verhalten sich die Ausschnitte BAC, BAD wie die Bogen BC, BD.

Ist nun die ganze Umwendung vollendet, so wird der Bogen BD zum Umkreise, und der Ausschnitt BAD zur Zirkelfläche.

Also verhält sich ein Ausschnitt BAC zur Zirkelfläche wie der Bogen BC zum Umkreise.

Es sey demnach der Bogen BC von n Graden, so verhält sich der Ausschnitt BCAB zum ganzen Zirkel wie n Grade zu 360 Graden.

Es sey der Umkreis π, und der Halbmesser γ, so ist die Zirkelfläche $= \frac{1}{2}\gamma\pi$. Also ist

BCAB, $\frac{1}{2}\gamma\pi :: n$, 360

oder 360, $n :: \frac{1}{2}\gamma\pi$, BCAB.

Daher ist $BCAB = \frac{\frac{1}{2}\gamma\pi \cdot n}{360}$

oder $BCAB = \frac{\pi}{360} \times n \times \frac{1}{2}\gamma$.

Nun ist $\frac{\pi}{360}$ ein Grad des Umkreises, und da n die Anzahl der Grade des Bogens BC ist, so ist $\frac{\pi}{360} \times n$ der Bogen BC selbst. Also ist

$$BCAB = BC \times \tfrac{1}{2}\gamma$$

oder $$BCAB = BC \times \tfrac{1}{2} AB.$$

Das heißt die Fläche eines Ausschnittes BCAB wird erhalten, wenn man die Länge des Bogens BC mit der Hälfte des Halbmessers AB multipliziret.

Auflösung. Weil die Grade des Bogens BC gegeben sind, so berechne man diesen Bogen erstlich für den Halbmesser 1. Was herauskömmt multiplizire man mit dem gegebenen Halbmesser, so bekömmt man den Bogen BC für diesen Halbmesser. Diesen Bogen multiplizire man wiederum mit der Hälfte des gegebenen Halbmessers, so bekömmt man die Fläche des Ausschnittes.

Wenn also der Bogen BC für den Halbmesser 1, $= b$, so ist er für den Halbmesser AB, $= b \times AB$. Multipliziret man nun wiederum mit $\frac{1}{2}$ AB, so kömmt $\frac{1}{2} b \times AB^2$, welches noch bequemer ist. Denn man darf nur die Hälfte des Bogens BC für den Halbmesser 1 suchen, und dann mit dem Quadrate des gegebenen Halbmessers AB multipliziren.

Es sey der Bogen BC $=$ 73°9'13", so ist seine Länge für den Halbmesser 1 gefunden worden

1; 276771 373530

die Hälfte ist 0; 638385 686765

Es sey der Halbmesser AB $=$ 17, so ist $AB^2 = 289$, womit multipliziret werden muß.

0;638385 686765
289

5 745471 180885
51 070844 94120
127 677137 3530

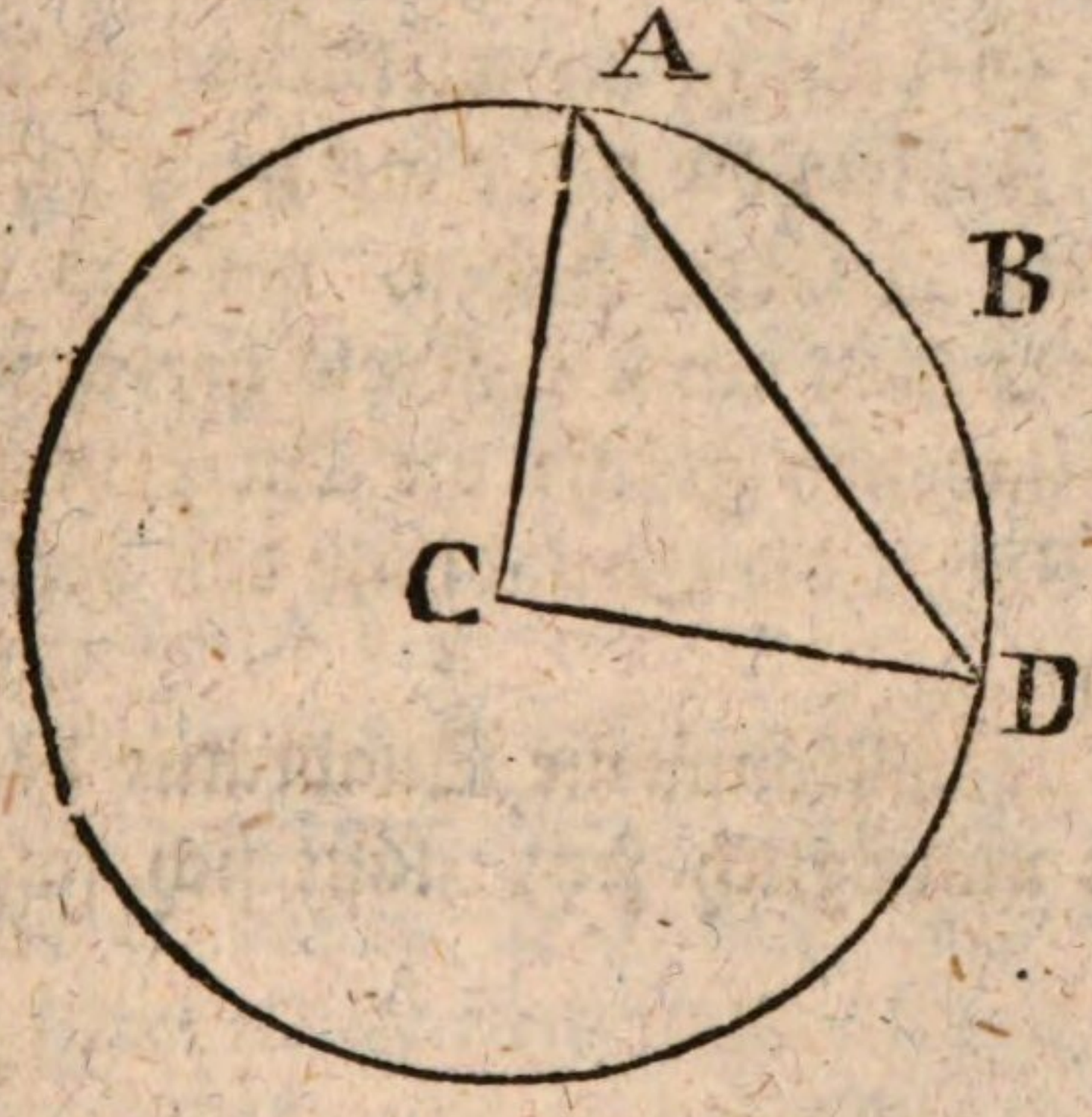
184;493453 475085

oder beynahe $BACB = 184;5 = 184\frac{1}{2}$.

§. 67.

Aufgabe.

Es sind ein Bogen, dessen Sehne und der Halbmesser des Zirkels gegeben. Es soll der Abschnitt berechnet werden, der zwischen dem Bogen und der Sehne enthalten ist.



Auflösung. Vermittelst des gegebenen Bogens ABD und des Halbmessers AC berechne erstlich den Ausschnitt ABDCA (§. 66.).

Vermittelst der gegebenen Sehne AD und des Halbmessers AC = CD berechne das Dreyeck ACD (IV. §. 79.).

Subtrahire die Fläche des Dreyecks ACD von der Fläche des Ausschnittes ABDCA, so bleibet die Fläche des Abschnittes ABDA.

§. 68.

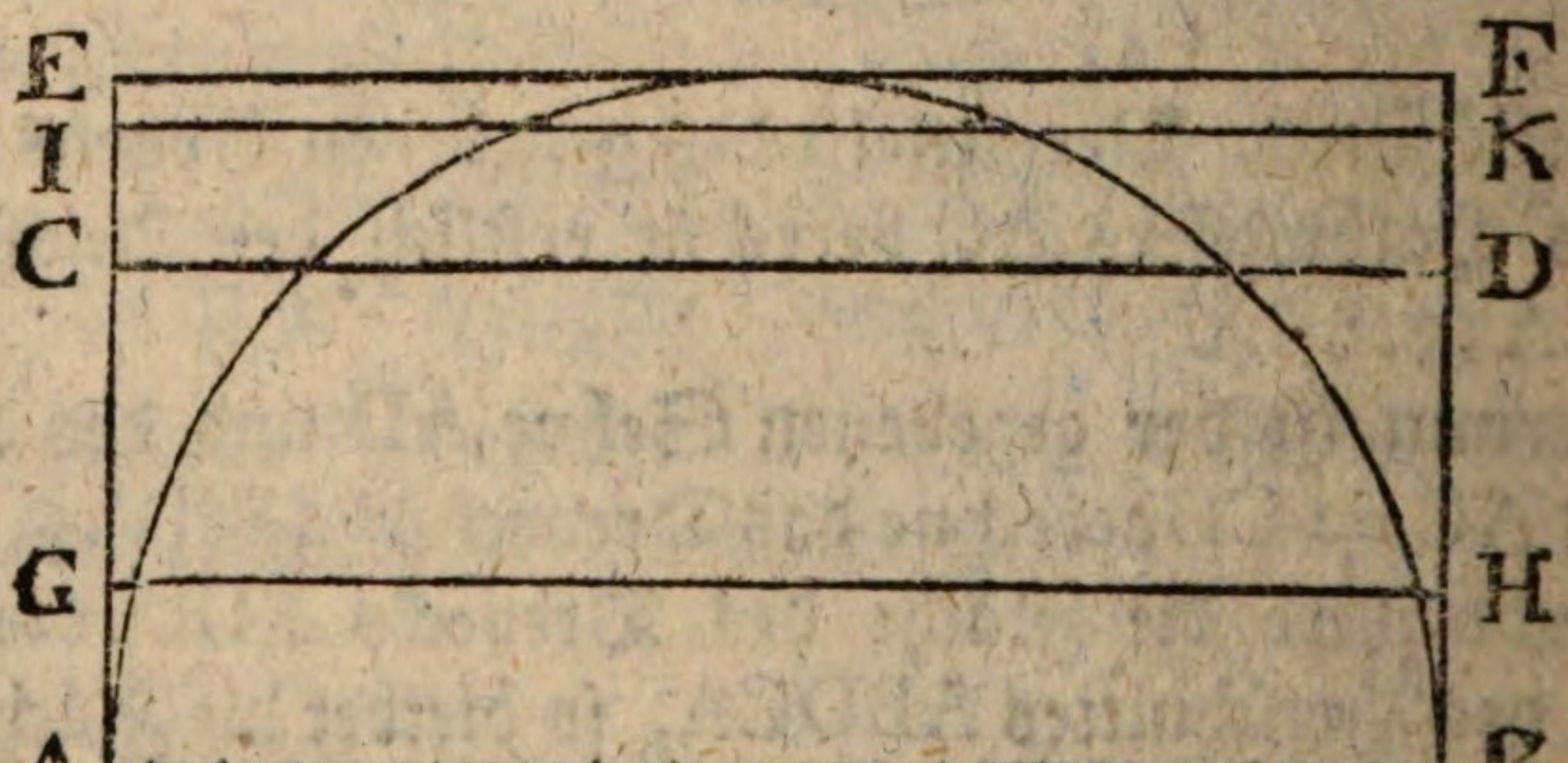
Bevor wir dieses Hauptstück vom Zirkel beschließen, können wir nicht umhin, noch einige Worte von der berühmten Quadratur des Zirkels zu sagen.

Die Aufgabe ist eigentlich folgende: Es wird ein Quadrat oder überhaupt eine geradlinichte Figur verlanget, deren Fläche der Fläche eines gegebenen Kreises gleich sey, und solche Gleichheit muß aufs strengste bewiesen werden können.

Mit dieser Aufgabe haben sich verschiedene Männer beschäftigt, seitdem es Geometer in der Welt giebt, das heißt, wenigstens seit drittehalb tausend Jahren. Bisher ist aber die genaue Auflösung noch keinem gelungen, und die geschiktesten Mathematiker haben gar aufgehöret, sich damit abzugeben, um nicht eine Zeit dabey zu verlieren, welche nützlicher angewendet werden kann.

Denn zum Gebrauche in wirklichen Fällen hat man Näherungen in Zahlen, die mehr als zureichend sind. Will man demnach ein Quadrat haben, welches einem Kreise gleich sey, so darf man nur den Kreis berechnen (§. 65.), und aus der gefundenen Fläche die Quadratwurzel ziehen, so giebt diese Wurzel die Grundlinie des verlangten Quadrats (IV. §. 76.).

Daß aber die vollkommene Quadratur des Zirkels an sich selbst nicht unmöglich sey, läßt sich folgendermaßen begreifen.



Auf

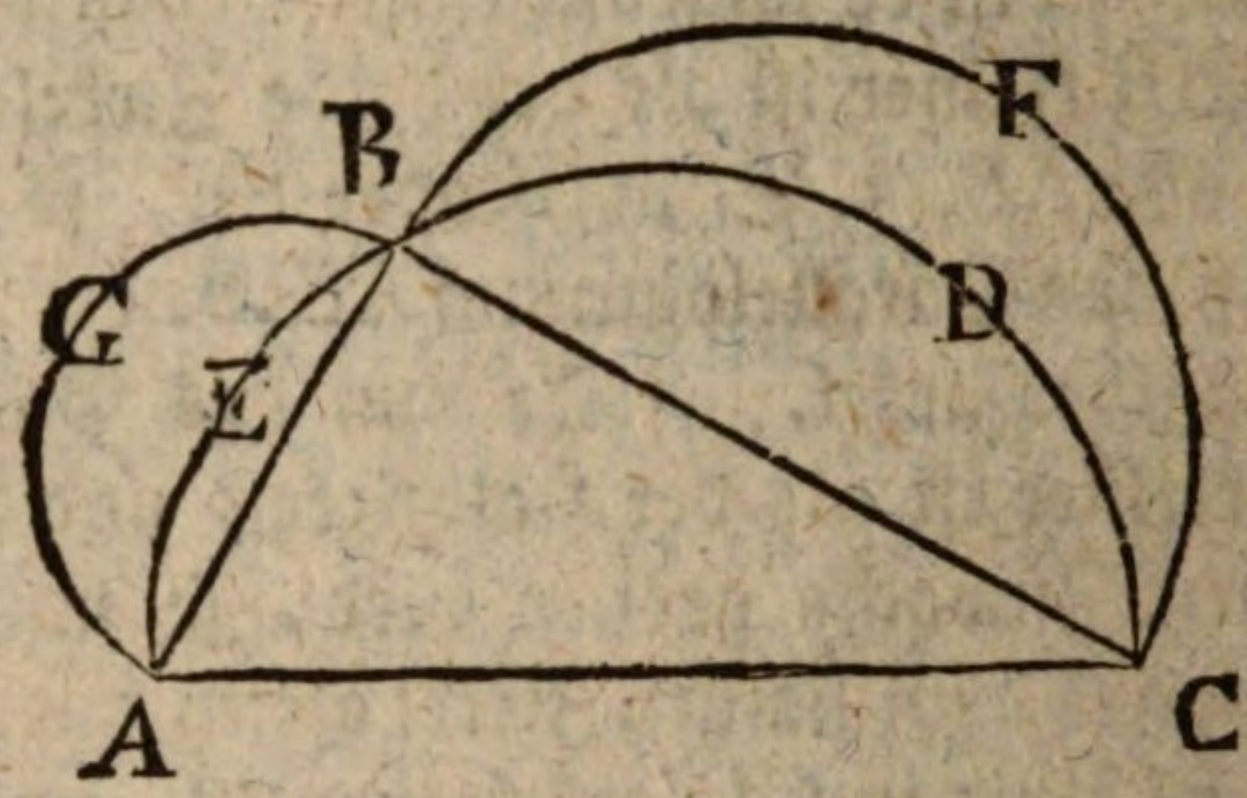
Auf dem Durchmesser AB sey ein halber Zirkel beschrieben, und es seyen AE, BF senkrecht auf AB. Eine gerade Linie liege anfänglich auf AB, und entferne sich mit einer stetigen Bewegung von AB, indem sie sich selbst parallel bleibet. Ist die bewegliche Linie der AB noch sehr nahe, z. E. in GH, so ist es augenscheinlich, daß das Parallelogramm AGHB kleiner ist als der halbe Zirkel. Ist sie schon etwas weit von AB, z. E. in IK oder EF, so ist wiederum sichtbar, daß das Parallelogramm AIKB oder AEFB größer ist als der halbe Zirkel. Da nun das Parallelogramm anfänglich kleiner ist als der Halbzirkel, und hernach durch einen stetigen Zuwachs größer wird, so muß ein Augenblick seyn, wo es dem halben Zirkel gleich wird, z. E. wenn die bewegliche Linie in CD gekommen ist, und das Parallelogramm ACDB bildet. Es käme also darauf an, die Höhe AC oder DB dieses Parallelogramms zu bestimmen, welches dem halben Zirkel gleich ist. Nähme man es doppelt und verwandelte es in ein Quadrat, so wäre das Quadrat der Zirkelfläche gleich. Es scheinet aber, daß in der Geometrie bisher noch die Lehrsätze fehlen, wodurch die AC oder BD bestimmet werden könnte. Da aber die geschicktesten Geometer diese Lehrsätze nicht haben entdecken können, so ist es lächerlich, wenn Leute, die kaum die ersten Gründe der Geometrie besitzen, sich mit der Quadratur des Zirkels abgeben wollen. Was sie dazu reizet, ist oft die Meinung, worin sie stehen, daß auf diese Entdeckung große Preise ausgesetzt sind. Es ist mir aber gar kein solcher Preis bekannt, und der Entdecker müßte sich bloß mit dem Ruhme begnügen, den ihm seine Erfindung zu Wege bringen würde.

§. 69.

Es möchte dennoch einem Anfänger scheinen, die Quadratur des Zirkels sey platterdings unmöglich, und es sey gar nicht einzusehen, wie so verschiedene Dinge, als geradlinichte und krummlinichte Figuren, einander gleich seyn können.

Die

Die Erfahrung ist aber einer solchen Vermuthung zuwider, da es in der Geometrie wirklich einige Fälle giebt, wo ein krummlinichter Raum quadriret, oder in einen geradlinichten verwandelt werden kann. Wir wollen nur ein Beyspiel anführen.



Es sey AC der Durchmesser des halben Zirkels AEBDC. Nimm im Umkreise einen beliebigen Punkt B. Ziehe AB und CB. So ist ABC ein rechtwinkliches Dreyeck. Ueber BC und AB beschreibe die halben Zirkel BFC und BGA. So ist die halbe Zirkelfläche auf der Hypotenuse gleich den halben Zirkelflächen auf den Katheten (§. 62.), oder es ist

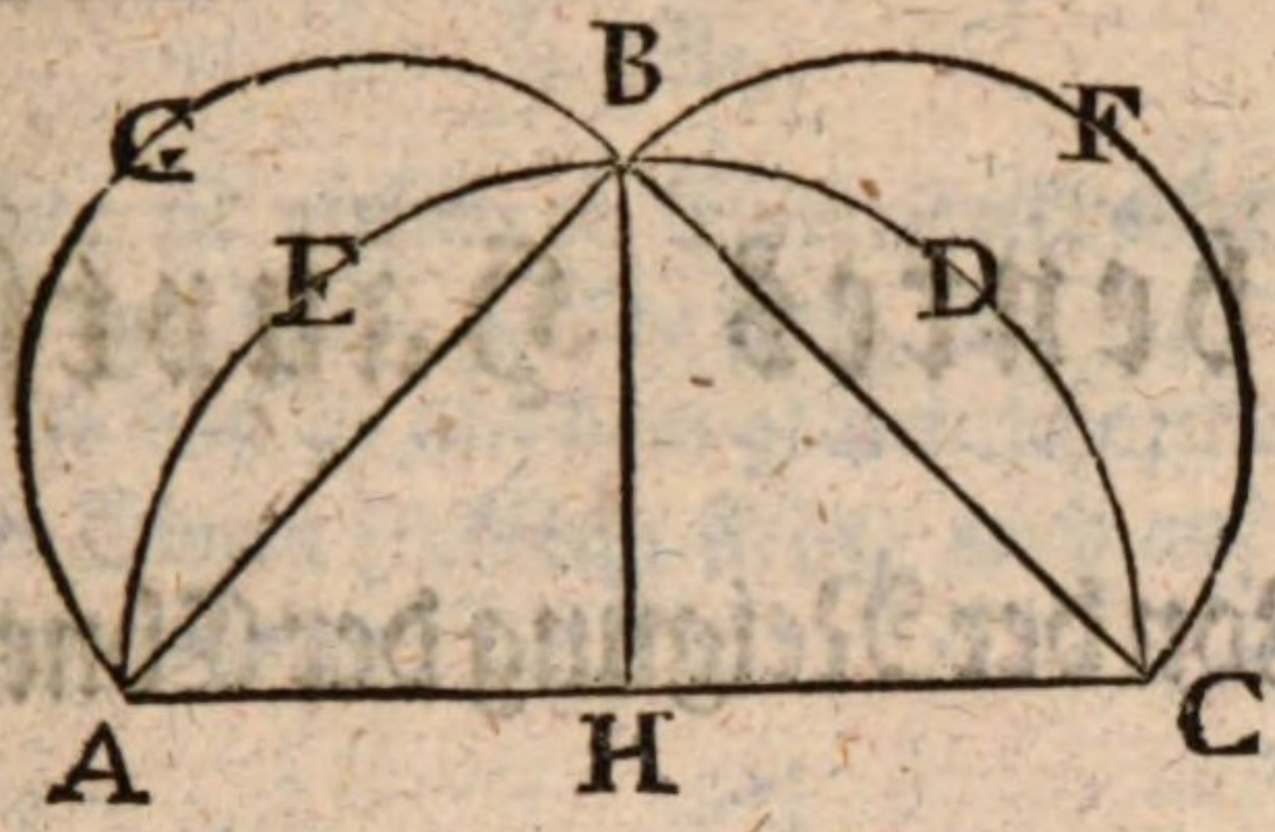
$$AEBDCA = BFCB + AGBA$$

nimm beyderseits ab die Stücke AEBA und BDCB, so bleibet

$$\triangle ABC = BFCDB + AGBEA.$$

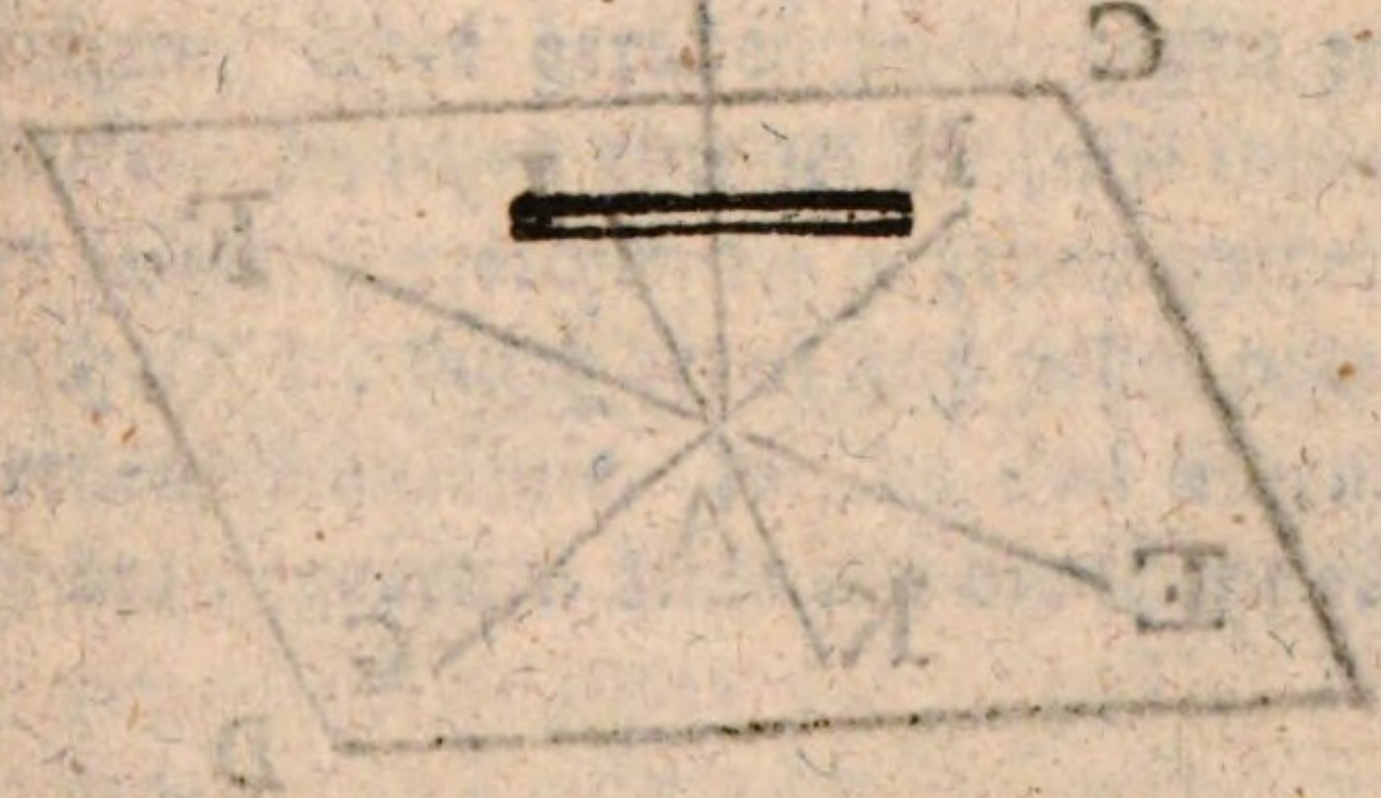
Das heißt, die beyden Mondstücke BFCDB und AEBEA sind zusammen dem Dreyecke ABCA gleich. Nimmt man den Punkt B in der Mitte des halben Umkreises

und



und ziehet BH senkrecht auf AC, so wird das Mondstück BFCDB dem Dreyecke BHC gleich. Denn in diesem Falle ist △BHC = △BHA, und die beyden Mondstücke sind gleich. Da nun ihre Summe dem ganzen Dreyecke ABC gleich ist, so ist die halbe Summe dem halben Dreyecke gleich, oder ein einzelnes Mondstück BFCDB ist der Hälfte BHC des Dreyecks ABC gleich.

Hier sieht man also unwidersprechlich, daß eine krummlinichte Figur einer geradlinichten gleich seyn kann. Diese Eigenschaft der Mondstücke oder **Lunuln**, ist am ersten von dem Geometer Hippokrates (aus der Insel Chio gebürtig) bemerkt worden, deswegen nennt man sie auch die **Hippokratischen Lunuln**. Dieser Gelehrte suchte vermuthlich schon dazumal die Quadratur des Zirkels, da er auf seine Lunuln verfiel, die ihn aber nicht zu seinem Zwecke führten.



Siebentes Hauptstück.

Von der Neigung der Ebnen.

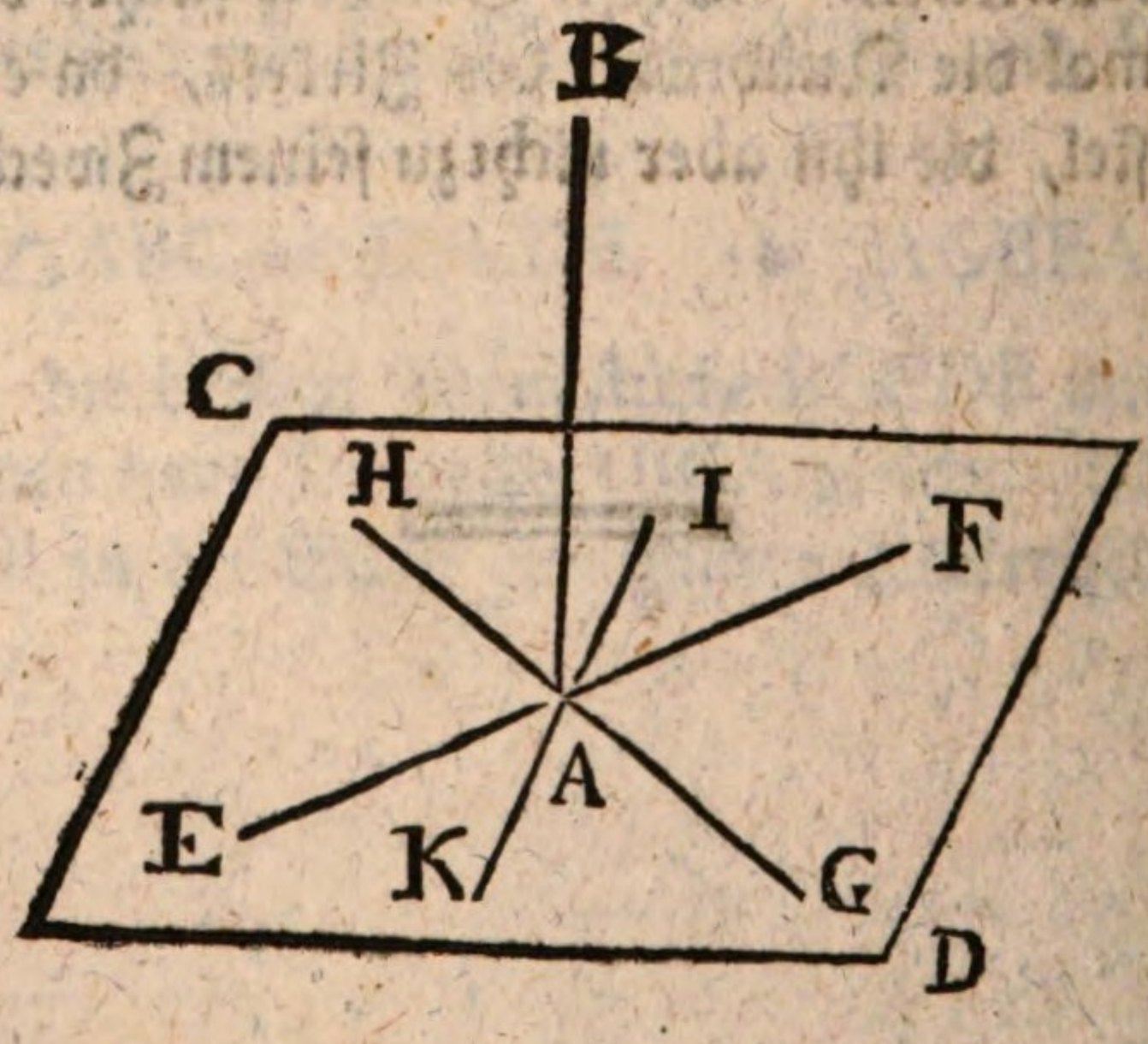
§. 1.

Der Fuß einer geraden Linie, ist der Punkt, wo die gerade Linie eine Fläche erreichet.

§. 2.

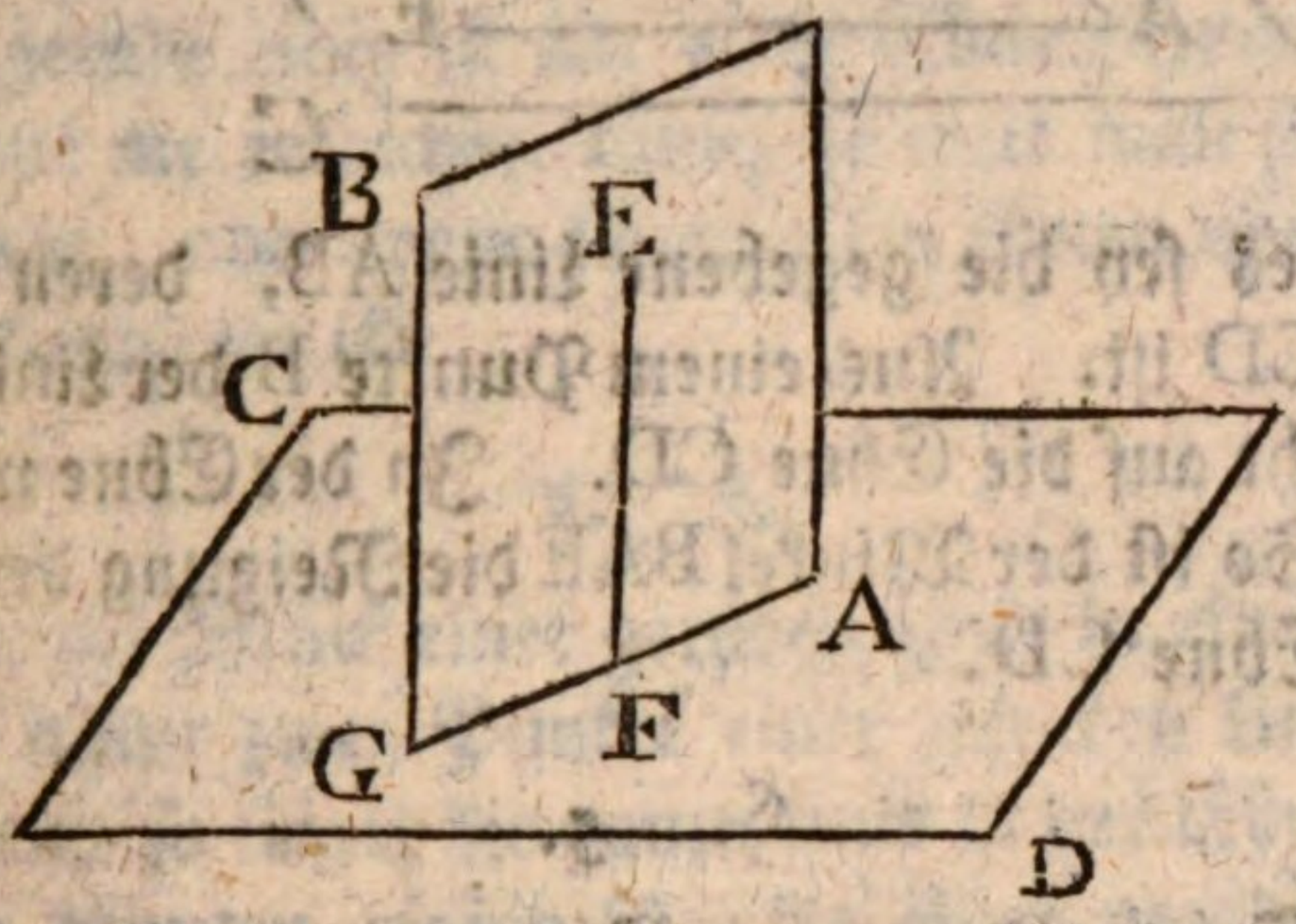
Eine gerade Linie ist auf einer Ebne senkrecht oder perpendikular, wenn sie perpendikular ist auf allen geraden Linien, die durch ihren Fuß in der Ebne gezogen werden können.

Z. E. AB ist perpendikular auf der Ebne CD, wenn sie perpendikular ist auf EF, GH, IK, die in der Ebne CD gezogen sind.



§. 3.

Eine Ebne ist auf einer Ebne senkrecht oder perpendikular, wenn jede gerade Linie, die man in der einen Ebne ziehet, so daß sie auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitte beyder Ebnen senkrecht stehe, auch auf der anderen Ebne senkrecht stehet.

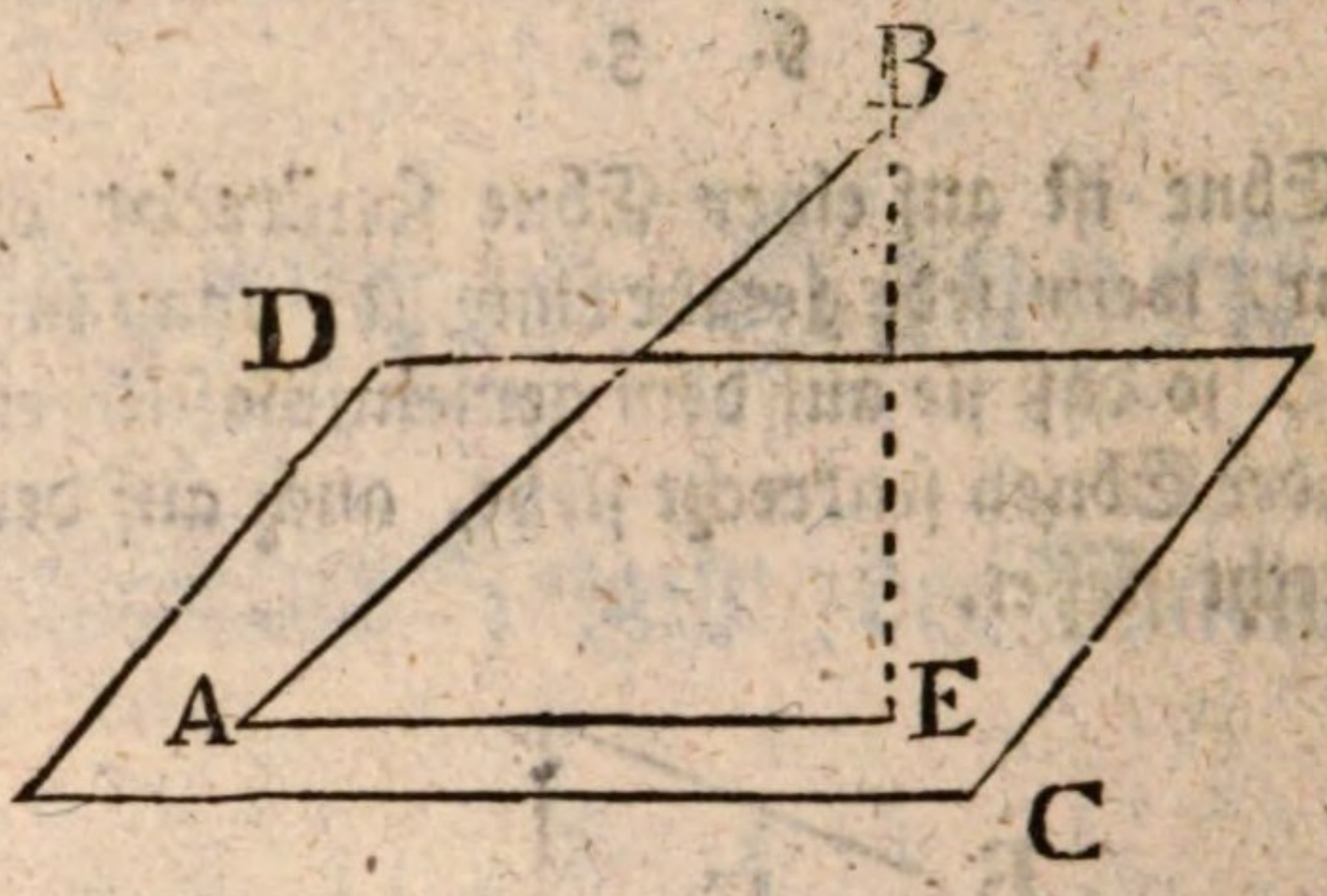


Z. E. es sey AG der gemeinschaftliche Durchschnitt der Ebnen CD und AB. In der Ebne AB sey die gerade Linie EF perpendikular auf AG. Ist nun EF auch perpendikular auf der Ebne CD, das ist, auf allen geraden Linien, die durch F in der Ebne CD gezogen werden können, so saget man, die Ebne AB sey senkrecht auf der Ebne CD.

§. 4.

Die Neigung einer geraden Linie gegen einer Ebne, oder der Winkel, welchen eine gerade Linie mit einer Ebne macht, ist der Winkel, welchen die gegebene mit einer andern Geraden machet, die durch deren Fuß gehet und durch den Fuß der Perpendikularlinie, welche von einem willkürlichen Punkte der gegebenen Linie auf die Ebne fällt.

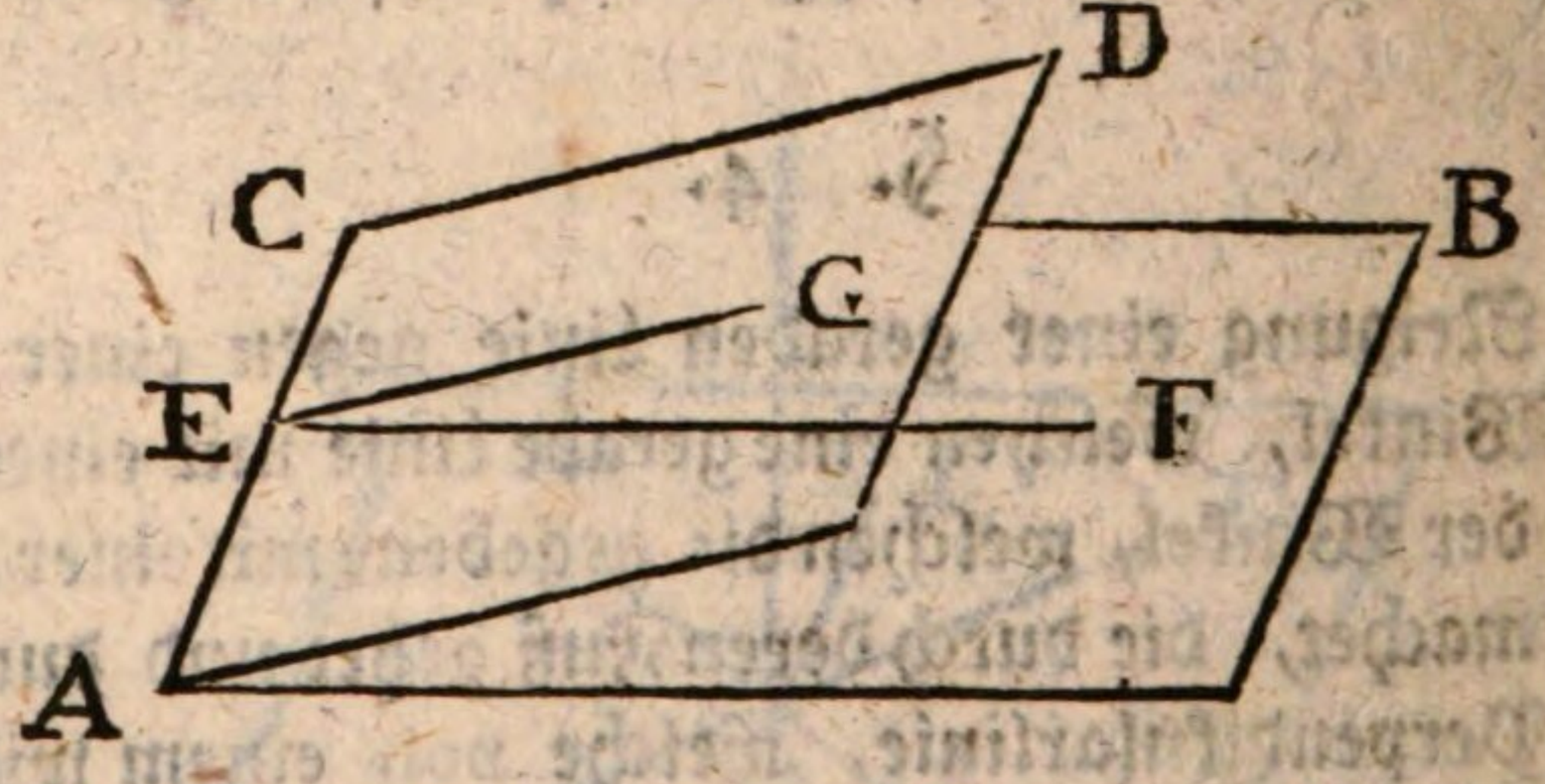
(Siehe die folgende Figur.)



Z. E. es sey die gegebene Linie AB, deren Fuß A in der Ebne CD ist. Aus einem Punkte B der Linie AB falle BE senkrecht auf die Ebne CD. In der Ebne werde gezogen AE. So ist der Winkel BAE die Neigung der Linie AB gegen die Ebne CD.

§. 5.

Die Neigung zweyer Ebnen gegen einander, oder der Winkel, den sie machen, ist der Winkel, welcher entstehet, wenn man aus einem willkürlichen Punkte des Durchschnittes auf jeder Ebne eine gerade Linie ziehet, die auf der Durchschnittslinie perpendikular sey.



Z. E. es sey AC der Durchschnitt der Ebnen AD und AB. In der Ebne AB sey gezogen EF perpendikular auf AC. In der Ebne AD sey gezogen EG ebenfalls perpendikular auf AC. So ist GEF die Neigung oder der Winkel beyder Ebnen AB und AD.

§. 6.

§. 6.

Zwey Ebnen sind parallel, wenn sie einander nie begegnen können, so weit man sie auch beyderseits ausdehnen mag, oder wenn sie an allen Orten in gleicher Entfernung von einander sind.

§. 7.

Eine gerade Linie ist mit einer Ebne parallel, wenn sie die Ebne nie erreichen kann, so weit man sie auch verlängern mag, oder wenn sie an allen Orten von der Ebne gleich weit entfernt ist.

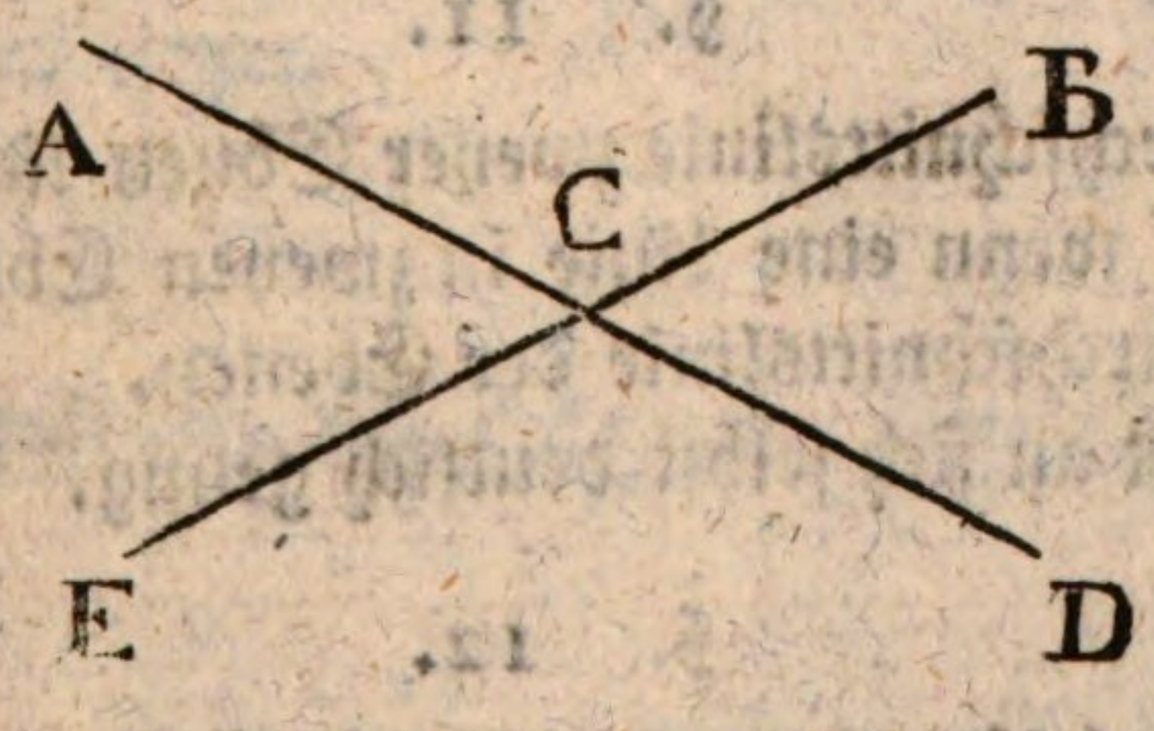
§. 8.

Wenn ein Stück einer geraden Linie in einer Ebne lieget, oder wenn zwey Punkte einer geraden Linie in einer Ebne liegen, so lieget die ganze Linie in der Ebne.

Denn könnten einige Punkte einer geraden Linie in der Ebne, andere aber außer derselben liegen, so wäre die Ebne nicht eine Ebne (1§. 9), welches widersprechend ist.

§. 9.

Zwey gerade Linien, die einander schneiden, liegen in derselben Ebne, oder man kann sich eine Ebne vorstellen, worin sie beyde liegen.

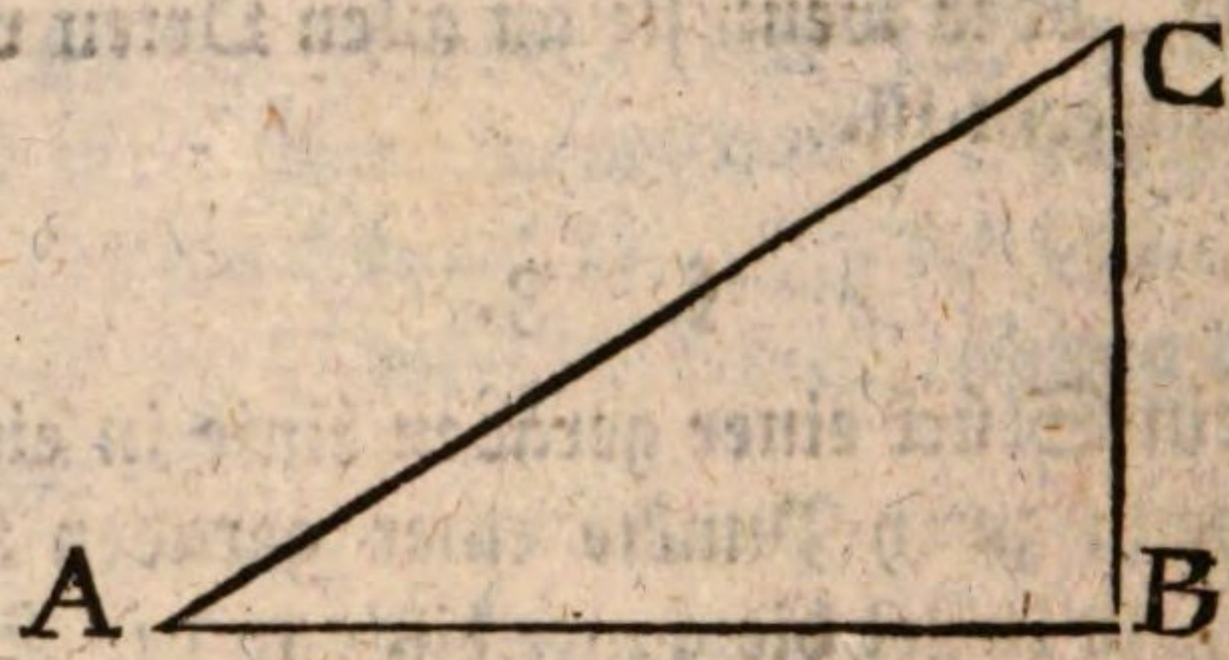


Unter allen möglichen Ebnen, in denen die gerade Linie EB liegen kann, sey eine Ebne, die zugleich durch den Punkt D gehet. Da nun die Punkte C und D in der

Ebne liegen, so lieget auch die ganze gerade Linie DCA darin (§. 8). Also liegen beyde Linien EB und DA in derselben Ebne.

§. 10.

Jedes Dreyeck liegt in einer Ebne, oder man kann sich allemal eine Ebne vorstellen, worin sowohl die drey Punkte als auch die drey Seiten und die Fläche des Dreyecks liegen.



Unter allen möglichen Ebnen, worin die gerade Linie AB liegen kann, sey eine Ebne, die zugleich durch den Punkt C gehet. Da also die Punkte A und C, B und C in der Ebne liegen, so liegen auch die Linien AC und BC darin, und die Fläche des Dreyecks ABC ist ein Theil gedachter unbestimmter Ebne.

Zusatz. Drey Punkte bestimmen also völlig die Lage einer Ebne.

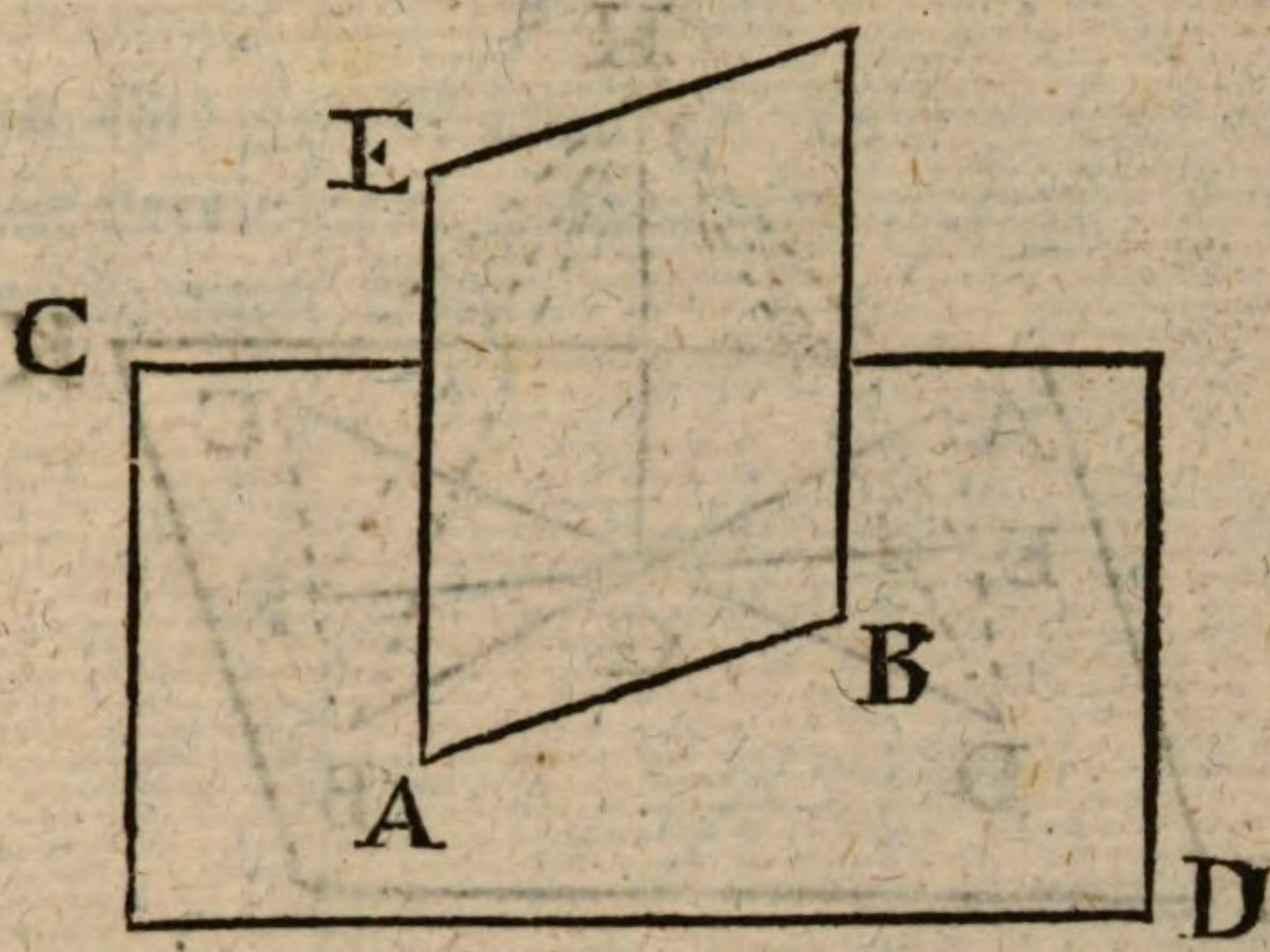
§. 11.

Die Durchschnittslinie zweyer Ebnen lieget in beyden Ebnen, und wenn eine Linie in zweyen Ebnen lieget, so ist sie die Durchschnittslinie der Ebenen.

Dieses ist an sich selbst deutlich genug.

§. 12.

Der Durchschnitt zweyer Ebnen ist allemal eine gerade Linie.

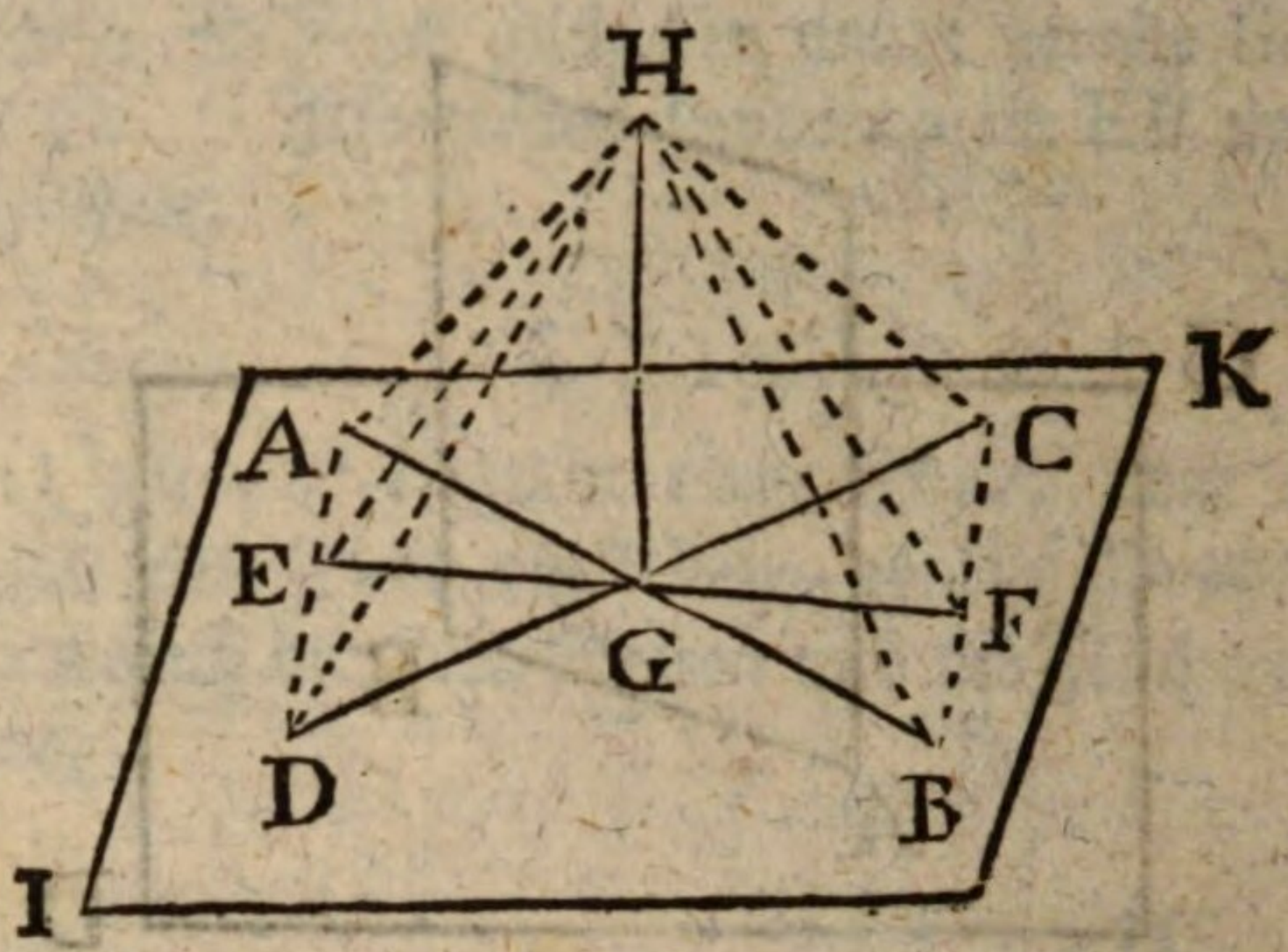


Gesetzt die Ebnen CD und EB schneiden einander in AB. Ziehe von A zu B eine gerade Linie AB. Weil A und B in der Ebne CD liegen, so lieget die gerade Linie AB in derselben Ebne CD (§. 8). Weil die Punkte A und B auch in der Ebne EB liegen, so lieget die gerade Linie AB zugleich in der Ebne EB. Also ist die gerade AB die Durchschnittslinie beyder Ebnen (§. 11).

§. 13.

Wenn eine gerade Linie auf zwey geraden Linien senkrecht stehet, die in einer Ebne liegen, so ist die erste Linie auch auf der Ebne senkrecht, das heißt, sie ist auf jeder andern geraden Linie senkrecht, die durch ihren Fuß gehet, und in derselben Ebne lieget.

(Siehe die folgende Figur.)



Gesetzt es stehet HG perpendikular sowohl auf AB als auch auf CD, die in der Ebne IK liegen. Mache GB = GA, GC = GD. Ziehe AD, CB. So ist △CGB ≅ △DGA, weil die Wechselwinkel in G gleich sind, und GC = GD, GA = GB. Also ist ∠C = ∠D, ∠B = ∠A.

Ziehe durch den Punkt G irgend eine andere gerade Linie EF in der nemlichen Ebne, so ist △DGE ≅ △CGF, weil die Wechselwinkel in G gleich sind, desgleichen ∠D = ∠C, und GD = GC. Also ist GF = GE, FC = ED.

In den Dreyecken HGA und HGB ist der Winkel in G beyderseits ein rechter, GH = GH und GB = GA, folglich auch HB = HA. Und eben so wird bewiesen, daß in den Dreyecken HGC und HGD, HC = HD.

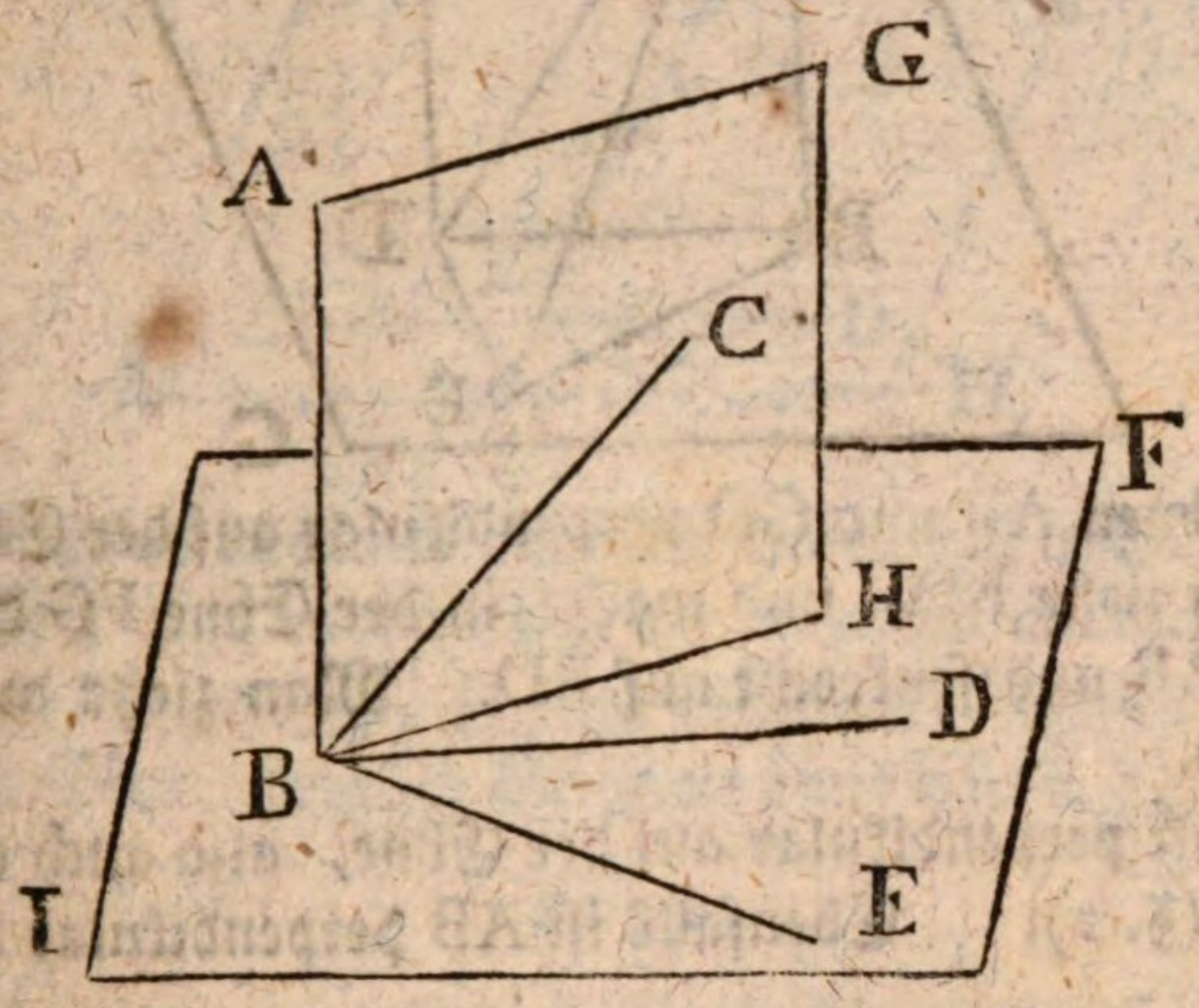
Da nun HB = HA, HC = HD, und CB = DA, so ist auch in den Dreyecken HBC und HAD, ∠D = ∠C.

In den Dreyecken HCF und HDE ist also FC = DE, HC = HD und ∠C = ∠D. Folglich ist HF = HE.

In den Dreyecken HGF und HGE ist HG = HG, GF = GE, HF = HE. Folglich ∠HGF = ∠HGE. Da nun diese beyde Nebenwinkel gleich sind, so sind sie Rechte, folglich stehet HG senkrecht auf der Linie EF.

§. 14.

Wenn eine gerade Linie auf drey andern, die sich in ihrem Fuße vereinigen, perpendikular stehet, so sind solche drey Linien in einer Ebne.



Es sey *A*B perpendikular auf BE, auf BD und auf BC. Gesetzt es sey möglich, daß BE und BD in einer Ebne IF liegen, und BC über derselben.

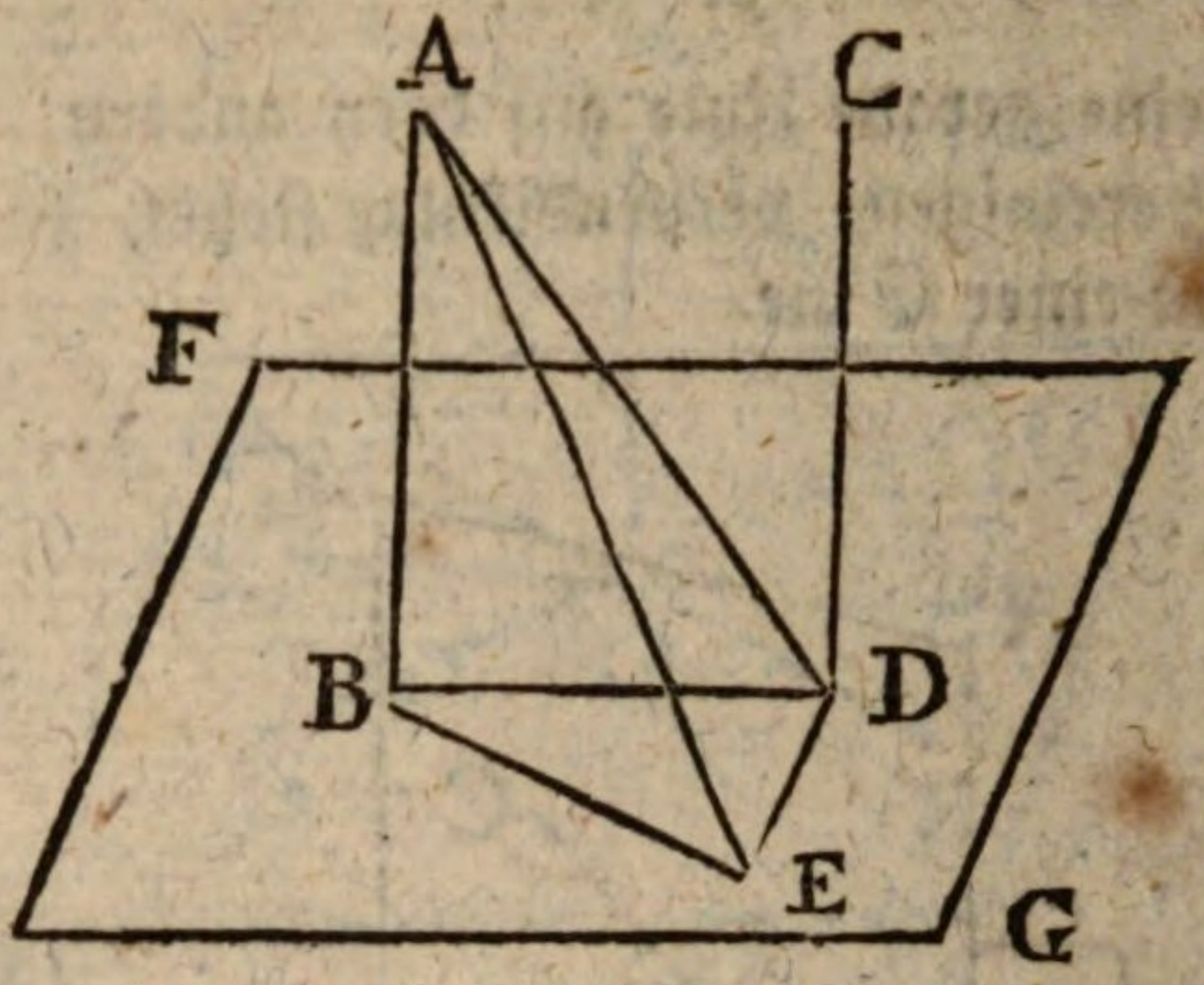
So stelle man sich eine andere Ebne BG vor, die durch die Linien AB und BC gehet. Diese Ebne BG scheidet nun die andere IF in einer geraden Linie BH.

Also wären BE, BD, BH in der Ebne IF, und BA, BC, BH in der Ebne BG. Nun ist AB perpendikular auf BE und BD, folglich auch auf BH (§. 13).

Also ist ABH ein rechter Winkel. Es war aber auch angenommen, daß ABC ein rechter Winkel sey. Folglich wäre der ganze Winkel ABH gleich seinem Theile ABC, welches widersprechend ist.

§. 15.

Wenn zwey gerade Linien auf derselben Ebne perpendikular stehen, so sind sie parallel.



Es seyen AB und CD perpendikular auf der Ebne FG.

Man ziehe BD, und mache in der Ebne FG die Linie DE = AB und senkrecht auf BD. Man ziehe auch BE, AE, AD.

CD ist perpendikular auf der Ebne, also auch auf DB und DE (§. 2). Ebenfalls ist AB perpendikular auf BD und BE.

In den Dreyecken ABD und EDB sind also in B und in D rechte Winkel. Es ist auch AB = DE, und BD ist beyden gemein. Daher ist AD = BE.

In den Dreyecken ABE und ADE ist DE = AB, AD = BE, AE = AE, folglich auch ∠ADE = ∠ABE = R.

Es ist also ED auf DA senkrecht. Es ist aber auch ED auf DB und DC senkrecht.

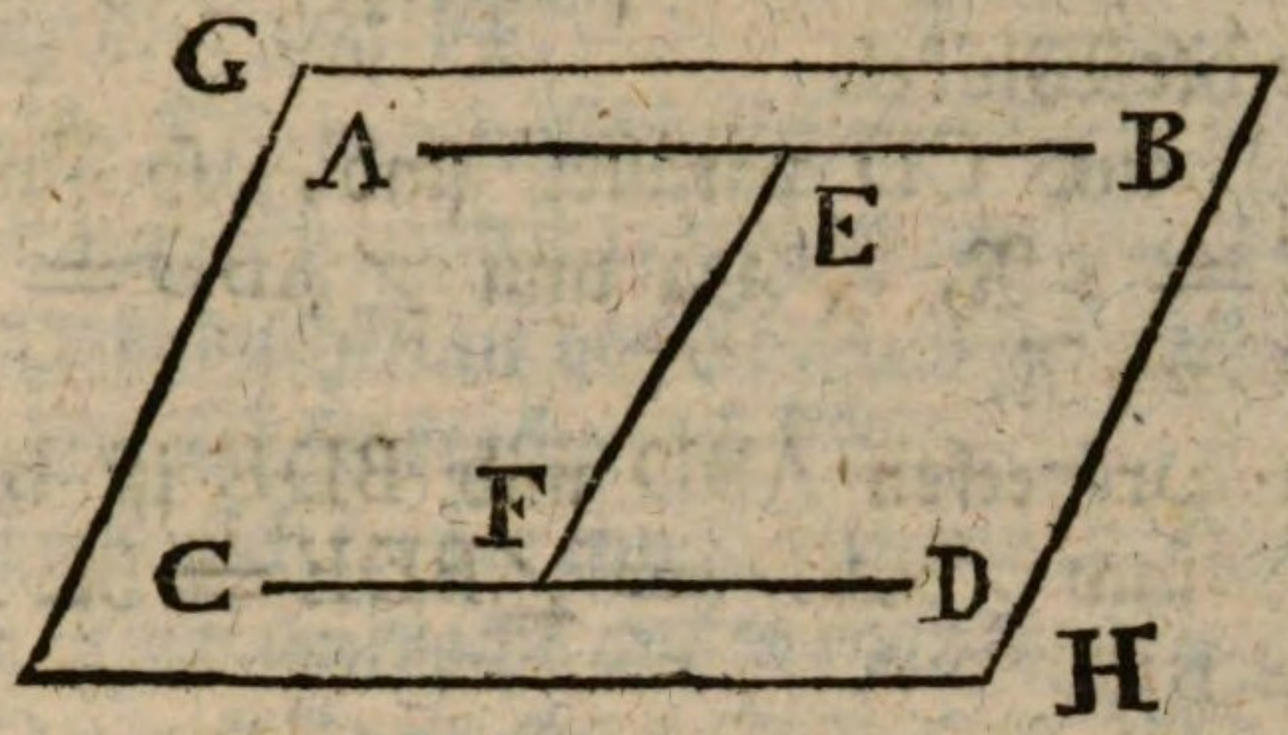
Folglich liegen die Linien DB, DA, DC in einer Ebne (§. 14). Auch lieget AB als Seite des Dreyeckes ABD in der nemlichen Ebne (§. 10).

Es sind ABD und CDB rechte Winkel. Da also AB und CD in einer Ebne liegen, und beyde auf BD senkrecht stehen, so sind sie parallel (II §. 41).

§. 16.

Wenn zwey gerade Linien parallel sind, und es wird von der einen zur andern eine dritte gerade Linie gezogen,

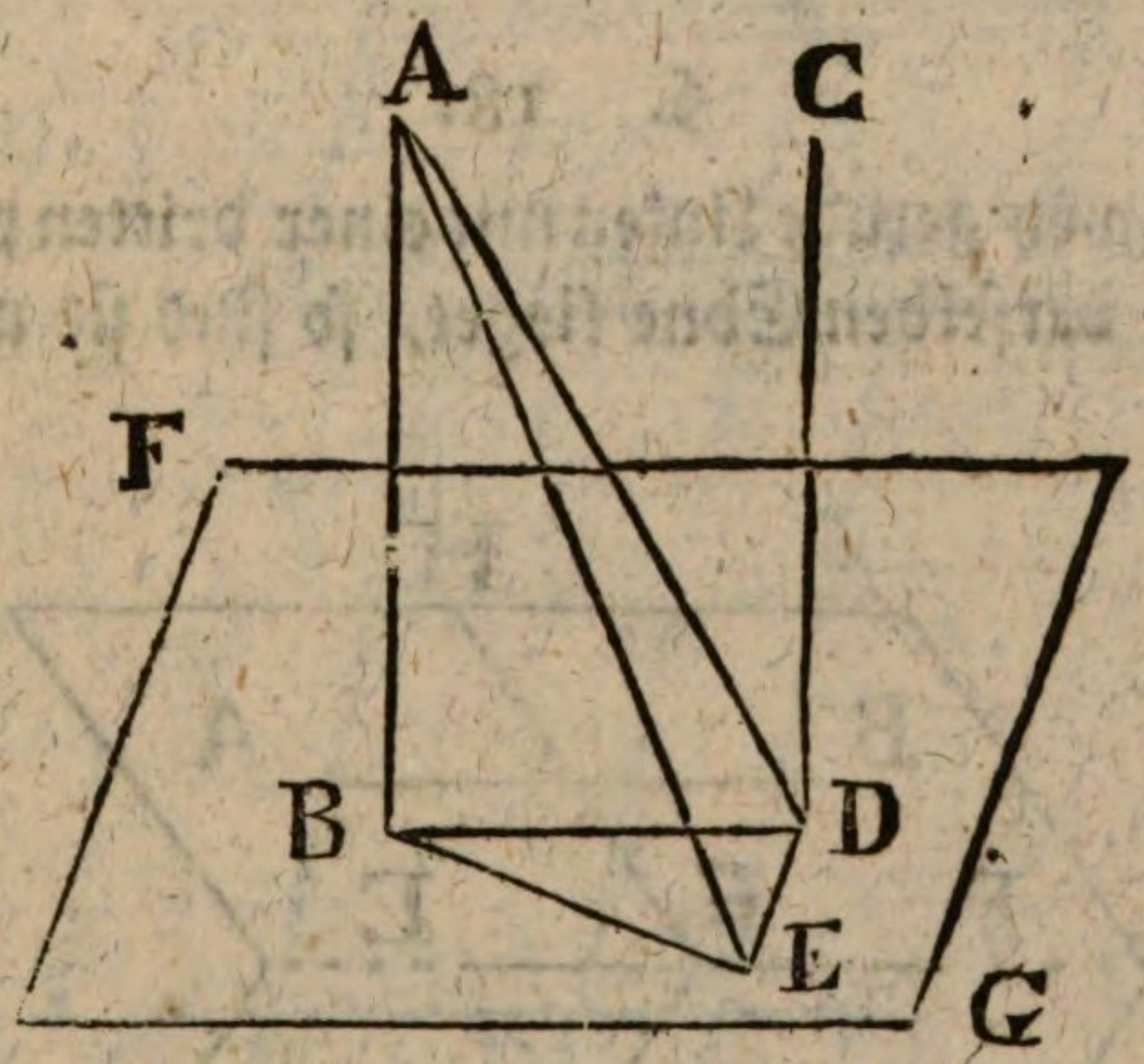
zogen, so lieget diese mit den Parallel-Linien in einer Ebne.



Gesetzt es liegen die Parallellinien AB und CD in der Ebne GH, und es wird von der einen zur andern eine gerade Linie EF gezogen, so liegt der Punkt E und der Punkt F in der Ebne, folglich die ganze Linie EF.(§. 8).

§. 17.

Wenn von zwey Parallellinien die eine auf einer Ebne senkrecht stehet, so stehet auch die andere auf derselben Ebne senkrecht.



Es sey AB senkrecht auf der Ebne FG, und parallel mit CD. Ziehe BD. Ziehe DE eckrecht auf BD in der Fläche FG und mache DE = AB.

Ziehe

Ziehe BE, AE, AD. So sind die Linien BD und AD mit A*B* und CD in einer Ebne (§. 16).

Weil AB auf der Ebne FG senkrecht stehet, so sind ABD und ABE rechte Winkel.

Weil AB und CD parallel sind, so sind ∠ABD + ∠BDC = 2 R. Da nun ∠ABD = R., so ist auch ∠BDC = R.

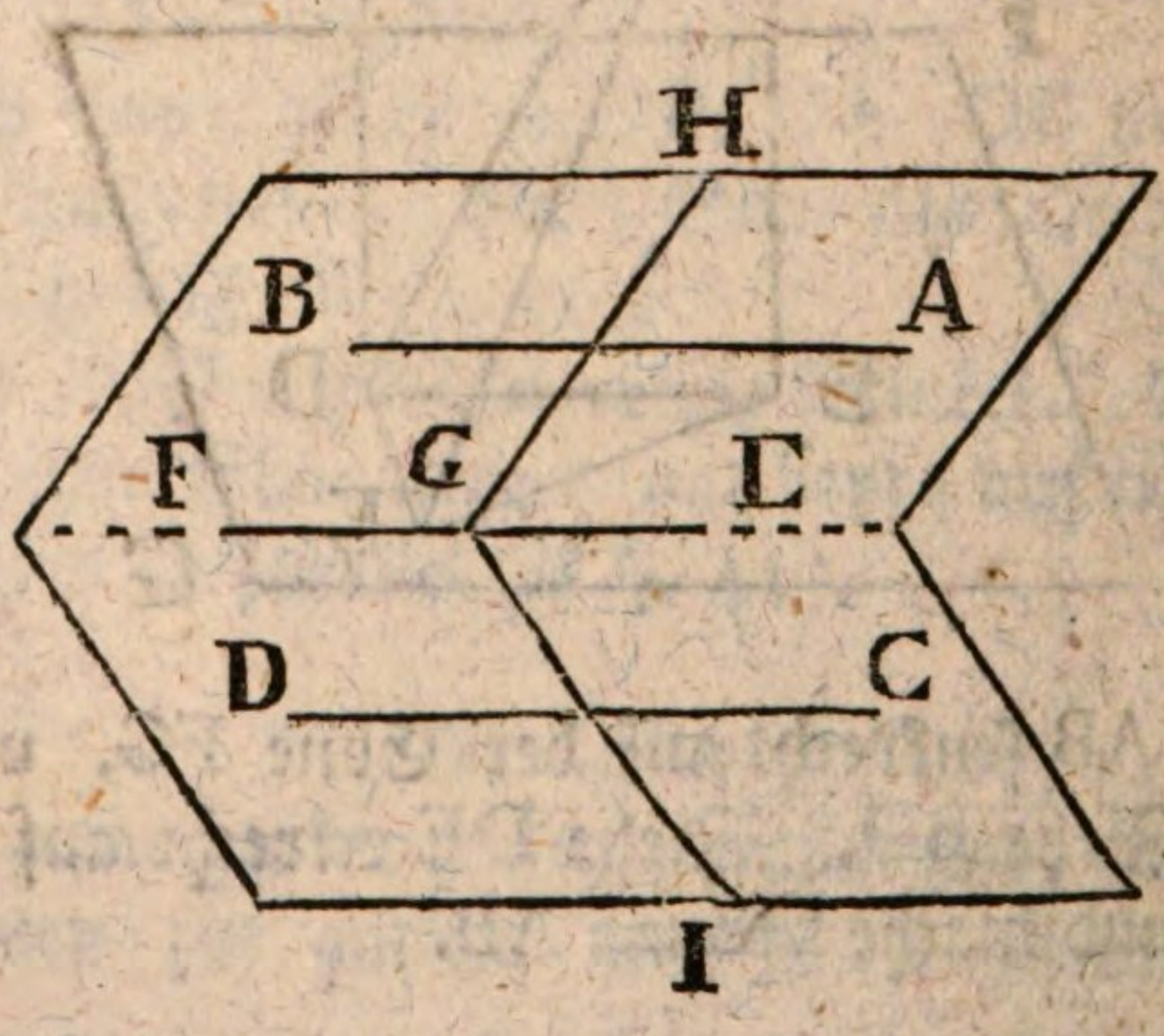
In den Dreyecken ABD nnd BDE ist BD = BD, DE = AB, und ∠ABD = ∠BDE = R. Also ist auch AD = BE.

In den Dreyecken ABE und EDA ist AE = AE, DE = AB, AD = BE, folglich ∠EDA = ∠ABE = R.

Da nun ED auf DB und auf DA senkrecht stehet, so ist ED senkrecht auf der Ebne, die durch DB und DA geht (§. 2). Also ist auch ED senkrecht auf DC, die in der nemlichen Ebne lieget (§. 13), oder umgekehrt, es ist CD senkrecht auf DE. Da nun auch bewiesen, daß CD auf auf DB senkrecht ist, so ist CD senkrecht auf der Ebne FG, worin DB und DE liegen.

§. 18.

Wenn zwey gerade Linien mit einer dritten parallel sind, die nicht in derselben Ebne lieget, so sind sie mit einander parallel.



Es

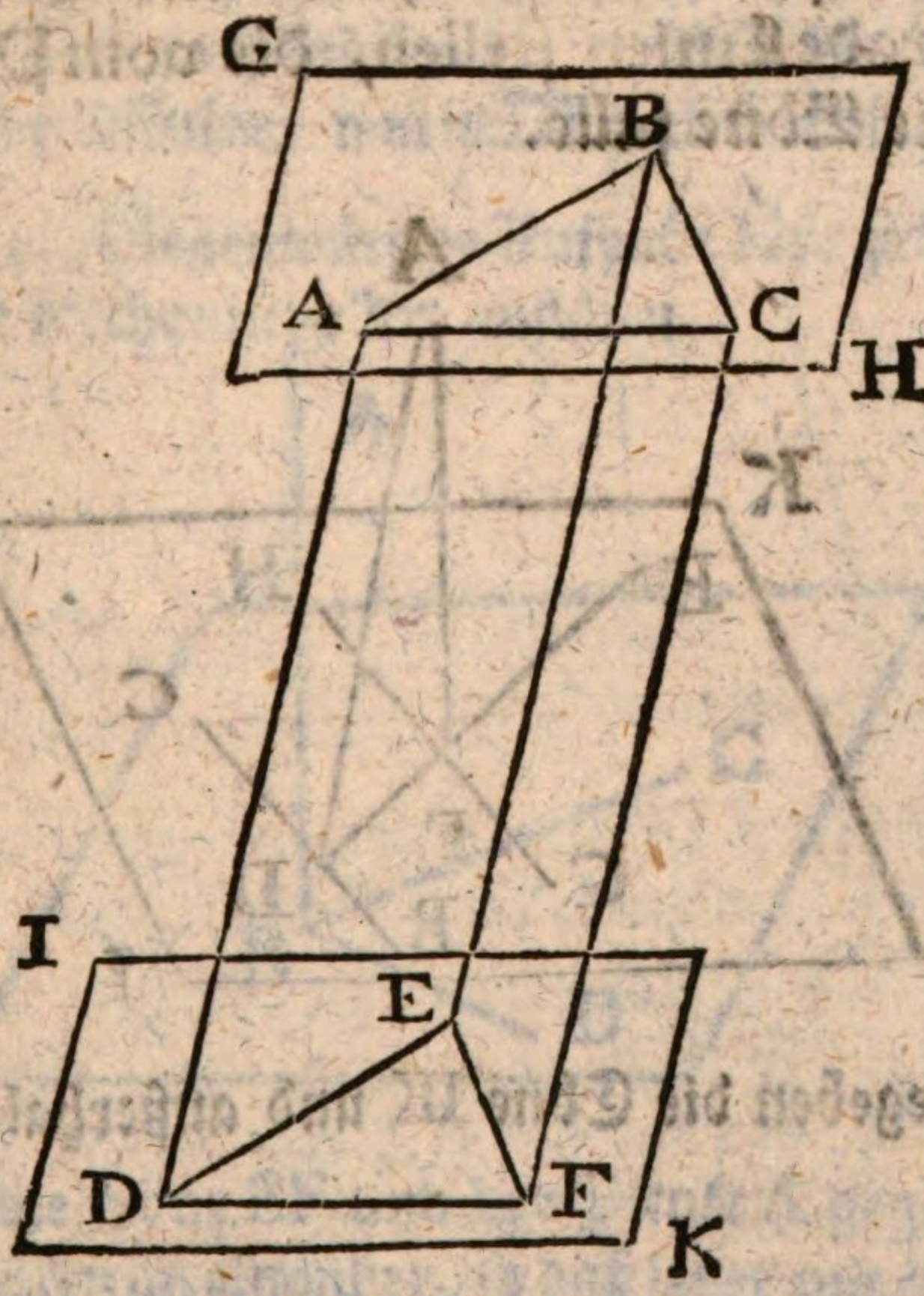
Es seyen BA und DC parallel unter sich, und jede sey auch parallel mit FE, die nicht in derselben Ebne lieget. Nimm an, es gehe eine Ebne durch BA und FE, und eine andere durch DC und FE.

Nimm in FE den willkürlichen Punkt G. In der Ebne, die durch BA und FG gehet, errichte GH senkrecht auf FE. Desgleichen in der Ebne, die durch DC und FE gehet, errichte GI senkrecht auf FE.

Stellet man sich ferner eine Ebne vor, die durch GH und GI gehet, so ist EF senkrecht auf derselben (§. 13). Nun sind AB nnd CD mit EF parallel. Also sind AB und CD auch senkrecht auf der Ebne, die durch GH nnd GI gehet (§. 17), und folglich parallel (§. 15).

§. 19.

Wenn zwey gerade Linien in einer Ebne einen Winkel machen, und zwey gerade Linien in einer anderen, mit beyden vorigen parallel sind, so entstehen auf beyden Ebnen gleiche Winkel.



Gesetzt

Gesetzt die beyden Ebnen GH und IK liegen nicht in einer Ebne, so daß sie nicht eine in die andere fallen, wenn man sie weiter ausdehnet.

Nun sey AB mit DE und BC mit EF parallel. Mache DE = AB, BC = EF. Ziehe AC, DF, AD, BE, CF.

Weil AB mit DE gleich und parallel ist, so ist auch AD mit BE gleich und parallel. Ferner weil BC mit EF gleich und parallel ist, so ist auch CF mit BE gleich und parallel (II §. 38).

Weil AD und FC mit EB gleich und parallel sind, so ist auch AD mit CF gleich und parallel.

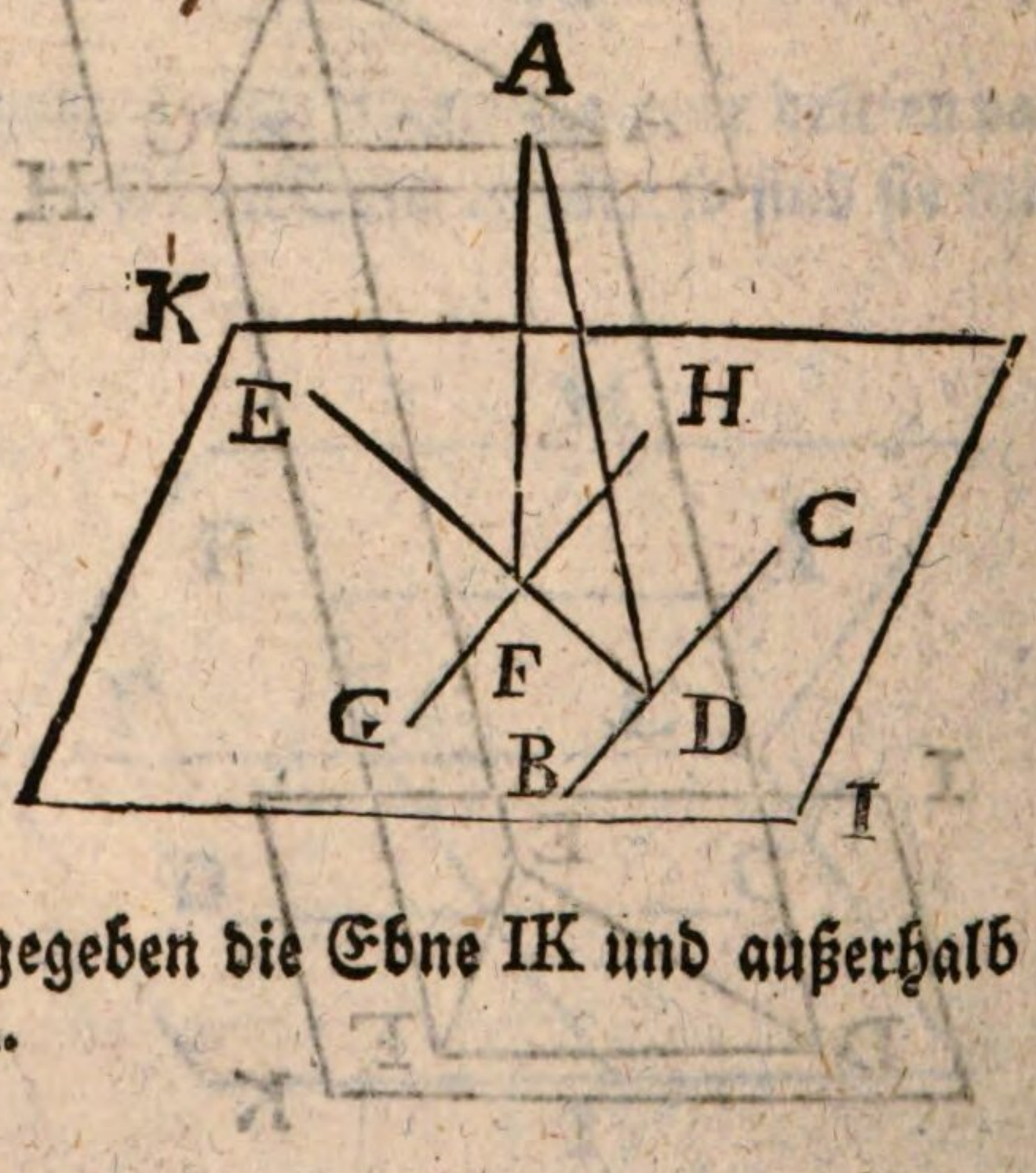
Deswegen ist auch AC mit DF gleich und parallel.

Da nun AC = DF, AB = DE, EF = BC, so ist $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Folglich $\angle ABC = \angle DEF$.

§. 20.

Aufgabe.

Wenn ein Punkt außerhalb einer Ebne gegeben ist, eine gerade Linien stellen, die vom Punkte senkrecht auf die Ebne falle.



Es sey gegeben die Ebne IK und außerhalb derselben der Punkt A.

In

In der Ebne ziehe willkürlich die gerade Linie BC. Aus A fälle auf BC die senkrechte Linie AD. Ist diese AD zugleich auf der Ebne senkrecht, so ist das Verlangte geschehen.

Ist dieses nicht, so errichte in der Ebne auf BC die senkrechte Linie DE vom Punkte D aus.

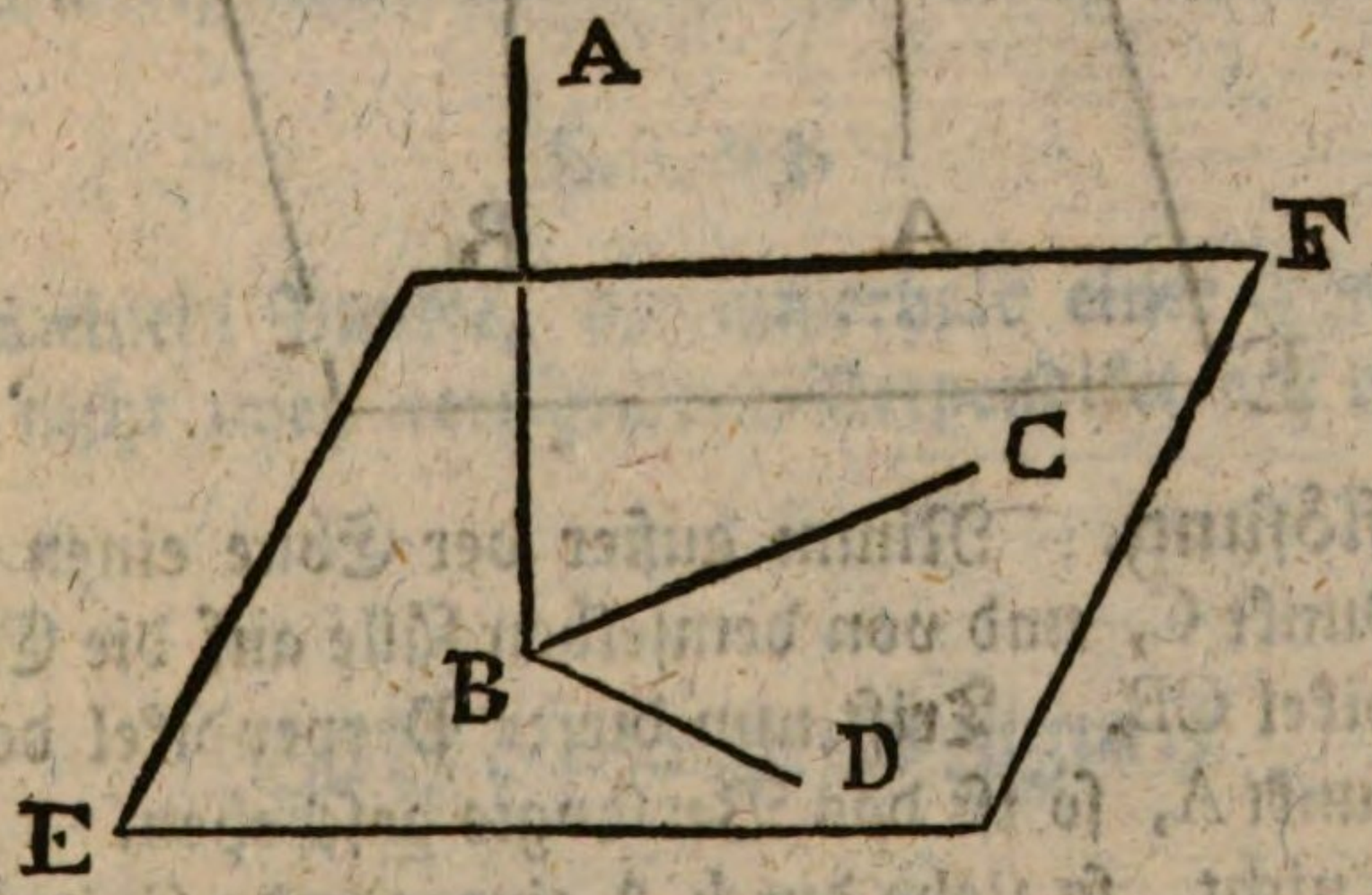
Aus A fälle auf DE die Linie AF senkrecht, so ist AF die verlangte Linie, welche auf der Ebne IK senkrecht stehet.

Beweis. Ziehe durch F in der Ebne IK die GH mit BC parallel.

Vermöge der Konstrukzion ist BC perpendikular sowohl auf DA als auf DE, folglich auf der Ebne, die durch DA und DE geführet werden kann. Auf derselben Ebne ist also auch GH senkrecht, weil GH mit BC parallel ist (§. 17).

Weil GH auf der Ebne, die durch DA und DF gehet, perpendikular ist, so ist sie auch perpendikular auf der geraden Linie AF, die in gedachter Ebne lieget, oder AF ist ist auf GH perpendikular. AF ist auch, vermöge der Konstrukzion auf DE perpendikular. Also ist AB auf der Fläche IK perpendikular, worin DE und GH liegen (§. 13).

Anmerkung. Gegenwärtige Aufgabe läßt sich geschwinder auf eine mechanische Art auflösen.



Es seyen die Ebne EF und der Punkt A gegeben. Lege zwey Winkelhaken an einander, so daß jeder mit einen Rande

auf

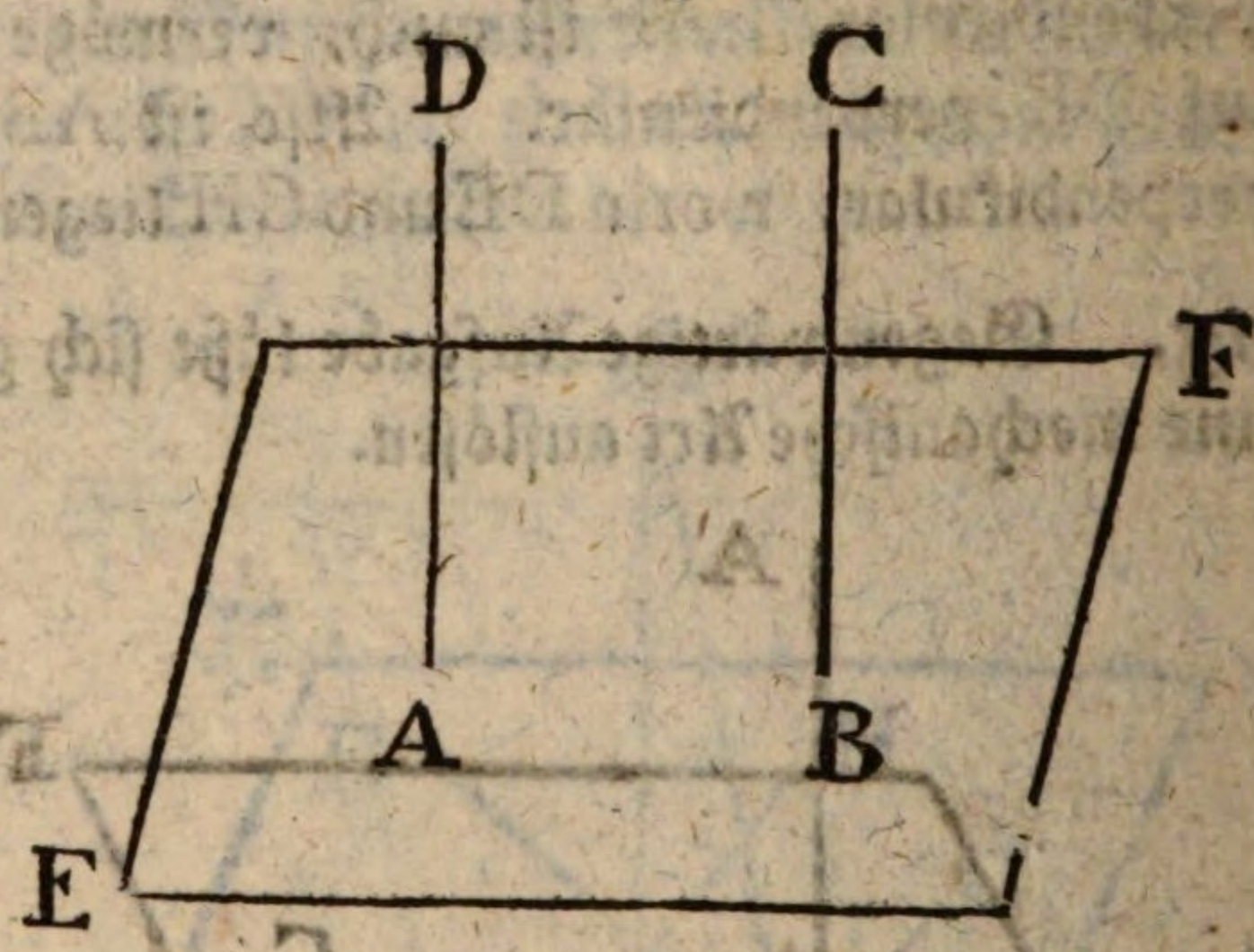
auf der Ebne anliege, die beyden übrigen Ränder aber an einander stoßen und aufrecht stehen. So bilden sie eine Figur wie ABC, ABD. Rücke sie in solcher Stellung, bis die beyden Ränder AB den Punkt A berühren. Merke den Punkt B, wo die Ecken der Winkelhaken an einander stoßen. Durch die Punkte A und B errichte einen dünnen Stift, so stellet er eine gerade Linie vor, die auf der Ebne EF senkrecht stehet.

Denn vermöge der Beschaffenheit der Winkelhaken ist AB perpendikular auf BC und auf BD, folglich auf der Ebne EF (§. 13).

§. 21.

Aufgabe.

Ueber einem Punkte A, der in einer Ebne gegeben ist, eine gerade Linie errichten, die auf der Ebne senkrecht stehe.



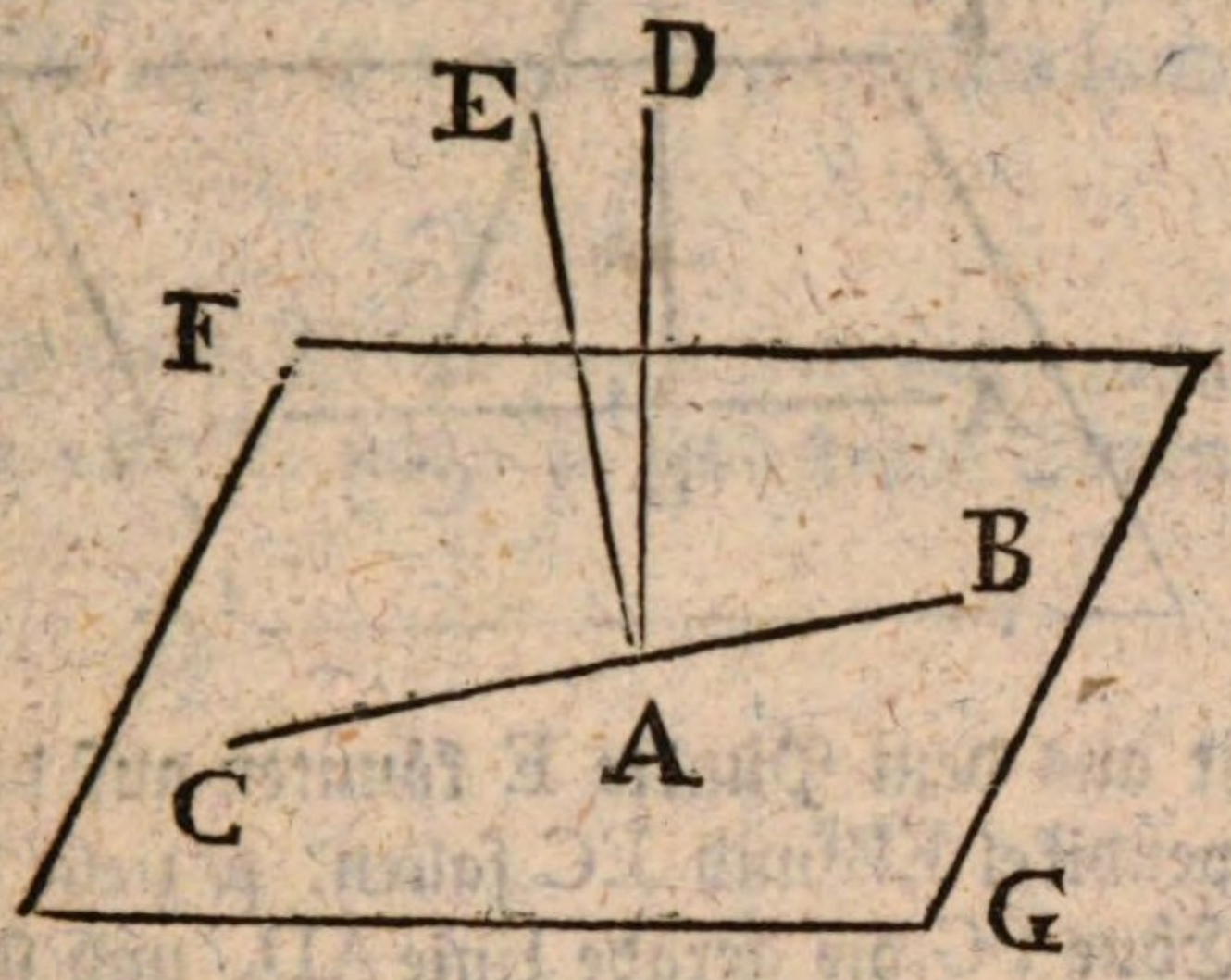
Auflösung. Nimm außer der Ebne einen willkürlichen Punkt C, und von demselben fälle auf die Ebne den Perpendikel CB. Trift nun dieser Perpendikel den gegebenen Punkt A, so ist das Verlangte geschehen.

Wo nicht, so ziehe durch A eine gerade Linie AD mit BC parallel. Diese AD wird auf der Ebne senkrecht stehen, weil sie mit der senkrechten BC parallel ist (§. 17).

§. 22.

§. 22.

Auf einer Ebne können nicht über dem nemlichen Punkte zwey senkrechte gerade Linien errichtet werden.

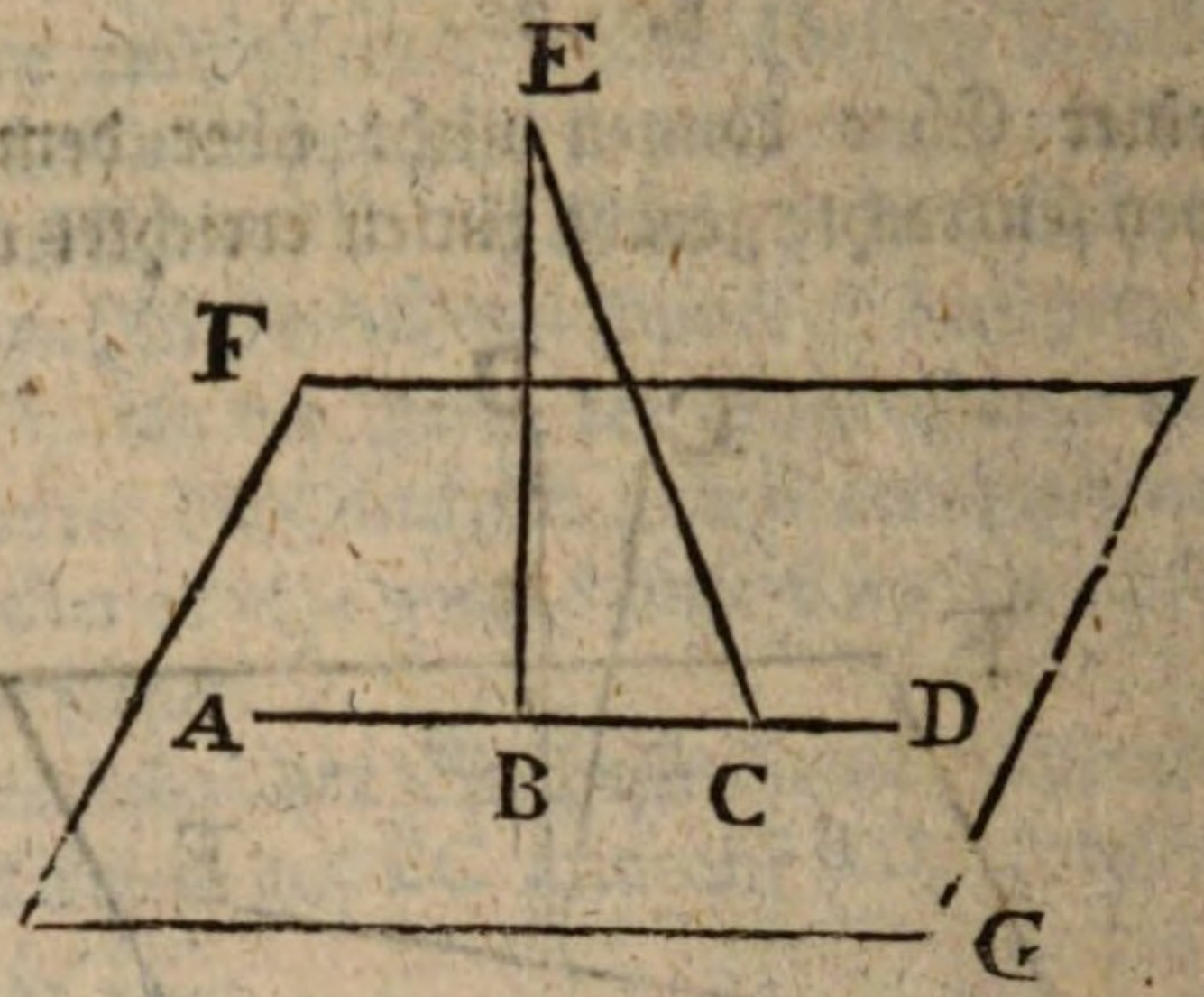


Gesetzt es könnten beyde Linien AD und AE über derselben Ebne senkrecht stehen, so stelle man sich eine andere Ebne vor, die durch AD und AE gehe. Diese wird die erste in einer geraden Linie BC schneiden. Ferner, da AD auf der Ebne FG senkrecht ist, so ist sie auch auf BC, die in der Ebne lieget, senkrecht (§. 2). Da nun auch AE auf der Ebne FG senkrecht seyn soll, so muß sie ebenfalls auf BC senkrecht seyn. Folglich wären BAD und BAE beyde rechte Winkel, und einander gleich, welches unmöglich ist.

§. 23.

Aus einem Punkte, der außerhalb einer Ebne lieget, können nicht zwey verschiedene Perpendikel auf die Ebne fallen.

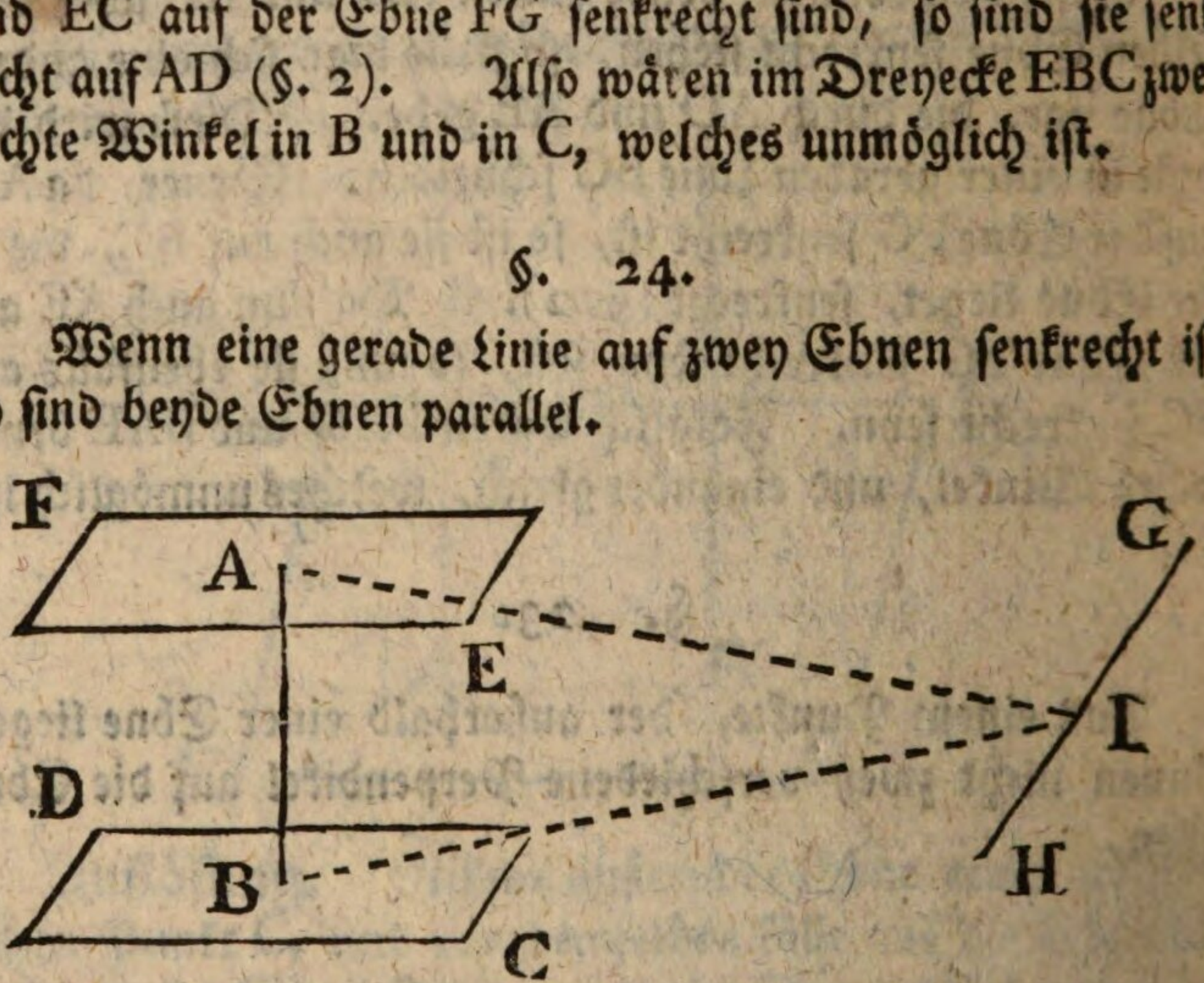
(Siehe die folgende Figur.)



Gesetzt aus dem Punkte E könnten auf die Ebne FG zwey Perpendikel EB und EC fallen, so ziehe durch B und C in der Ebne FG die gerade Linie AD, und stelle dir vor, es gehe eine Ebne durch EB, EC, BC (§. 10). Weil EB und EC auf der Ebne FG senkrecht sind, so sind sie senkrecht auf AD (§. 2). Also wären im Dreyecke EBC zwey rechte Winkel in B und in C, welches unmöglich ist.

§. 24.

Wenn eine gerade Linie auf zwey Ebnen senkrecht ist, so sind beyde Ebnen parallel.



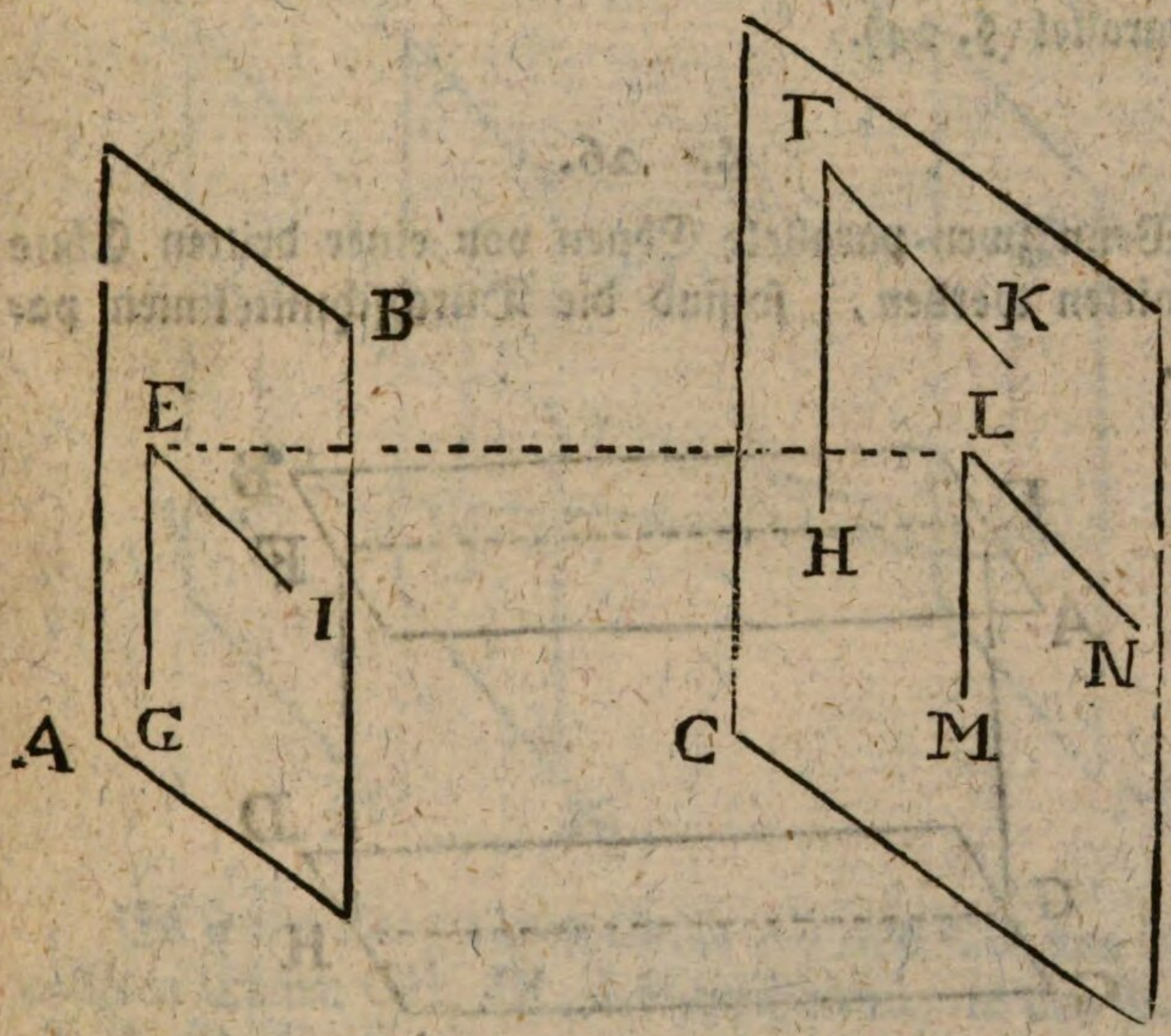
Es sey AB senkrecht auf den Ebnen CD und EF. Wir wollen annehmen, es könnten beyde Ebnen, wenn sie hinlänglich ausgedehnet würden, irgendwo zusammen treffen, so müsten sie einander in einer geraden Linie GH schneiden. In

dieser

dieser nehme ich einen Punkt I, und ziehe auf den Ebenen CD und EF die geraden Linien AI und BI. Weil AB auf beyden Ebenen senkrecht stehet, so stehet sie auch auf *AI* und BI senkrecht (§. 2). Also wären im Dreyecke AI*B* zwey rechte Winkel, in A und in *B*, welches unmöglich ist.

§ 25.

Wenn in zwey Ebnen beyderseits zwey zusammentreffende Linien parallel sind, so sind beyde Ebnen auch parallel.



In den Ebnen AB und CD sey GE parallel mit HF und IE parallel mit KF. Von E fälle den Perpendikel EL auf die Ebne CD, und ziehe darin LM parallel mit FH.

Da nun EG parallel war mit FH, und LM parallel gezogen ist mit FH, so ist EG parallel mit LM (§. 18), und EL, EG, LM liegen in einer Ebne (§. 16).

Weil EL auf CD senkrecht ist, so ist ELM ein rechter Winkel, und weil LM und EG parallel sind, so sind $\angle ELM + \angle LEG = 2$ R., folglich ist $\angle LEG =$ R.

Ziehe LN parallel mit FK, so ist wiederum LN parallel mit EI, weil beyde mit FK parallel sind. Ferner ist EL senkrecht auf LN, weil sie auf der Ebne CD senkrecht ist (§. 2). Da nun LN und EI parallel sind, so sind $\angle ELN + \angle LEI = 2$ R., folglich $\angle LEI =$ R.

Es ist also LE senkrecht sowohl auf EI als auf EG, folglich auf der Ebne AB. Da nun auch EL auf die Ebne CD senkrecht gefället worden, so sind beyde Ebnen AB und CD parallel (§. 24).

§. 26.

Wenn zwey parallele Ebnen von einer dritten Ebne geschnitten werden, so sind die Durchschnittslinien parallel.

Gesetzt die Ebnen AB und CD werden von einer dritten Ebne GEFHG geschnitten, diese letzte mag nun senkrecht oder schief gegen die beyden geschnittenen stehen.

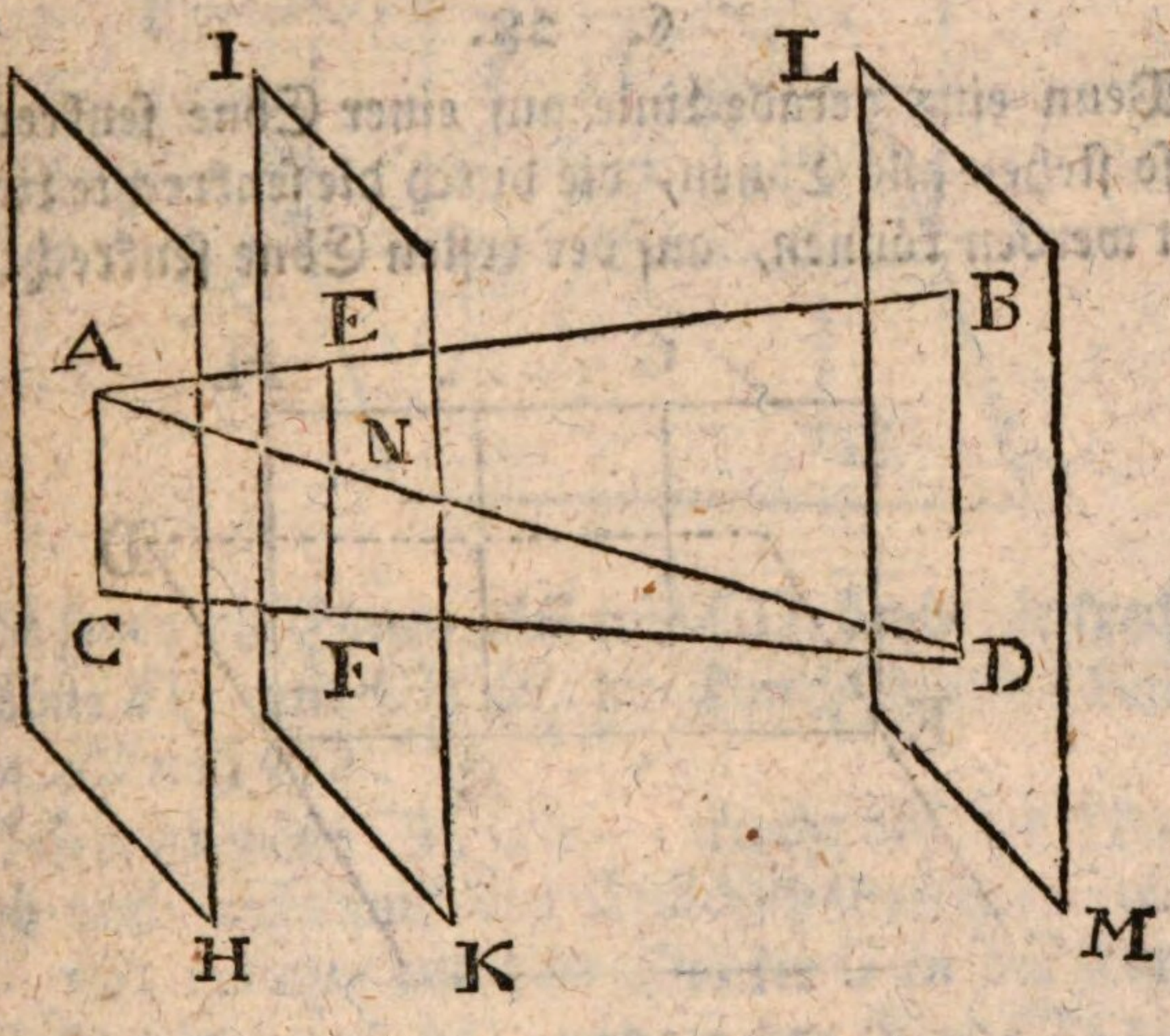
So sind die Durchschnitte EF und GH gerade Linien (§. 12), die in der schneidenden Ebne GEFHG liegen. Sollten diese Linien EF und GH irgendwo zusammen treffen, so müßten auch die Ebnen AB und CD, in denen sie liegen, zusammen treffen, welches aber nicht seyn

kann,

kann, da die Ebnen AB und CD parallel sind. Also können auch die geraden Linien EF und GH, die in einer Ebne EH liegen, nicht zusammen treffen, und sind daher parallel.

§. 27.

Wenn zwey gerade Linien von drey parallelen Ebnen geschnitten werden, so sind die abgeschnittenen Theile proporzioniret.



Es seyen die geraden Linien AB und CD von den parallelen Ebnen GH, IK, LM geschnitten, in den Punkten *A*, E, B, C, F, D.

Ziehe *A*C und BD. Ziehe *A*D, welche in einem Punkte N durch die Ebne IK gehen wird. Ziehe EN und NF.

Weil die Ebne IK mit LM parallel ist, und das Dreyeck *A*BD beyde Ebnen schneidet, so ist EN parallel mit BD. Ferner weil die Ebne IK mit der Ebne GH parallel ist, und weil das Dreyeck D*A*C beyde Ebnen schneidet, so ist NF parallel mit AC (§. 26).

Also ist im Dreyecke *A*BD

*A*E, EB :: AN, ND

und im Dreyeck DAC ist

CF, FD :: AN, ND,

Daher ist

AE, E*B* :: CF, FD

oder auch

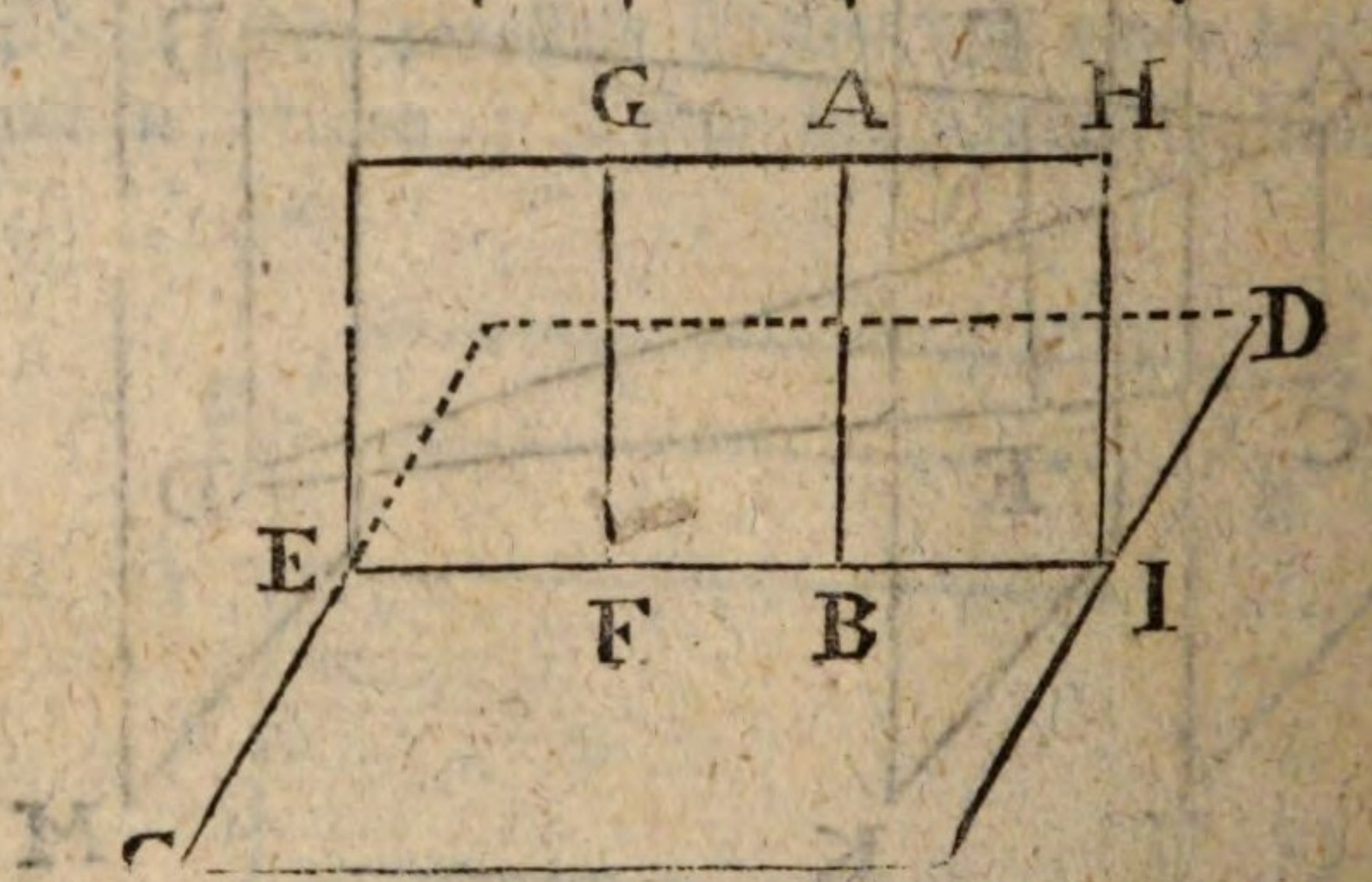
AE, (AE + EB) :: CF, (CF + FD)

das ist

AE, AB :: CF, CD.

§. 28.

Wenn eine gerade Linie auf einer Ebne senkrecht stehet, so stehen alle Ebnen, die durch die senkrechte Linie geführet werden können, auf der ersten Ebne senkrecht.



Es sey A*B* senkrecht auf der Ebne CD. Durch AB werde willkürlich eine Ebene EH geführet, welche die Ebne CD irgendwo in einer geraden Linie EI schneiden wird. Aus einem Punkte F errichte über EI in der Ebne EH einen Perpendikel FG.

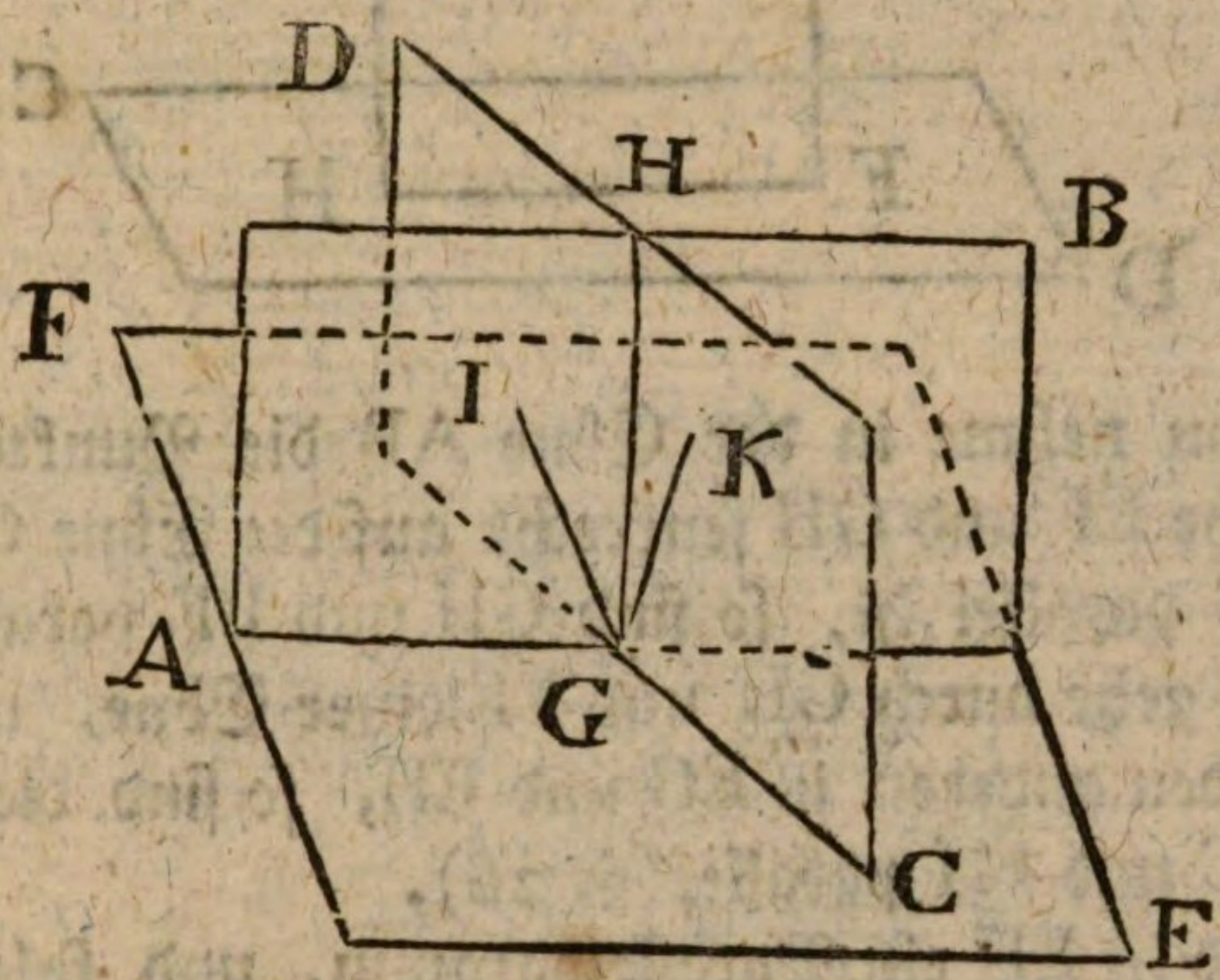
Da nun *A*B auf der Ebne CD senkrecht ist, so ist sie auf der Linie EI senkrecht (§. 2). Auf der nemlichen EI ist auch FG senkrecht. Also sind *A*B und FG parallel (II §. 41). Da AB auf der Ebne CD senkrecht ist, so ist auch ihre Parallele FG auf derselben Ebne senkrecht (§. 17). Und da jede gerade Linie wie FG in der Ebne EH, auf der Ebne CD

senk-

senkrecht ist, so ist die Ebne EH auf der Ebne CD senkrecht (§. 3).

§. 29.

Wenn zwey einander schneidende Ebnen beyde auf einer dritten Ebne senkrecht sind, so ist auch die Durchschnittslinie beyder ersten Ebnen auf der dritten Ebne senkrecht.



Es seyen die Ebnen *AB* und CD beyde senkrecht auf der Ebne EF, und GH sey die Durchschnitts-Linie der Ebnen *AB* und CD.

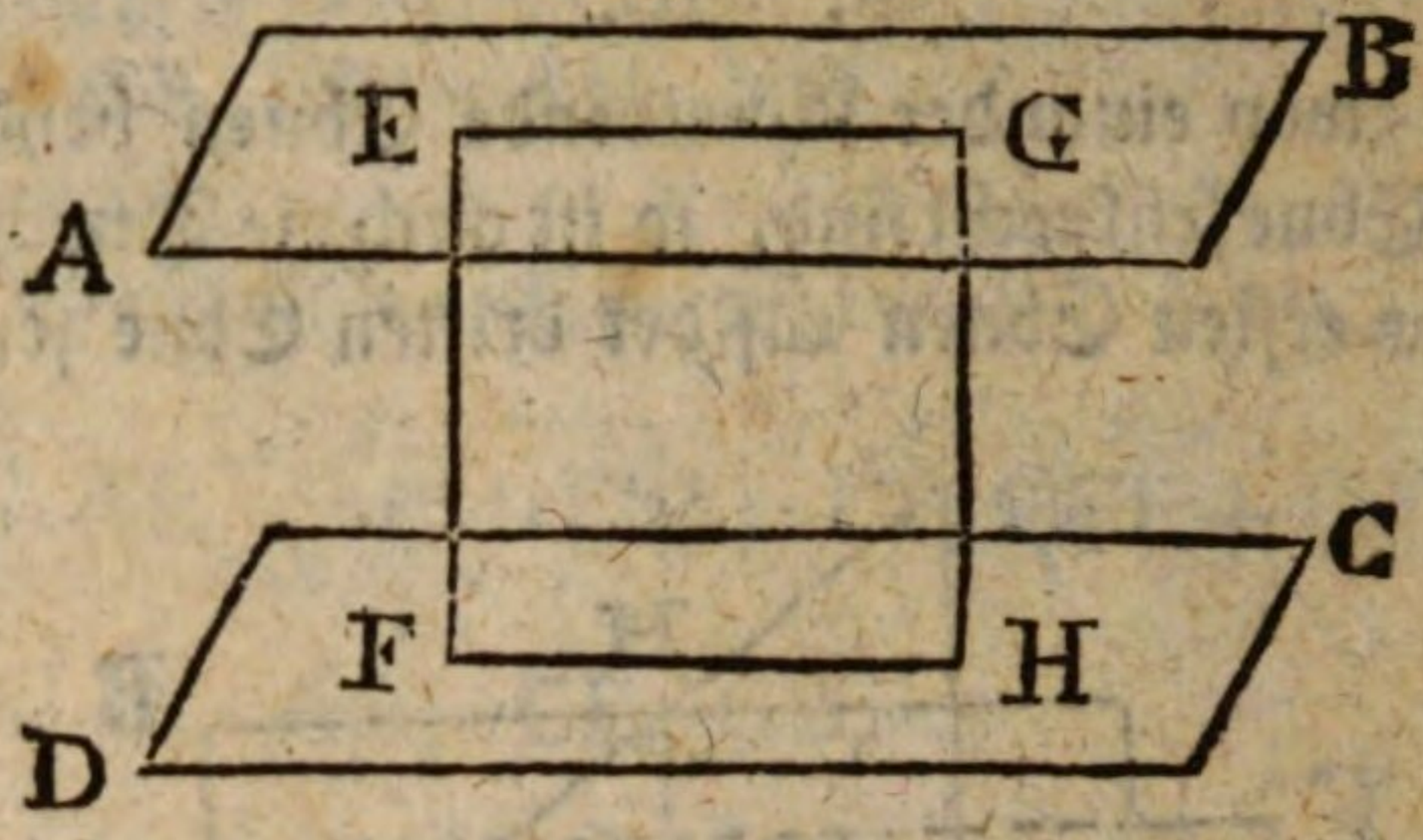
Gesetzt es wäre GH nicht senkrecht auf der Ebne EF, folglich auch nicht auf den Durchschnittslinien AG und CG. So errichte aus dem Punkte G in der Ebne AB die GI senkrecht auf AG, und in der Ebne CD die GK senkrecht auf CG.

Da nun die Ebnen *AB* und CD auf der Ebne EF senkrecht sind, so müßen auch GI und GK, welche in den Ebenen liegen, und auf den Durchschnitten senkrecht sind, auf der nemlichen Ebne EF senkrecht stehen (§. 3). Also ständen über dem Punkt G auf der Ebne EF zwey senkrechte Linien, welches unmöglich ist (§. 22).

§. 30.

Wenn zwey parallele Ebnen gegeben sind, und es werden von so viel Punkten der einen Ebne als man will, auf die

die andere Ebne Perpendikel gefället, so sind alle diese Perpendikel gleich.



Man nehme in der Ebne AB die Punkte E und G, und ziehe EF und GH senkrecht auf die Ebne CD, welche mit AB parallel ist, so sind GH und EF parallel (§. 15).

Es gehe durch GH und EF einer Ebne, und schneide die beyden anderen in EG und EH, so sind diese beyde Linien EC und FH parallel (§. 26).

Also ist EH ein Parallelogramm, und folglich ist GH = EF.

Eben so läßt sich von allen möglichen senkrechten Linien, die von einer der parallelen Ebnen auf die andere gefället werden, beweisen, daß sie gleich sind.

Anmerkung. Hiermit endigen wir die Lehre von den Ebnen, um in folgenden Hauptstücken die Körper zu betrachten.

Ende des siebenten Hauptstückes und des ersten Theiles.

1 Zilk.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Burja, Abel, 1752-1816

Der selbstlernende Geometer, oder deutliche Anweisung zur Meßkunst worin sowohl die euklidische Geometrie, als auch die geradlinichte und sphärische Trigonometrie, nebst einer Anleitung zum Rivelliren und Landmessen enthalten ist
Bd.: 1

Berlin und Libau (1787)

Math.p. 60 k-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10137650-1
VD18 90238168